

Stabilitatea sistemelor liniare.

Se știe de mult că se pot obține anumite avantaje și calități esențiale în funcționarea sistemelor, recurgând la reacția negativă. Să luăm, de exemplu, un sistem electro-mecanic, un motor electric care trebuie să mențină unghiul

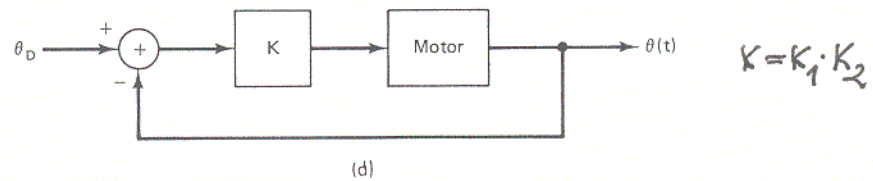
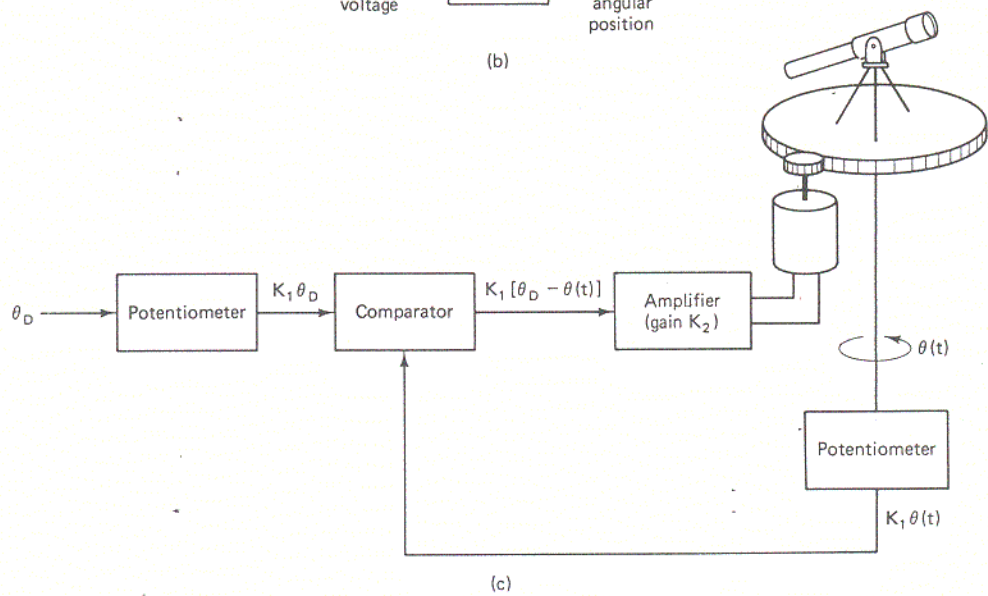
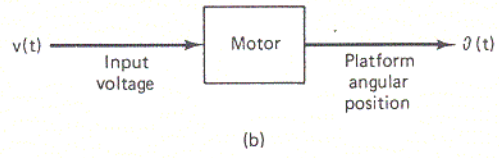
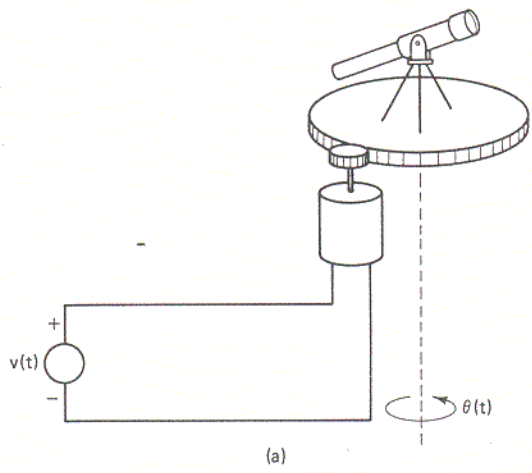


Fig 1. Menținerea poziției unghiulare a unui telescop prin reacție. (a) Motorul de curent continuu acționând platforma. (b) Schema întârzierii (a). Sistem cu reacție pentru fixarea telescopului. (c) Schema sistemului (c).

unei platforme pe care se află un telescop, așa cum se arată în fig. a. Tensiunea $v(t)$ se aplică motorului de curent continuu, ce poate de, prin intermediul unui angrenaj, platforma. Unghiul (mai precis poziția unghiurilor) platformei este $\theta(t)$. Schema bloc a sistemului este cea din fig. b. Se aplică motorului o tensiune și motorul rotește platforma până la unghiul $\theta(t)$ are valoarea dorită. Reglajul fin al unghiurii este însă dificil de obținut. Pe măsură ce ne apropiem de valoarea dorită a unghiurii, ar trebui ca motorul să se rotească "mai încet" (cu viteză unghiurilor mai mică), pentru a nu pune să depășim prin inerție poziția dorită. O variantă mai bună pentru reglaj este cea din fig. c, cu schema bloc dată în fig. d. Ea este o schemă cu reactie negativă. Tensiunea ce comandă motorul este proporțională cu diferența între unghiul dorit pentru platformă, θ_D și unghiul curent al platformei, $\theta(t)$: $\theta_D - \theta(t)$. Unghiul dorit θ_D este fixat de la un potențiometrul (eventual multiplu) potențiometrul ce furnizează tensiunea $K_1 \theta_D$. Un al doilea potențiometrul, ce se mișcă solidar cu platforma, furnizează tensiunea $K_2 \theta(t)$. Cele două tensiuni se compară și se generează un semnal de eroare, $K_1 [\theta_D - \theta(t)]$. După amplificare, acest semnal eroare comandă motorul de curent continuu.

Sistemul din fig. a-b este un sistem *în buclă deschisă* în timp ce sistemul din fig. c-d este unul *în buclă închisă*.

Un sistem în buclă deschisă, dacă este perturbat, nu poate să revină la poziția dorită, dar dacă este perturbat, apare imediat un semnal de eroare ce corectează poziția platformei, înlăturând astfel perturbarea (nedorită). Nu este necesar, la sistemul în buclă închisă să cunoaștem structura

sistemului și nu trebuie să-l urmărim ca evoluție; e necesar să fixăm doar unghiul dorit, θ_0 .

Insensibilitatea sistemelor în buclă închisă la perturbații și faptul că nu e necesar să avem cunoștințe amănunțite despre sistem, sunt două dintre avantajele importante ale reacției (negative).

Exemplul prezentat este doar unul din numeroasele cazuri în care se recurge la sisteme în buclă închisă. Controlul proceselor chimice, al proceselor de reglare a temperaturii, al sistemelor aerospațiale etc, implică bucle de reacție, cu alte cuvinte sistemele în buclă închisă. Chiar și sistemele biologice recurg la reacție. Atunci când efectuăm o mișcare de apucare cu mâna, de precizie, viteza de mișcare a acesteia este redusă pe măsură ce mâna se apropie de obiect; bucla se închide prin sistemul vizual (ochii). Mai mult, reacția (negativă) poate fi folosită pentru stabilizarea unui sistem instabil.



Fig 2. Exemplu de sistem instabil, ce poate fi stabilit prin reacție negativă

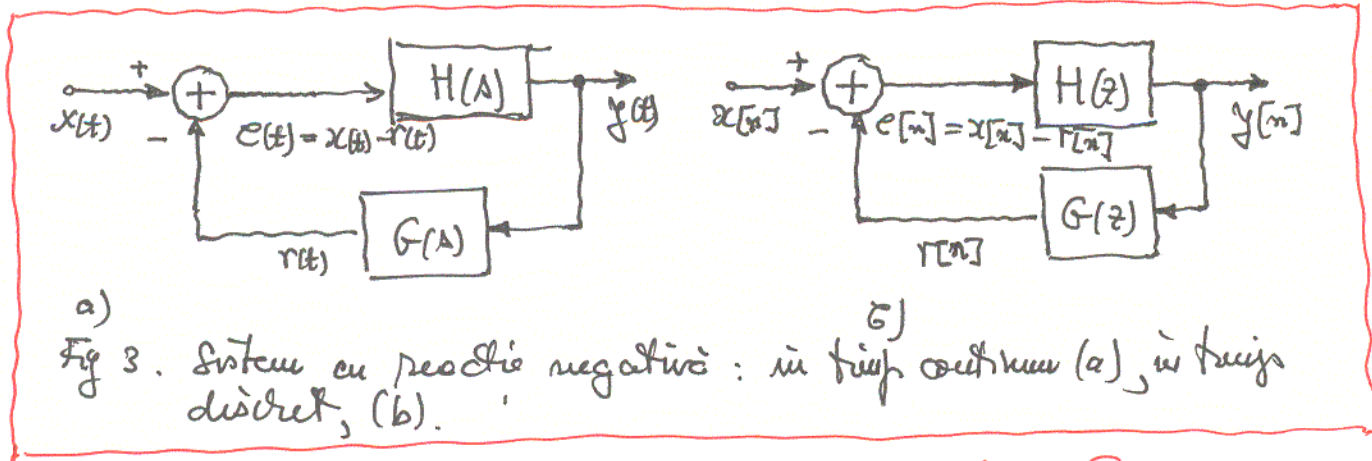
Considerăm corpul dinelii în echilibru a corpului din fig 2. Poziția sa este instabilă, deoarece orice influență externă (o poartă de vânt, de exemplu) îl va răsturna. Dacă însă folosim compensația tendințelor de răsturnare, sistemul poate rămâne stabil. Dar pentru a compensa tendințele de răsturnare

este necesar ca, prin sistemul vizual, să avem o măsură a abaterii corpului de la poziția de echilibru. Astfel sistemul nu funcționează în buclă închisă și poate fi stabil.

Exemplele prezentate sunt argumente în favoarea reacției de tip negativ.

1. Sisteme liniare cu reacție negativă.

În figura 3a se arată structura unui sistem liniar cu reacție negativă de tip continuu iar în fig 3b structura unui sistem numeric (digital), de același tip. Vom presupune că



problemele cu care se lucrează în acest capitol sunt exclusiv cauzate, ca urmare a faptului că reacția se aplică unor sisteme fizice.

Funcțiile $H(s)$ sau $H(z)$ sunt funcții sistem ale "căii directe" în timp ce funcțiile $G(s)$ sau $G(z)$ sunt funcții sistem ale "căii inverse". Funcțiile sistem globale se numesc "funcții sistem ale sistemelor în buclă închisă".

Se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned}
 E(s) &= X(s) - R(s) & E(z) &= X(z) - R(z) \\
 Y(s) &= H(s) E(s) & Y(z) &= H(z) E(z) \\
 R(s) &= G(s) Y(s) & R(z) &= G(z) Y(z)
 \end{aligned}$$

Se elimină E și R și se obține o legătură directă între semnalul de intrare și semnalul de ieșire:

$$Y(s) = H(s) [X(s) - G(s) Y(s)]; \quad Y(z) = H(z) [X(z) - G(z) Y(z)]$$

Rezultă că sistemele în buclă închisă, cu reacție negativă au funcțiile sistem:

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1) \quad ; \quad Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (2)$$

Relațiile (1) și (2) sunt ecuațiile fundamentale ale sistemelor cu reacție negativă.

2. Căteva aplicații și consecințe ale reacției.

Vom examina câteva aplicații și consecințe ale reacției, recur-gând la ecuația fundamentală respectivă.

2.1. Sistemul invers.

În anumite aplicații pentru un sistem $P(s)$ se dorește pînă și țarea sistemului invers, $1/P(s)$. Vom considera sistemul cu reacție din fig. 4, unde $H(s) = K$

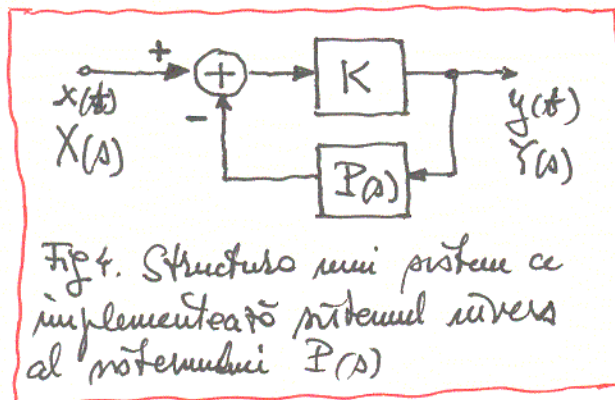


Fig. 4. Structura unui sistem ce implementează sistemul invers al sistemului $P(s)$

și $G(s) = P(s)$. Funcția sistemului cu reacție este, conform (1):

$$Q(s) = \frac{K}{1 + KP(s)} \quad (3)$$

Dacă facem câștigul (amplificarea) K suficient de mare, astfel încât $|KP(s)| \gg 1$, atunci (3) devine:

$$Q(s) \approx \frac{1}{P(s)} \quad (4)$$

Se vede că realizarea relației (4) însumează doar un câștig K "suficient de mare", fără ca valoarea sa efectivă să fie importantă. Este posibilă recurgerea la un amplificator operațional pentru realizarea câștigului K .

Integratorul este un exemplu din această categorie. Curentul printr-un condensator este proporțional cu derivata tensiunii de la bornele sale. Conectând condensatorul în

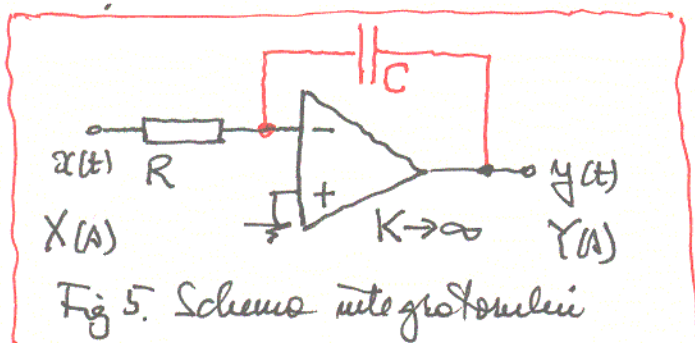


Fig. 5. Schema integratorului

bucle de reacție, ca în fig. 5, se obține un integrator, pentru care:

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = -\frac{1}{sRC}$$

Deși ne referim aici numai la sisteme liniare, vom menționa că aceeași structură poate fi folosită și pentru "universarea" unor neliniități tot. Sisteme pentru care mărirea de câștig este legată de mărirea de intrare se pot implementa utilizând caracteristici de tip exponențial, pe care le prezintă diodele (caracteristica curent-tensiune). Evident, diodele nu și conectate în bucle de reacție.

2.2. Compensarea unor caracteristici neideale ale unor elemente de circuit.

Să considerăm, ca exemplu, cazul redării unui câștig constant într-o bandă de frecvențe, plecând de la un amplificator pentru care $|H(\omega)|$ nu este constant în bandă. Dacă $H(s)$ este răspunsul amplificatorului și dacă $G(s) = K$, atunci

$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)}$$

Pentru $s = j\omega$ obținem răspunsul în frecvență al sistemului cu reacție:

$$Q(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + KH(j\omega)} \tag{5}$$

Dacă în banda de frecvențe de interes avem satisfăcătoarea condiția:

$$|KH(j\omega)| \gg 1 \tag{6}$$

atunci:

$$Q(j\omega) \equiv Q(\omega) \approx \frac{1}{K} = \text{ct} \tag{7}$$

Câștigul este practic constant în banda în care (6) este adevărată.

De obicei $K < 1$, deoarece numai la atenuatoare se obține un câștig uniform (constant) în bandă - este vorba despre K acum - și deci $Q(\omega) > 1$. Uniformizarea câștigului $Q(\omega)$ în bandă implică $|H(\omega)| \gg \frac{1}{K} \approx Q(\omega)$ așa că pe cercul unității în buclă deschisă mult mai mare decât cel redat în buclă închisă.

2.3 Stabilizarea sistemelor instabile.

Unele sisteme sunt instabile. Polul unei rochete pe o traiectorie sau reacția nucleară din reactorul unei centrale nucleare sunt astfel de exemple. Pentru stabilizarea lor se poate recurge la includerea într-o buclă de reacție negativă

Vom considera, spre exemplu, sistemul având funcția $H(s)$ de forma :

$$H(s) = \frac{b}{s-a} \quad a > 0 \tag{8}$$

sistem instabil deoarece polul său, a , este în semiplanul drept.

Includând sistemul $H(s)$ într-o buclă, cu $G(s) = K$, pentru sistemul cu reacție avem:

$$Q(s) = \frac{H(s)}{1+KH(s)} = \frac{b}{s-(a-Kb)} \tag{9}$$

Polul sistemului cu reacție este $s_p = a - Kb$ și trece în semiplanul stâng, dacă:

$$Kb > a \tag{10}$$

Sistemul în buclă descrisă de mai sus, în condiția (10), este stabil. Un astfel de sistem, la care mărimea de reacție este proporțională cu mărimea de ieșire se numește **sistem cu reacție proporțională**.

Fie acum un alt doilea exemplu, ce se referă la un oscilator (cu poli simpli pe axa imaginară), sau la un sistem instabil de ordin doi:

$$H(s) = \frac{b}{s^2 + a} \tag{11}$$

Dacă $a > 0$, $s_{p1,2} = \pm j\sqrt{a}$ și avem un oscilator. Dacă

$a < 0$, $s_{p1,2} = \pm \sqrt{-a}$ și polul $\sqrt{-a}$ se află în semiplanul drept. În ambele cazuri sistemul este instabil. Ca și în primul exemplu, în cazul unei reacții proporționale se obține un sistem corect, în buclă închisă, are funcția sistem:

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + (a+Kb)} \tag{12}$$

unde am considerat

$$G(s) = K \tag{13}$$

Studiul sistemelor de ordinul doi a arătat că o funcție sistem de formă:

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \tag{14}$$

este stabil dacă $\omega_0 > 0$ și dacă $\xi > 0$, adică există atenuare.

Analizând comparativ (12) și (13) rezultă că nu putem influența prin reacția proporțională decât ω_0^2 dar nu putem introduce atenuare, deoarece $\xi = 0$. Nu vom putea deci stabiliza sistemul ^{numai} cu reacția proporțională. Dacă vom considera în plus în bucla de reacție, pe lângă componenta proporțională și o componentă derivativă, ne așteptăm la o comportare globală integrativă, pentru stabilitate. Fie deci:

$$G(s) = \underbrace{K_1}_{\text{Componenta "proporțională"}} + \underbrace{K_2 s}_{\text{Componenta "derivativă"}} \tag{15}$$

Se obține:

$$Q(s) = \frac{b}{s^2 + bK_2 s + (a + K_1 b)} \tag{16}$$

Sistemul în buclă închisă este stabil dacă:

$$a + K_1 b > 0 \quad \text{și} \quad bK_2 > 0 \tag{17}$$

Și în cazul sistemelor discrete instabile, reacția negativă poate conduce la stabilitate. Un exemplu de sistem instabil este cel al creșterii nerăzleșite a populației. Fie $y[n]$ numărul de indivizi ai unei populații în generația "n", și să presupunem că instabilitatea conduce, în lipsa oricărei influențe, la dublarea populației în generația următoare. În prezența unor influențe externe:

$$y[n] = 2y[n-1] + e[n] \tag{18}$$

unde $e[n]$ este un spor (sau o diminuare de populație (cauzată de imigrație) sau de unele influențe externe). Spre exemplu, prădările de brâu pot duce la descreșterea populației. De asemenea, pe măsură ce creșterea populației poate apărea și o creștere a adversarilor ei, care conduc la o diminuare de populație etc. Străduirea animalelor sau vinșorul lor, poate conduce la un spor de populație. Apoi deci, în realitate efecte de reacție. Fie că $e[n]$ se poate pune într-o formă:

$$e[n] = x[n] - v[n] \tag{19}$$

unde $v[n]$ sunt influențe populatiste descrise deja iar $x[n]$ încorporează efectele celorlalte cum ar fi: migrațiile, bolile, deșeurile p.a. Semnul minus este luat ca urmare a faptului de reacție negativă. Considerăm că diminuarea de populație este un procedeu β , din populația fiecărei generații, are că

$$y[n] = 2(1-\beta)y[n-1] + x[n] \tag{20}$$

Comparând (18), (19) și (20), rezultă că

$$I[n] = 2\beta y[n-1] \tag{21}$$

Factorul 2 arată că numărul noștrilor în generația următoare se diminuează cu dublul pierderilor dintr-o generație.

Se poate implementa sistemul cu reacție din figura 6. Din (18)

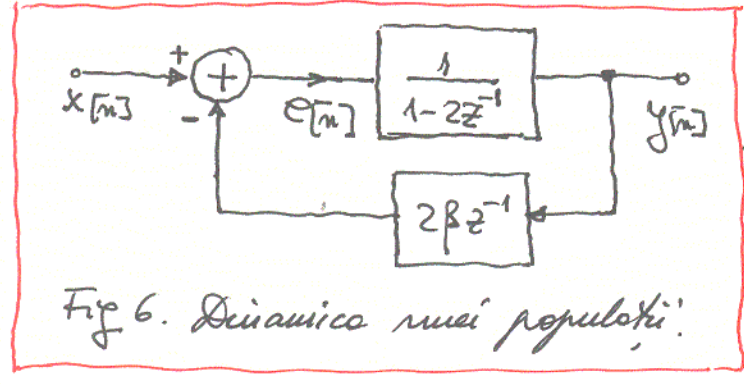


Fig 6. Dinamica unei populații.

$$H(z) = \frac{1}{1-zz^{-1}} \tag{22}$$

iar din (21)

$$G(z) = 2\beta z^{-1} \tag{23}$$

În consecință, pentru

sistemul în buclă închisă :

$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)} = \frac{1}{1 - 2(1-\beta)z^{-1}} \tag{24}$$

Polul sistemului este $z_p = 2(1-\beta)$. Stabilitatea se obține dacă

$|z_p| = 2(1-\beta) < 1 \quad ; \quad 0 < \beta < 1$
 sau $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Dacă $0 < \beta < \frac{1}{2}$ sistemul rămâne instabil.

2. 4. Sisteme cu urmărirea

Primum exemplu, cel ce se referă la poziționarea telescopului, descrie un sistem în care ieșirea "urmărește" intrarea. Dacă ne referim la un pilot automat, "intrarea" este comanda din partea directorului. Sistemul cu reacție acționează asupra cornelor, eleroanelor, motoarelor ș.a., astfel încât "ieșirea", drumul efectiv al avionului să fie identică cu cel impus prin "intrare".

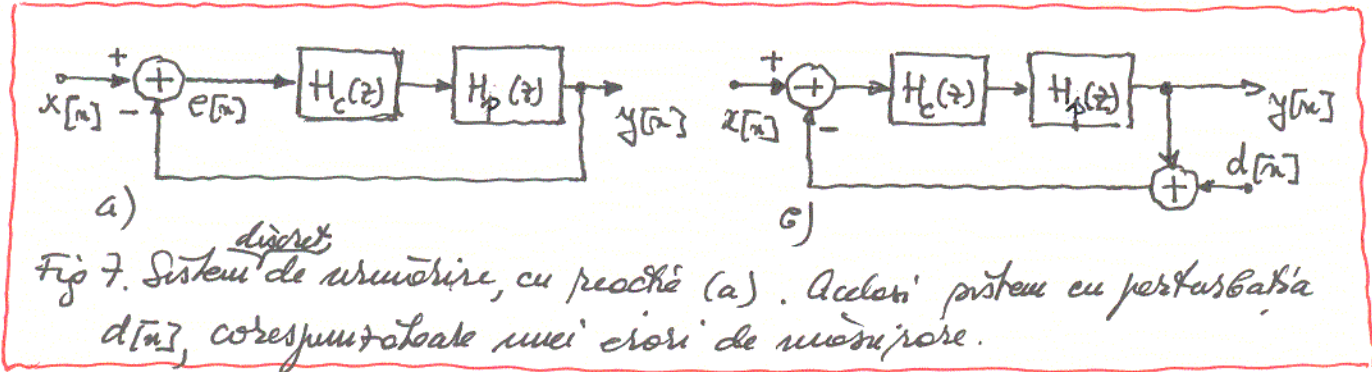


Fig 7. Sistem de urmărirea, cu reacție (a). Același sistem cu perturbarea $d[n]$, corespunzătoare unei erori de măsurare.

Dacă ne referim la Fig. 7a, $H_p(z)$ este funcția sistem a unui sistem de "automatizat" (plant), iar $H_c(z)$ este funcția sistem a unui "compensator". Fie $H(z) = H_c(z)H_p(z)$, ni' avem:

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1 + H(z)} X(z)$$

și deoarece $E(z)H(z) = Y(z)$, rezultă că avem:

$$E(z) = \frac{X(z)}{1 + H(z)} \tag{25}$$

Evaluând funcțiile pe cercul unitar, $z = e^{j\omega}$, obținem răspunsurile în frecvență, corespunzătoare:

$$E(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1 + H(e^{j\omega})} \tag{26}$$

O performanță de urmărirea bună înseamnă o eroare de urmărirea mică, $e[n] \approx 0$ sau $E(e^{j\omega}) \approx 0$. Aceasta înseamnă

$|H(e^{j\omega})|$ să fie de valoare foarte mare. Se poate deci spune

concluzia: performanțele de urmărire sunt pe deplin decât costigul global este foarte mare.

Costigurile nu pot fi ^{mult} prea mari însă deoarece pot apărea oscilații sau chiar instabilitatea sistemului.

Pentru a implementa un sistem de urmărire, trebuie să măsurăm valoarea ieșirii, $y[n]$, pentru a o compara cu valoarea intrării, $x[n]$. Cu orice dispozitiv de măsurare am lucra, vor apărea, inevitabil, erori care sunt modelate prin perturbarea $d[n]$ - vezi fig. 7.6. Referindu-ne la fig. 7.6 putem scrie:

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)} X(z) - \frac{H(z)}{1+H(z)} D(z) \quad (2F)$$

Pentru a nu avea influențe prea mari ale perturbației, $D(z)$, este bine ca $|H(e^{j\omega})|$ să fie mic. Aceasta înțelegem însă în contradicție cu condiția cerută pentru o urmărire bună. De aici se poate trage concluzia că $|H(e^{j\omega})|$ trebuie să fie foarte mare dar nu mult prea mare. Trebuie menționat că, de obicei, $|X(e^{j\omega})|$ este semnificativ la frecvențe joase iar $|D(e^{j\omega})|$ este semnificativ la frecvențe mari. De aceea $|H(e^{j\omega})|$ trebuie să fie foarte mare la frecvențele joase și cât mai mic la frecvențele înalte.

2.5. Instabilitate cauzată de reacție

Considerăm un sistem audio cu reacție, cum este cel prezentat în fig. 8.9. La microfon nu adăugăm numai sunetul vocal ce provine de la vorbitor ci și un sunet, neddit, de la difuzor. Apare astfel o buclă de reacție. Dacă feedback-ul este pozitiv, se produce întârzierea sunetului generat de difuzor, până la saturație. Modelul sistemului pentru cazul apariției instabilității este cel din fig. 8.6, unde K_1 este amplificarea iar K_2 ^(proprie zău) atenuează datorită propagării sunetului

lui prin aer. T este durata propagării sunetului de la difuzor la microfon. În fig. 8c schema este redeseșată pentru cazul

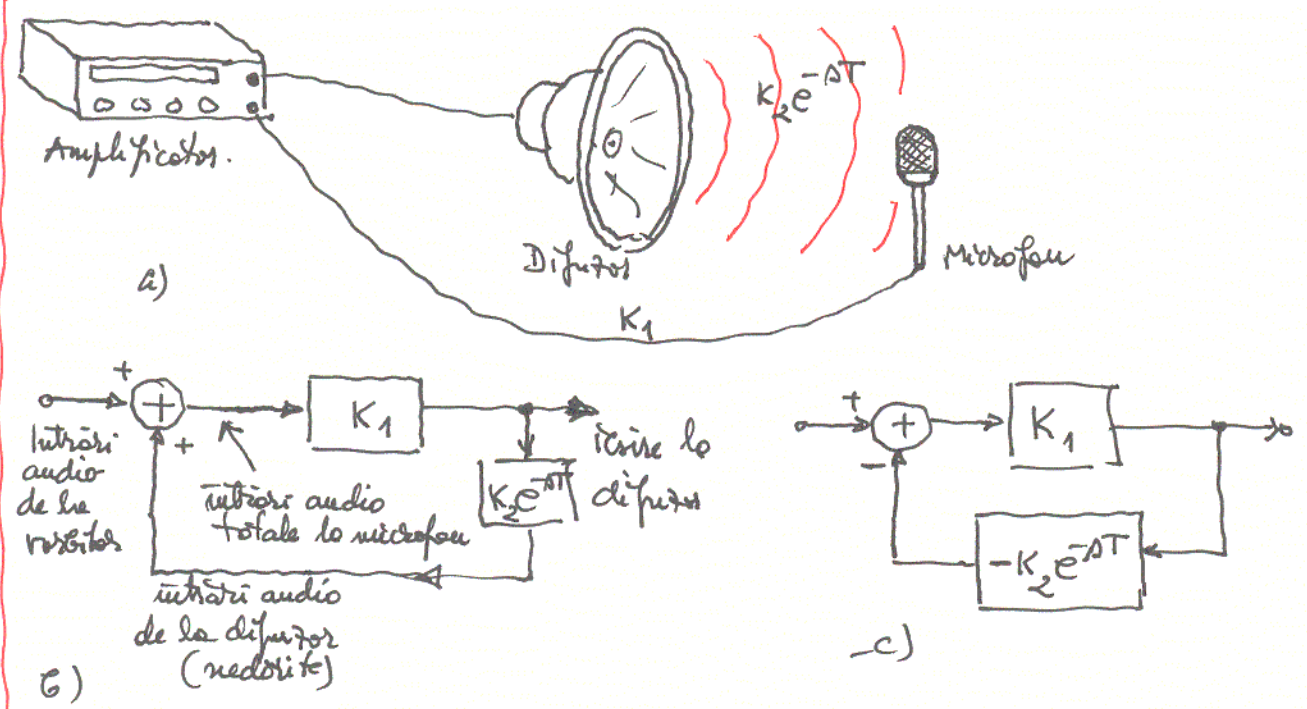


Fig 8. Sistem instabil, ca urmare a unei reacții pozitive (nedorite) a) Schema bloc a sistemului b) . Schema sistemului ca sistem cu reacție negativă c).

în care reacția, pozitivă în fond, este considerată ca reacție negativă. Rezultă :

$$Q(s) = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2 e^{-sT}} \tag{28}$$

Dacă produsul $K_1 K_2$ este supraunitar:

$$K_1 K_2 > 1 \tag{29}$$

sistemul devine instabil. Pe măsură ce distanța dintre difuzor și microfon crește, atenuarea datorată aerului crește și deci K_2 scade, sistemul putând astfel să devină stabil.

3. Analiza stabilității sistemelor cu reacție prin metodele locului rădăcinilor

Asa cum am vădit din cetera exemple anterioare, există probleme în cadrul nichisă în care există un câștig reglabil, K , constant în raport cu frecvența. Sunt de interes în a determina

stabilității în buclă închisă
 minăm cum se mișcă poli în planul complex, ce urmare a modificării câștigului. Poziția polilor sistemului cu reacție ne va da informații cu privire la robustețea adușe ale câștigului K pentru ce sistemul în buclă închisă să rămână stabil.

Vom descrie o metodă pentru examinarea locului rădăcinilor - poli ai sistemului - în planul complex, ce funcții de câștig reglabil, numit și "metoda locului rădăcinilor".

Metoda presupune doar faptul că sistemele în buclă închisă au $Q(s)$ sau $Q(z)$ funcții raționale în s , respectiv z .

3.1 Un exemplu introductiv

Vom lua exemplul privind sistemul discret cu reacție ce modelizează creșterea de populație. Am stabilit că :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}} = \frac{z}{z - 2} \tag{30}$$

$$G(z) = 2\beta z^{-1} = \frac{2\beta}{z} \tag{31}$$

unde β este un "câștig" reglabil. Se poate determina $Q(z)$ pentru sistemul în buclă închisă ce fiind :

$$Q(z) = \frac{1}{1 - 2(1-\beta)z^{-1}} = \frac{z}{z - 2(1-\beta)} \tag{32}$$

Rezultă imediat că polul este plasat în punctul $z = 2(1-\beta)$.

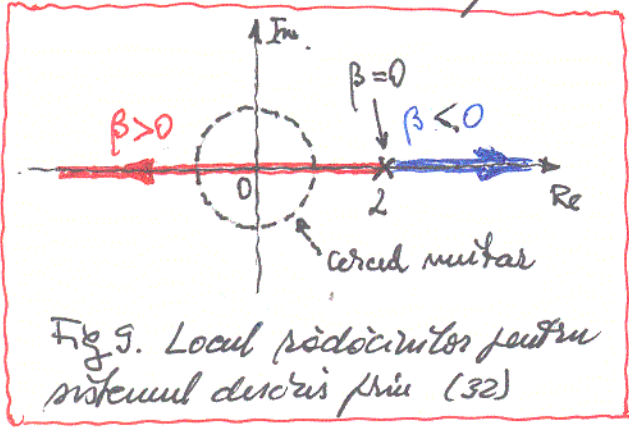


Fig. 9. Locul rădăcinilor pentru sistemul discret prin (32)

În fig 9 se arată locul geometric al polului pentru diferite valori β .

Se vede că polul este în interiorul cercului unitar :

$$-1 < 2(1-\beta) < 1$$

pentru $\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$. În acest caz

sistemul este stabil. Pentru celelalte valori β , sistemul e instabil.

Fie acum un sistem în timp continuu, pentru care

$$H(s) = \frac{1}{s-2} \tag{33}$$

$$G(s) = \frac{2\beta}{s} \tag{34}$$

β fiind un câștig reglabil. Se calculează $Q(s)$:

$$Q(s) = \frac{A}{A - 2(1-\beta)} \tag{35}$$

acestei formulă ce nu sîm înainte. În planul complex locul polului este același doar condiția de stabilitate e alta: $2(1-\beta) < 0$ sau $\beta > 1$.

3.2 Ecuația polilor unui sistem în buclă închisă.

În exemplul din §3.1 poziția polului a fost ușor de trasat, deoarece expresia polului a putut fi stabilită și așa și simplu. Pentru sisteme complexe nu ne putem aștepta la astfel de soluții facile. Este însă posibil să se prezinte, destul de exact, locul geometric al polilor, fără a se rezolva expresia polilor. Vom dezvolta metoda pentru transformata Laplace, deși ea este aplicabilă, fără modificări, pentru transformata Z. Numai condiția de stabilitate se schimbă, nu și metoda de trasare a locului geometric al polilor.

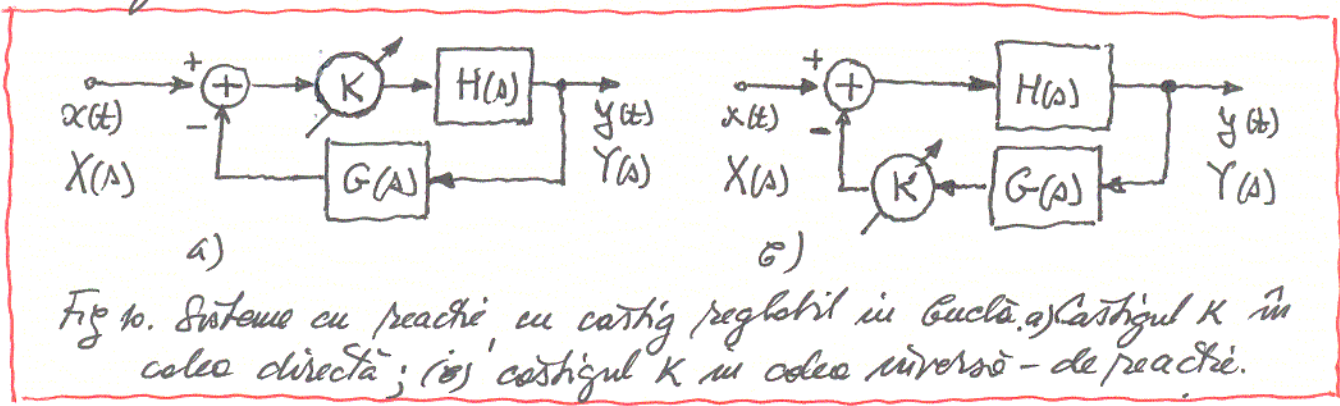


Fig 10. Sisteme cu reacție cu câștig reglabil în buclă. (a) Câștigul K în calea directă; (b) câștigul K în calea inversă - de reacție.

Considerăm o structură de sistem cu un câștig reglabil, K , plasat fie în calea directă (fig 10.a) fie în calea de reacție (fig 10.b). În ambele cazuri numitorul câștigului în buclă închisă este același, și anume $1 + KG(s)H(s)$. Ecuația care dă poli sistemului în buclă închisă este deci:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \tag{36}$$

sau:

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \tag{37}$$

Tehnica de trasare a locului rădăcinilor (polilor) se bazează pe proprietățile acestei ecuații.

3.2.1 Punctele de coperț ale locului rădăcinilor: poli nite-
mului în buclă închisă pentru $K=0$ și $|K|=\infty$

Dei (37), pentru $K \rightarrow 0$ rezultă $\sqrt[n]{G(s)H(s)} \rightarrow \pm \infty$, adică soluția ecuației este dată chiar de poli produsului $G(s)H(s)$. Pentru exemplul considerat

$$\frac{2}{s-2} = -\frac{1}{s} \quad (\beta \triangleq K) \quad (38)$$

și deci pentru $\beta=0$ rezultă $s=2$, caace corespunde cu fig. 9.

Presupunem acum că avem $K \rightarrow \pm \infty$ și deci $1/K \rightarrow 0$, adică soluția ecuației este dată chiar de zerourile produsului $G(s)H(s)$. Dacă gradul numărătorului produsului $G(s)H(s)$ este mai mic decât al numitorului său, există zerouri și la infinit, cum e cazul în exemplul considerat.

3.2.2 Criteriul unghiului (argumentului).

Căștigul K este real și deci s_0 poate fi un pol al sistemului în buclă închisă, adică s_0 poate fi un punct de pe locul rădăcinilor dacă $G(s_0)H(s_0)$ este o cantitate reală. Altfel sigur nu e punct al locului. Avem:

$$G(s_0)H(s_0) = |G(s_0)H(s_0)| e^{j \text{Arg} \{G(s_0)H(s_0)\}} \in \mathbb{R} \quad (39)$$

și deci e necesar ca

$$e^{j \text{Arg} \{G(s_0)H(s_0)\}} = \pm 1$$

sau:

$$\text{Arg} \{G(s_0)H(s_0)\} = \text{un multiplu întreg al lui } \pi \quad (40)$$

Relația (40) este "criteriul unghiului" sau "criteriul argumentului". Ea ne oferă o metodă directă de a preciza dacă un punct s_0 **ar putea fi** pol al sistemului în buclă închisă pentru o valoare oarecare a lui K . Există și o modalitate de calcul a valorii K corespunzând oricărui punct al locului rădăcinilor. Fie că

$$\text{Arg} \{G(s_0)H(s_0)\} = \text{un multiplu impar al lui } \pi \quad (41)$$

și atunci $e^{j \text{Arg} \{G(s_0)H(s_0)\}} = -1$. Din (39) se deduce că într-un astfel de punct:

$$G(s_0)H(s_0) = -|G(s_0)H(s_0)| \quad (42)$$

Satisfind (42) in (37) găsiri că, dacă :

$$K = \frac{1}{|G(\lambda_0)H(\lambda_0)|} \tag{43}$$

atunci ρ_0 este o soluție a ecuației (37) și deci este un pol al sistemului în buclă închisă.

În mod asemănător, dacă ρ_0 satisface condiția :

$$\text{Arg} \{G(\lambda_0)H(\lambda_0)\} = \text{un multiplu impar al lui } \pi \tag{44}$$

atunci :

$$G(\lambda_0)H(\lambda_0) = -|G(\lambda_0)H(\lambda_0)| \tag{45}$$

În consecință, dacă :

$$K = -\frac{1}{|G(\lambda_0)H(\lambda_0)|} \tag{46}$$

atunci ρ_0 este o soluție a ecuației (37) și deci este un pol al sistemului în buclă închisă.

În exemplul considerat, pentru $\rho_0 < 2$

$$\text{Arg} \left\{ \frac{2}{\rho_0 - 2} \right\} = -\pi$$

și din (43) rezultă că valoarea lui β pentru care ρ_0 este polul sistemului în buclă închisă este dată de :

$$\beta = \frac{1}{\left| \frac{2}{\rho_0 - 2} \right|} = \frac{2 - \rho_0}{2}$$

sau :

$$\rho_0 = 2(1 - \beta)$$

care este conformă cu (35)

Recapitulând cele două observații pe care le-am făcut, se vede că locul rădăcinilor unui sistem în buclă închisă, adică punctele din planul β care sunt poli ai sistemului închisă pentru anumite valori K ce variază între $-\infty$ și ∞ , sunt acele puncte care pot să satisfacă criteriul unghiului, (40):

①. Un punct ρ_0 pentru care

$$\text{Arg} \{G(\lambda_0)H(\lambda_0)\} = \text{un multiplu impar al lui } \pi \tag{47}$$

este pe locul rădăcinilor, pentru o valoare $K > 0$. Valoarea câștigului care corespunde lui ρ_0 este dată de ecuația (43)

②. Un punct ρ_0 pentru care

$$\text{Arg} \{G(\lambda_0)H(\lambda_0)\} = \text{un multiplu par al lui } \pi \tag{48}$$

este pe locul rădăcinilor, pentru o valoare $K < 0$. Valoarea câști-

gului care corespunde lui p_0 este dat de ecuația (46).

Problema determinării locului rădăcinilor se reduce la problema determinării punctelor care satisfac condițiile criteriului unghiului, ecuațiile (47) și (48). Din aceste două ecuații se pot deduce o serie de proprietăți care pot ajuta la schițarea locului rădăcinilor. Vom considera, pentru început un exemplu simplu.

Fie :

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \quad , \quad G(s) = \frac{1}{s+2} \tag{49}$$

În fig. 11 se prezintă polii produsului $H(s)G(s)$ precum și procedura geometrică de evaluare a unghiului. Cu θ și ϕ s-au notat unghiurile formate de segmentele ce unesc punctul p_0 cu fiecare pol.

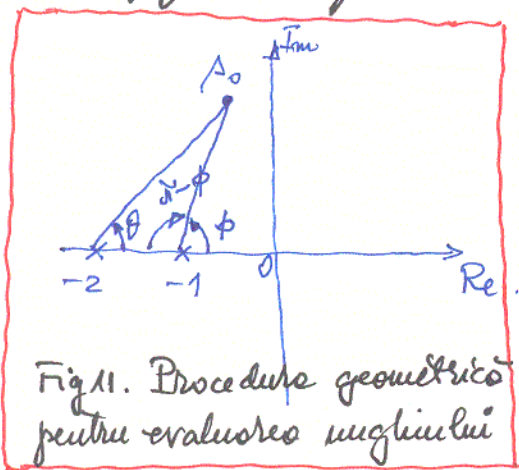


Fig. 11. Procedura geometrică pentru evaluarea unghiului

Dacă $p_0 \in \mathbb{R}$ și $p_0 > -1$, atunci $\theta = 0$ și $\phi = 0$ și deci

$$\text{Arg}\{G(p_0)H(p_0)\} = 0 = 0 \cdot \pi ; \quad p_0 \in \mathbb{R}, p_0 > -1$$

Din (48) rezultă că aceste puncte corespund unor valori K negative : $K < 0$. Pentru $p_0 \in \mathbb{R}$, $-2 < p_0 < -1$, $\theta = 0$ și $\phi = \pi$ așa că :

$$\text{Arg}\{G(p_0)H(p_0)\} = -\pi ; \quad p_0 \in \mathbb{R}, -2 < p_0 < -1.$$

și sunt puncte ce corespund valorilor $K > 0$. În final, pentru $p_0 \in \mathbb{R}$ și $p_0 < -2$, avem $\theta = \pi$ și $\phi = \pi$, unghiul fiind -2π .

Punctele $p_0 < -2$ corespund unor valori $K < 0$.

Vom examina acum puncte din planul s , ce nu sunt pe axa reală. Se știe că :

$$\text{Arg}\{G(p_0)H(p_0)\} = -(\theta + \phi)$$

În semiplanul $\omega > 0$, $0 < \theta < \pi$, și $0 < \phi < \pi$ așa că

$$-2\pi < \text{Arg}\{G(p_0)H(p_0)\} < 0$$

Rezultă imediat că în semiplanul $\omega > 0$ unghiul nu poate fi înmulțit cu un număr par de π , așa că nu avem puncte ale

locului pentru $K < 0$. Putem avea însă $K > 0$;

$$\text{Arg} \{G(s)H(s)\} = -(\theta + \phi) = -\bar{\sigma}$$

sau

$$\theta = \bar{\sigma} - \phi$$

ceea ce se întâmplă pe mediatoarea segmentului ce unește poli

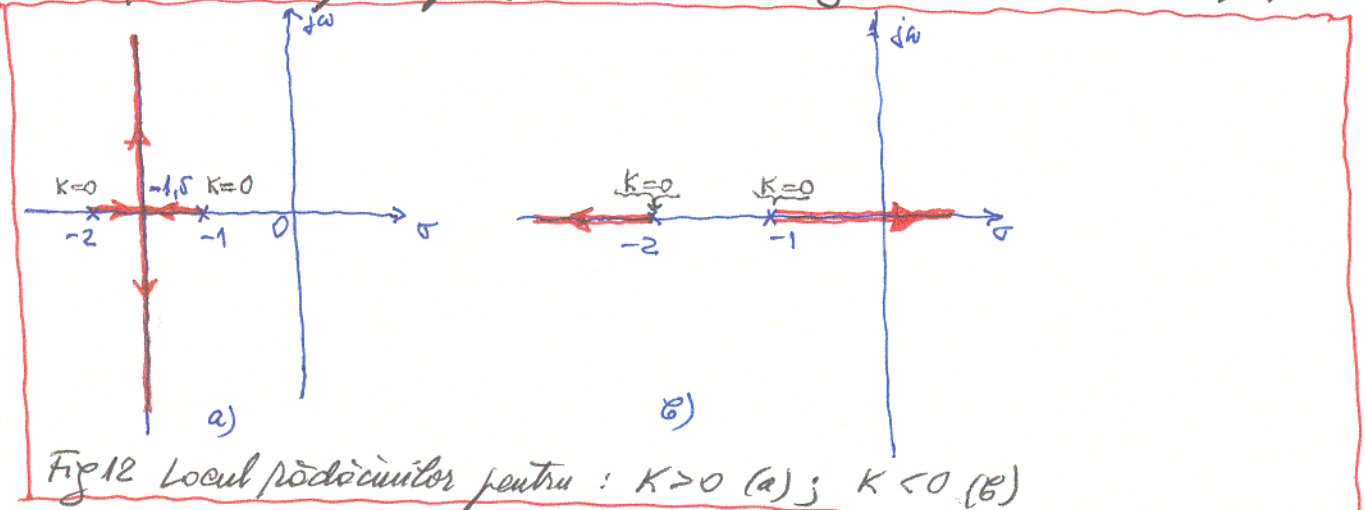


Fig.12 Locul rădăcinilor pentru : $K > 0$ (a); $K < 0$ (b)

asa cum se arata in fig 12.a. O concluzie pînă la ora se poate trage în pentru semiplanul $\omega < 0$, locul fiind tot mediatoarea segmentului și corespunde tot unor valori $K > 0$. Vom presupune faptul că punctele poli -1 și -2 corespund valorii $K = 0$ și că pentru $K < 0$ este valabil locul din fig 12.b. Analizând figura 12 se vede că pentru orice $K > 0$ stabilitatea este asigurată în timp ce pentru $K < 0$ există riscul de instabilitate.

3.2.3 Proprietăți ale locului rădăcinilor.

Vom presupune că $G(s)H(s)$ are forma :

$$G(s)H(s) = \frac{\prod_{k=1}^m (s - \beta_k)}{\prod_{k=1}^n (s - \alpha_k)} ; \quad m \leq n \tag{50}$$

și că, dacă există un coeficient nenul în fața lui s de precizie acesta se include, prin produs, în K , așa cum se arată în exemplul următor :

$$K G(s)H(s) = K \frac{2s + 1}{3s^2 + 5s + 2} = \frac{2}{3} K \frac{s + \frac{1}{2}}{s^2 + \frac{5}{3}s + \frac{2}{3}}$$

Cantitatea $\frac{2}{3} K$ este purtătoare și noul câștig ceea ce nu aduce după sine mari complicații.

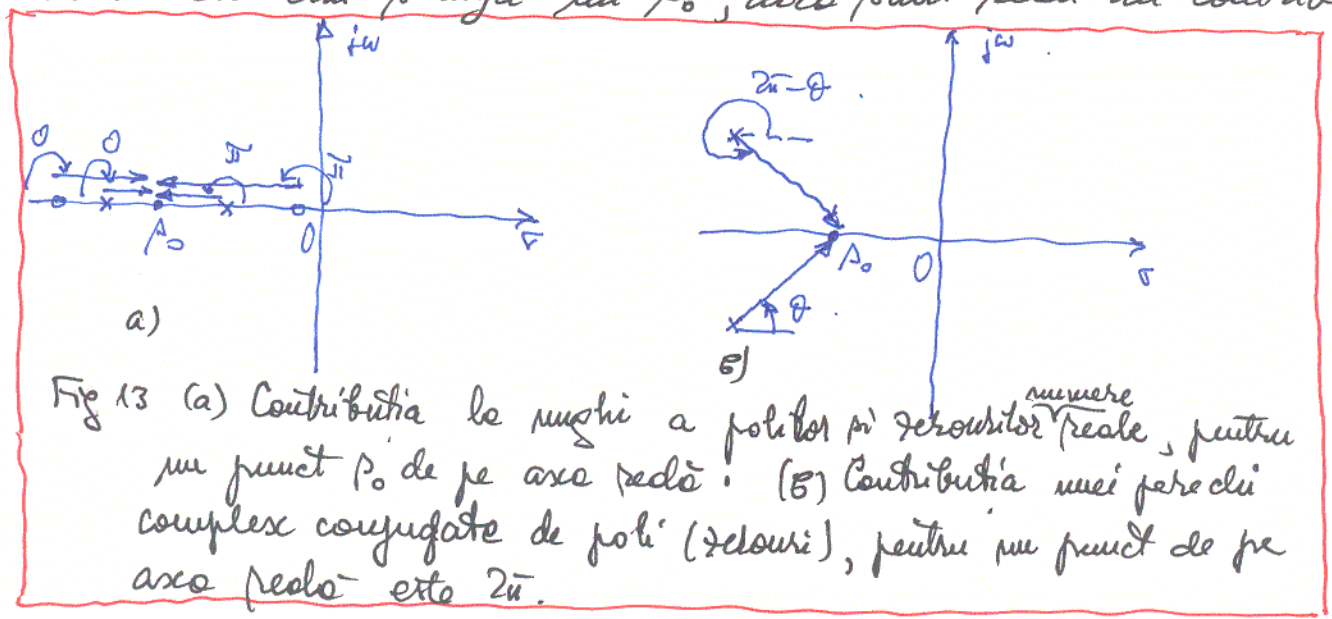
Se pot deduce următoarele proprietăți:

Proprietatea 1-a Pentru $K=0$ soluția ecuației (37) sunt poli produsului $G(s)H(s)$. Cum există n poli, există n ramuri ale locului rădăcinilor, fiecare pornind pentru $K=0$, dintr-un pol al produsului $G(s)H(s)$.

Proprietatea 2-a Pe măsură ce $|K| \rightarrow \infty$, fiecare ramură a locului rădăcinilor se apropie de un zero al produsului $G(s)H(s)$. Cum avem m zerouri, m -u ramuri ale locului rădăcinilor merg spre infinit. (deoarece tot atâtea zerouri se află la infinit)

Proprietatea 3-a Partile din axe reale care sunt plonate în stânga unui număr impar de poli și zerouri, reale, ai produsului $G(s)H(s)$ sunt ale locului rădăcinilor, pentru $K > 0$. Partile din axe reale care sunt plonate în stânga unui număr par (probabil nul) de poli și zerouri, numere reale, ai produsului $G(s)H(s)$ sunt ale locului rădăcinilor pentru $K < 0$.

Explicația este simplă. Poli sau zerourile din dreapta punctului P_0 contribuie cu câte π radiani la unghiul produsului. Poli din stânga lui P_0 , dacă sunt reali au contribu-



ția multă în unghi. Din urmare dacă în dreapta lui $P_0 \in R$ există un număr impar de poli și zerouri, unghiul va fi un multiplu impar al lui π . Dacă poli și zerourile

sunt în număr par, numărul va fi un număr par al lui $\bar{\sigma}$.

Din fig 13 b se vede că poli sau zerourile ce nu au partea imaginară nulă, și care apar în perechi complexe conjugate, au o contribuție de 2σ în număr. Aceasta nu modifică paritatea sau imparitatea numărului de σ datoră de poli sau zerourile axei reale.

Considerăm un segment al axei reale pe care se află doi poli ai produsului $G(s)H(s)$, poli între care nu este plasat nici un zero. Conform proprietății 3 segmentul de axă este al locului iar conform proprietății 1 locul în are începutul (pentru $K=0$) în poli. Prin urmare, în cei doi poli încep două ramuri ce merg una spre alta și care, pe măsură ce $|K| \rightarrow \infty$ merg spre un punct de la infinit. Are cum se vede și din fig 12 a, la un moment dat, pentru o valoare K ramurile se întâlnesc și apoi prădăsc axa reală.

Proprietatea 4-a. Ramurile de pe axa reală ale locului rădăcinilor, aflate între două zerouri consecutive sau între doi poli reali consecutivi, se divid în planul complex. Punctele de diviziune (sau de ramificație) au abscisele date de ecuația:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma - \alpha_k} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sigma - \beta_k} = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R} \tag{57}$$

Proprietatea 5-a Locul rădăcinilor este simetric față de axa reală

Această proprietate este evidentă deoarece ecuația (37) are coeficienți reali și deci rădăcinile apar în perechi complexe conjugate, simetric în raport cu axa reală.

Proprietatea 6-a. Asimptotele celor $m-n$ ramuri ale locului rădăcinilor ce ajung la infinit pentru $|K| \rightarrow \infty$ se intersectează toate într-un punct al axei reale

având abscisa (numită și "centrul de greutate"),

$$\sigma_{cg} = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k - \sum_{k=1}^m \beta_k \right) ; \quad n > m \quad (52)$$

Dirjecțiile celor $n-m$ asimptote sunt date de unghiurile

$$\theta_k = \frac{2k+1}{n-m} \pi ; \quad n > m \quad \text{și} \quad k = 0, 1, \dots, (n-m-1) \quad (53)$$

Proprietatea 7-a. Dintre-un pol real al produsului $G(s)H(s)$, cu ordinul de multiplicitate n_p pleacă n_p ramuri ale locului rădăcilor. Unghiul dintre două ramuri alăturate este $2\pi/n_p$. Dintre-un zero real, al produsului $G(s)H(s)$, cu ordinul de multiplicitate m_z ajung m_z ramuri ale locului rădăcilor. Unghiul dintre două ramuri alăturate este $2\pi/m_z$.

Proprietatea 8-a. Dintre-un pol complex α_i , cu ordinul de multiplicitate m_i pleacă m_i ramuri ale locului rădăcilor, sub unghiurile:

$$\theta_{il} = \frac{1}{m_i} \left[\sum_{k=1}^{m_i} \text{Arg}(\alpha_i - \beta_k) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m_i} \text{Arg}(\alpha_i - \alpha_k) - (2l+1)\pi \right] \quad (54)$$

$$l = 0, 1, \dots, (m_i-1)$$

Dintre-un zero complex β_i , cu ordinul de multiplicitate m_i , ajung m_i ramuri ale locului rădăcilor, sub unghiurile:

$$\theta_{il} = \frac{1}{m_i} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m_i} \text{Arg}(\beta_i - \beta_k) - \sum_{k=1}^{m_i} \text{Arg}(\beta_i - \alpha_k) - (2l+1)\pi \right] \quad (55)$$

$$l = 0, 1, \dots, (m_i-1)$$

Proprietatea 9-a. Dacă într-un punct de ramificație ajung r ramuri ale locului rădăcilor și pleacă din el r ramuri (și totuși $2r$ ramuri), atunci unghiul dintre două ramuri este π/r .

Proprietate 10-a. Dacă $G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$, atunci punctele de intersecție ale locului rădăcimilor cu axa imaginară precum și valorile K corespunzătoare, se obțin rezolvând ecuația:

$$N(j\omega) + KM(j\omega) = 0, \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{56}$$

în care necunoscutele sunt ω și K

Exemple.

1. Considerăm că $G(s)H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$ având constanta de

poli și zerouri din figura 14. Între -1 și 1 există un pol

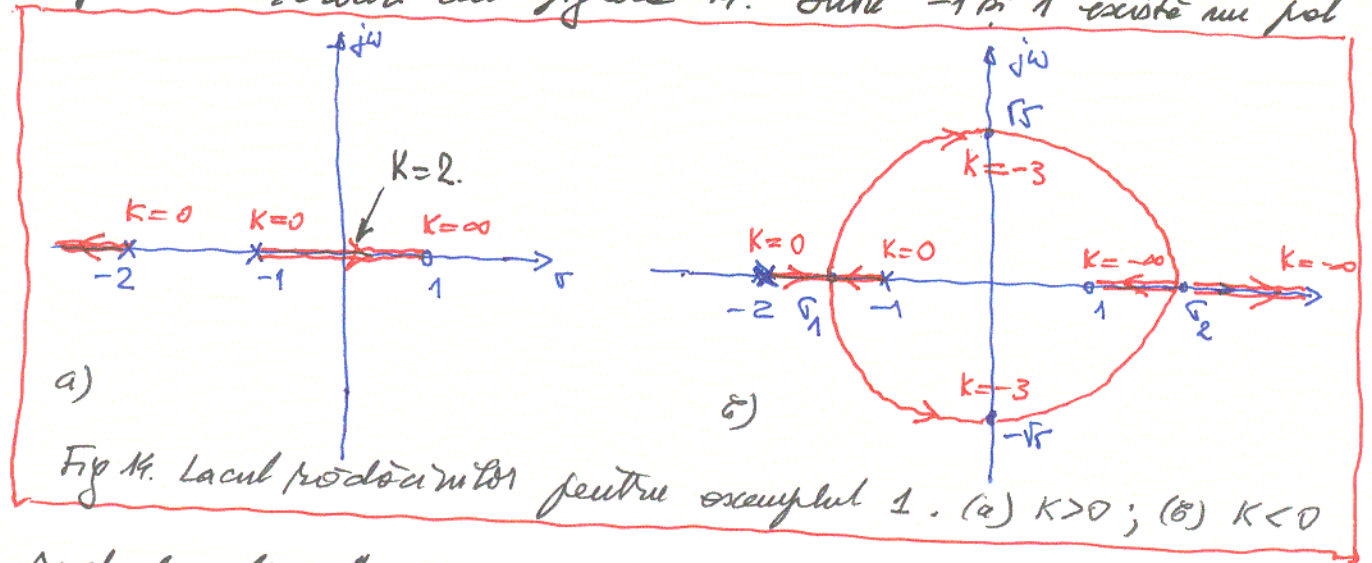


Fig. 14. Locul rădăcimilor pentru exemplul 1. (a) $K > 0$; (b) $K < 0$

real la dreapta, deci $K > 0$; segmentul corespunde unei ramuri ce începe în -1 (pol), cu $K=0$ și se termină în 1 , cu $K=\infty$. Segmentul din stânga polului -2 este și el al locului, cu $K > 0$, deoarece există 3 puncte în dreapta sa (doi poli și un zero). Originea ramurii e în pol și ea merge spre ∞ , deoarece $n - m = 2 - 1 = 1$.

Segmentul, $\sigma > 1$ nu are în dreapta sa nici un punct deci aparține locului, cu $K < 0$. Segmentul $-2 < \sigma < -1$ este al locului, $K < 0$, dar există un punct de ramificare. Conform cu (51) abscisa de ramificare este:

$$\left(\frac{1}{\sigma+1} + \frac{1}{\sigma+2} \right) - \frac{1}{\sigma-1} = 0$$

sau $\sigma^2 - 2\sigma - 5 = 0$, cu rădăcimile $\sigma_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$

Un punct este $\sigma_1 \cong -1,45$ iar altul $\sigma_2 \cong 3,45$. Ambele puncte sunt plasate in fig 14 a. Intersecțiile cu axa imaginară sunt date rezolvând (56):

$$(j\omega+1)(j\omega+2) + K(j\omega-1) = 0 \Rightarrow j\omega(K+3) + 2 - K - \omega^2 = 0$$

sau

$$\begin{cases} \omega(K+3) = 0 & \omega = 0 & K = -3 \\ 2 - K - \omega^2 = 0 & \Downarrow & \Downarrow \\ & K = 2 & \omega = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Intersecția $\omega=0$ $K=2$ are loc pentru ramura din figura 14 a și deci, pentru $K > 0$ stabilitatea se obține dacă avem $0 < K < 2$.

Intersecția $\omega = \pm\sqrt{5}$ și $K = -3$ este plasată în figura 14 b. Se vede că stabilitatea, pentru $K < 0$, în jurul $-3 < K < 0$. În concluzie, stabilitatea este asigurată pentru $K \in (-3, 0) \cup (0, 2)$.

2) Fie $G(z)H(z) = \frac{z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{z}{(z-\frac{1}{2})(z-\frac{1}{4})}$

Caracteristica de poli și zerouri este cea din figura 15.

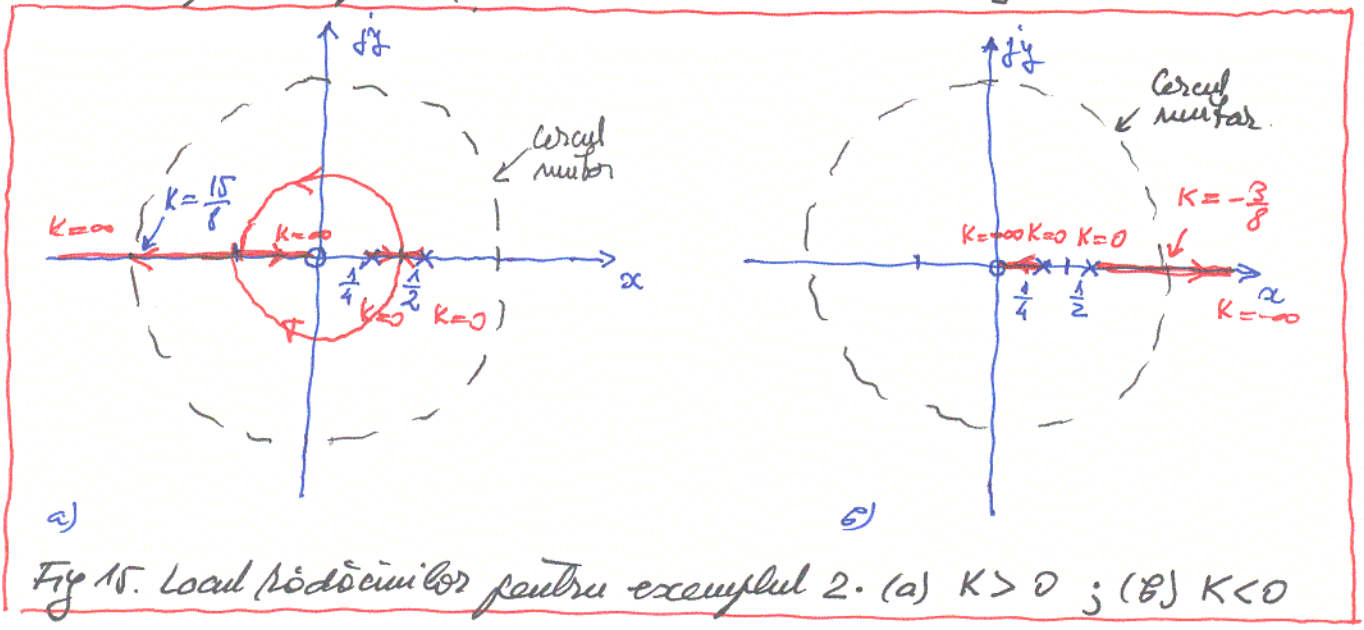


Fig 15. Locul rădăcinilor pentru exemplul 2. (a) $K > 0$; (b) $K < 0$

Pentru $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2} \Rightarrow K > 0$, cu punct de ramură între.

Pentru $\alpha < 0 \Rightarrow K > 0$

Ecuația algebră de ramură rezultă aplicând (57):

$$\frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \frac{1}{x - \frac{1}{4}} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx \pm 0,35$$

Punctele de ramificare apar în figura 15a. Intersecțiile cu axa imaginară se obțin rezolvând (56)

$$(j\gamma - \frac{1}{2})(j\gamma - \frac{1}{4}) + K j\gamma = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} - \gamma^2 - j\gamma(\frac{3}{4} - K) = 0$$

de unde $\gamma = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$ și $K = \frac{3}{4}$. Prin urmare curba ce trece prin punctele de ramificare este un cerc, de rază $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Cât timp poli sunt în interiorul cercului unitar, sistemul este stabil.

Ecuația (56) se modifică în:

$$M(e^{j\omega}) + KN(e^{j\omega}) = 0 \tag{56'}$$

$$(e^{j\omega} - \frac{1}{2})(e^{j\omega} - \frac{1}{4}) + Ke^{j\omega} = 0$$

cu $e^{j\omega} = -1$ Rezultă $K = \frac{15}{8}$. Pentru $0 < K < \frac{15}{8}$ stabilitatea sistemului este asigurată.

Segmentul $x > \frac{1}{2}$ corespunde unor valori $K < 0$, ca în peșorul $0 < x < \frac{1}{4}$, așa cum se arată și în fig. 15b. Intersecția cu cercul unitar se obține rezolvând (56') cu $e^{j\omega} = 1$. Rezultă

$K = -\frac{3}{8}$. Prin urmare, sistemul este stabil pentru valorile $-\frac{3}{8} < K < 0$. În general, sistemul este stabil pentru

$$K \in (-\frac{3}{8}, 0) \cup (0, \frac{15}{8}).$$

3) Fie $G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$, poli fiind cei doi

fig. 6, construite numai pentru $K > 0$. Punctul de ramificare are ecuația:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+4} = 0$$

cu rădăcinile $\sigma_1 \approx -3,15$ și $\sigma_2 \approx -0,85$, dos numai soluția $-0,85$ cade în domeniul $K > 0$.

Cum $n-m=3$ trebuie să determinăm centrul de greutate al asimptotelor cu relația (52):

$$\sigma_{cg} = \frac{1}{3} (-2 - 4) = -2$$

Conform cu (53) unghiurile asimptotelor sunt:

$$\theta_k = \frac{2k+1}{3}\pi ; \theta_0 = \frac{\pi}{3}, \theta_1 = \pi, \theta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

Intersecțiile cu axa imaginară se determină cu (56):

$$j\omega(j\omega+2)(j\omega+4) + K = 0 \Rightarrow K - 6\omega^2 + j\omega(8-\omega^2) = 0.$$

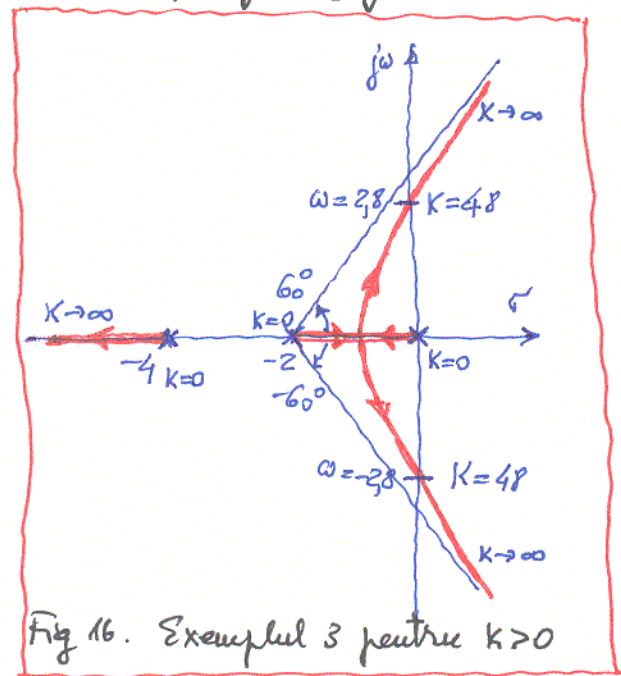


Fig 16. Exemplul 3 pentru $K > 0$

Rezultă $\omega = \sqrt{8} \approx 2,8$ și $\omega = 0$

și $K = 6 \cdot 8 = 48$ și $K = 0$ respectiv.

În concluzie, dacă considerăm numai valorile pozitive pentru K stabilitatea este asigurată pentru

$$K \in (0, 48)$$

4. Criteriul de stabilitate al lui Nyquist.

Determinarea locului rădăcinilor implică cunoașterea expresiei analitice a produsului GH. Mai mult, acesta trebuie să fie de forma unei fracții raționale în s sau z . Locul rădăcinilor nu este o metodă aplicabilă dacă avem date experimentale, sub forma unor curbe amplificări-frecvență și fază-frecvență. Vom dezvoltă, în acest paragraf, o altă metodă de studiu al stabilității sistemelor în buclă închisă (cu reacție) și care depinde de un parametru de costig, ajustabil (reglobit). Această metodă, cunoscută sub numele de criteriul de stabilitate al lui Nyquist diferă de metoda locului rădăcinilor prin două aspecte esențiale: i) Spre deosebire de metoda locului rădăcinilor, criteriul lui Nyquist

nu oferă informații detaliate privind localizarea polilor sistemului în buclă închisă ca o funcție de câștigul variabil K , ci pentru o valoare K specifică (dar în principiu oricare) ne spune dacă sistemul în buclă închisă este stabil sau nu.

ii) Criteriul lui Nyquist poate fi aplicat în cazul unor expresii analitice ale produsului $G H$ ce nu sunt fracții raționale n^o , ceea ce este n^o mai important, în situații în care nu există descrieri analitice pentru celelalte n^o sau cele de pechete, dar există determinări experimentale privind răspunsurile în frecvență. Această din urmă ipoteză presupune stabilitatea căii directe n^o a căii de pechete, în buclă deschisă, deoarece altfel nu pot fi determinate corectipășățile de frecvență.

Dacă ne referim la sisteme de tipul celor din figura 10, poli sistemului în buclă deschisă sunt dați de soluțiile ecuațiilor:

$$1 + K G(s) H(s) = 0 \quad \text{în timp continuu} \quad (57)$$

respectiv:

$$1 + K G(z) H(z) = 0 \quad \text{în timp discret} \quad (58)$$

Pentru sistemele în timp continuu dorim să putem spune dacă vreuna dintre soluțiile ecuației (57) - pol al sistemului în buclă închisă - cade în semiplanul drept, $\sigma > 0$ (ceea ce ar atrage instabilitatea sistemului cu pechete). În cazul sistemelor în timp discret dorim să putem spune dacă vreuna dintre soluțiile ecuației (58) are modulul mai mare decât una pentru o valoare dată a câștigului K , lucru care ar atrage instabilitatea sistemului în timp discret.

4.1 Criteriul variației argumentului

Vom considera o variabilă complexă p , care poate fi sau variabile s sau variabile z n^o pe $W(p)$ o funcție de tip fracție rațională, caracterizată de poli n^o zerourile ei. Pentru precizarea ideilor fie că $W(p)$ are două zerouri n^o nici un

pol n' fi o curbă închisă C, care înconjoară numai unul din-
tre zerouri, așa cum se arată în figura 17a. Se evaluează $W(p)$ atunci

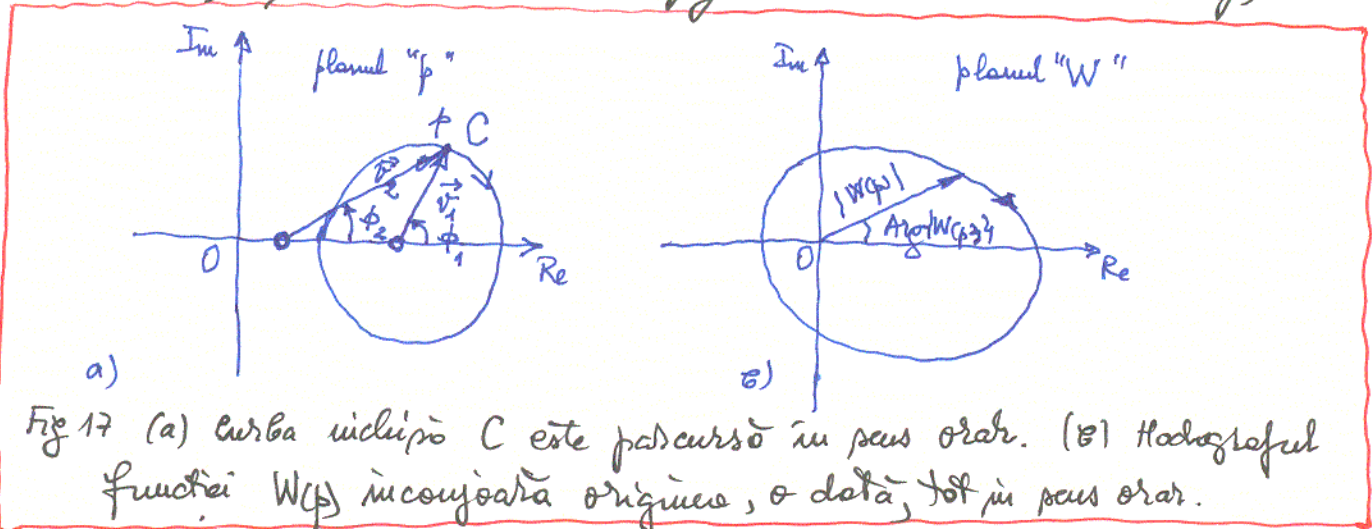


Fig 17 (a) Curba închisă C este parcursă în sens orar. (b) Hodograful
funcției $W(p)$ înconjoară originea, o dată, tot în sens orar.

când p parcurge curba C în sens orar și se obține hodograful
dun figure 17b. Avem:

$$Arg\{W(p)\} = \phi_1 + \phi_2$$

și variația de argument atunci când se parcurge C este

$$\Delta Arg\{W(p)\} = \Delta \phi_1 + \Delta \phi_2$$

dar $\Delta \phi_2 = 0$, când parcurgem C, în timp ce $\Delta \phi_1 = -2\pi$. Rezultă
că:

$$\Delta Arg\{W(p)\} = -2\pi$$

sau că hodograful funcției $W(p)$ înconjoară originea o dată,
în sens orar - veți și fig. 17b.

Dacă am considera acum nu cot cu doi poli, unul interior

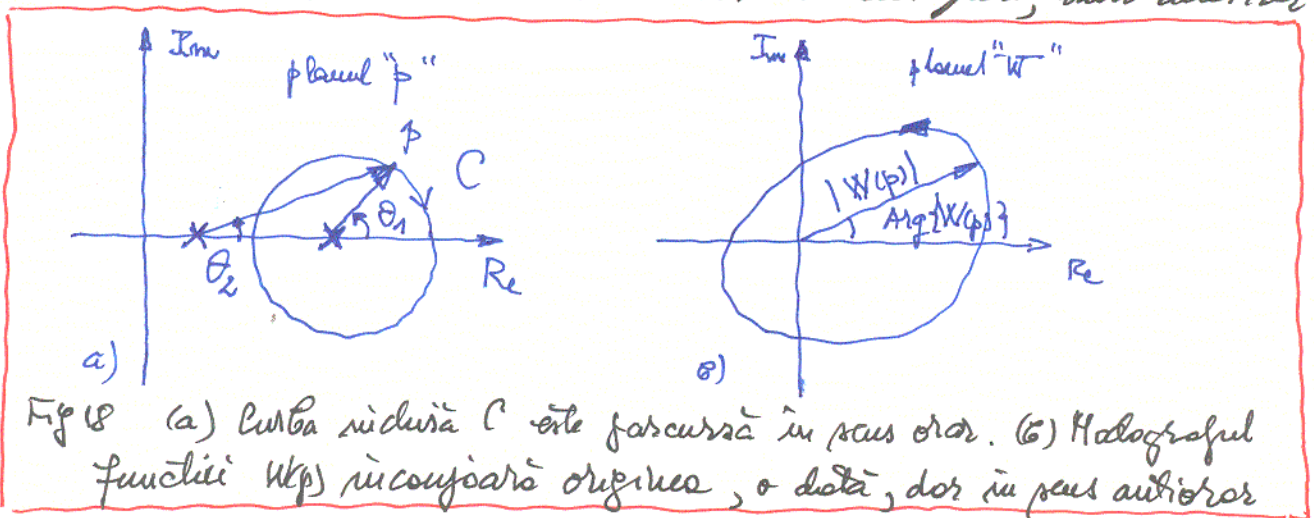


Fig 18 (a) Curba închisă C este parcursă în sens orar. (b) Hodograful
funcției $W(p)$ înconjoară originea, o dată, dar în sens antiorar

în altul exterior curbei închise C, am avea:

$$Arg\{W(p)\} = -\theta_1 - \theta_2$$

și deci:

$$\Delta Arg\{W(p)\} = -\Delta \theta_1 - \Delta \theta_2$$

Cum $\Delta\theta_2 = 0$ și $\Delta\theta_1 = -2\pi$, atunci când curba închisă C se parcurge în sens orar, variația argumentului funcției $W(p)$ este:

$$\Delta \text{Arg} f W(p) = 2\pi$$

sau, ceea ce este echivalent, hodograful funcției $W(p)$ înconjoară originea odată doar, de această dată, în sens antiorar.

În general, pentru o funcție $W(p)$ rațională, dacă p parcurge un contur închis în sens orar, poli și zerourile din exteriorul conturului nu vor da variații ale argumentului funcției $W(p)$. Fiecare zero din interiorul conturului va conduce la o variație de argument a funcției $W(p)$ cu -2π , în timp ce fiecare pol va duce la variația aceluiași argument cu $+2\pi$. Este evident că un zero sau un pol multiplu vor da variații $\mp 2\pi \times$ ordinul de multiplicitate respectiv. Putem deci enunța următorul criteriu ^{de variație} al argumentului (mai precis o proprietate legată de înconjurarea originii):

Atunci când un contur închis C , din planul p , este parcurs o singură dată în sens orar, hodograful funcției raționale $W(p)$ înconjoară originea în sens orar de un număr de ori egal cu numărul de zerouri minus numărul de poli ^{al funcției $W(p)$} din interiorul conturului C . În numărarea poli și zerourile se vor considera cu tot cu ordinul lor de multiplicitate.

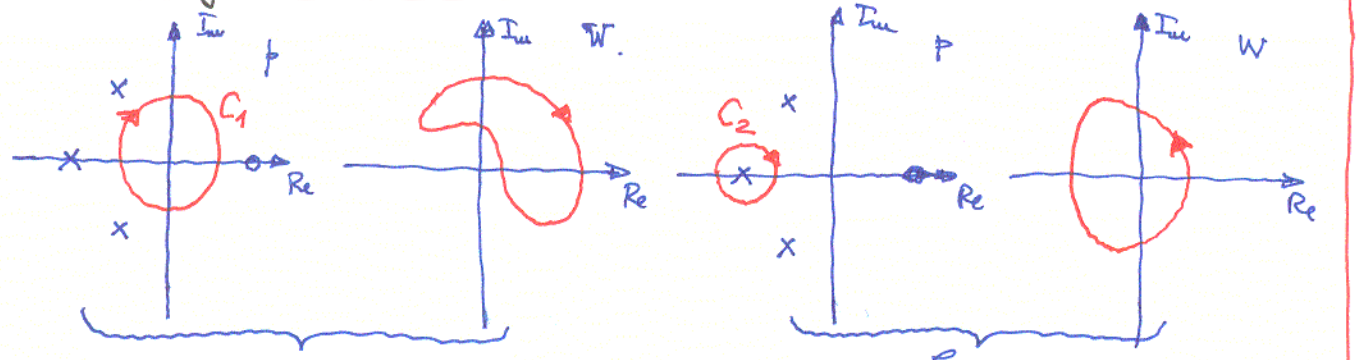
Fie, pentru exemplificare,

$$W(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p^2+p+1)}$$

cu zeroul $\beta_1 = 1$ și poli $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

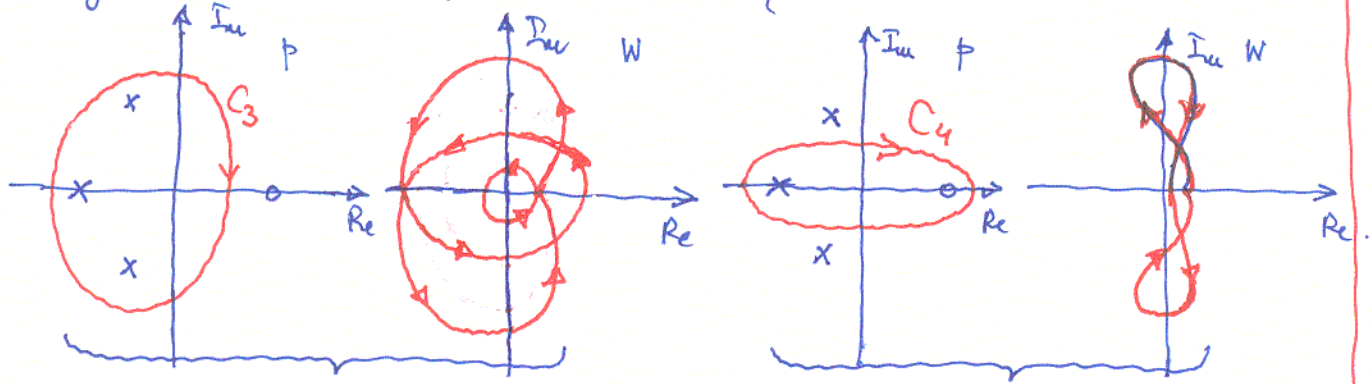
Considerăm cinci curbe închise $C_1 \div C_5$ care sunt parcurse în sens orar, așa cum se arată în figura 19. Se poate vedea că numărul de înconjurări ale originii de către hodograful funcției $W(p)$ este determinat de numărul de zerouri și de numărul de poli din interiorul conturului, conform cu

variației
criteerului argumentului.



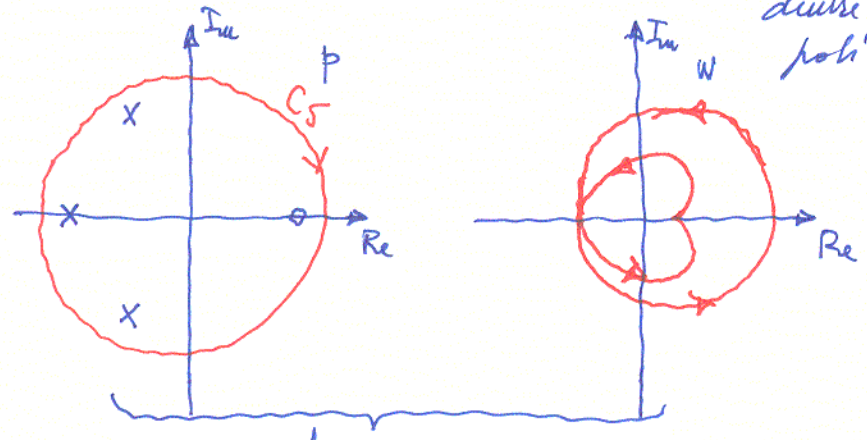
nu există puncte în interior
ni deci nu se înconjoară ori-
ginea de către $W(p)$

există un pol în interior (ni $W(p)$)
înconjoară originea odată, în
sens antiorar.



există trei poli în interiorul con-
turului C ni $W(p)$ înconjoară ori-
ginea de trei ori, în sens antiorar

există un pol ni un zero în inter-
iorul conturului C . $W(p)$ nu
înconjoară originea, diferența
dintre nr. de zerouri ni cel de
poli fiind nulă.



există trei poli ni un zero în interiorul conturului C .
 $W(p)$ înconjoară originea de două ori, în sens
antiorar, deoarece nr. zerouri - nr. poli = -2.

Fig 19. Contururi ni
tracetafe corespunzătoare.

4.2 Criteriul lui Nyquist pentru sisteme liniare, cu reacție, în
timp continuu.

Vom utiliza criteriul variației argumentului pentru a analiza pre-
stabilitatea unor sisteme cu reacție (cu buclă închisă) de tipul
celor din figurile 10. Stabilitatea acestor sisteme, stabile în

Cuclă deschisă, care ca nică nu zero al funcției $1 + K G(s) H(s)$ nu
nu fie plasat în semiplanul drept, $\sigma > 0$. Această condiție este
echivalentă cu cea ca nică nu zero al funcției $R(s)$:

$$R(s) = \frac{1}{K} + G(s) H(s) \tag{59}$$

po nu fie plasat în semiplanul drept. Vom considera conturul C

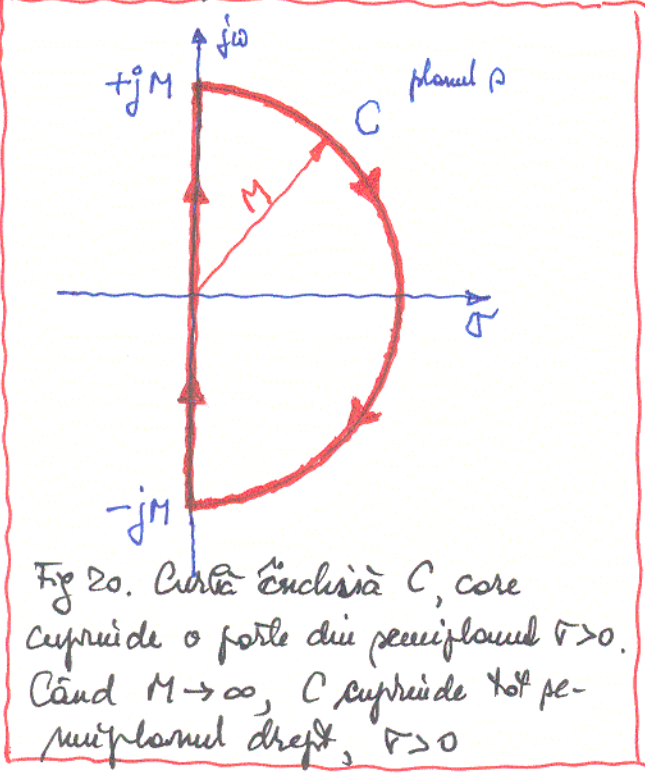


Fig 20. Contura închisă C , care
cuprinde o parte din semiplanul $\sigma > 0$.
Când $M \rightarrow \infty$, C cuprinde tot se-
miplanul drept, $\sigma > 0$

din figura 20, cu $M \rightarrow \infty$. Vom
considera că $R(s)$ are cel mult
atâtea zero-uri câte poli are,
 $m \leq n$, și dea lui $R(s)$ este fie
mulți fie o constantă. Rezultă
că $R(s)$ nu se modifică atunci
când parcurgem semicercul de
raze M , când $M \rightarrow \infty$. Prin
urmare hodograful lui $R(s)$ pentru
contul când σ parcurge conturul

C , cu $M \rightarrow \infty$, se poate trasa doar urmând valorile lui
 $R(s)$ pe axa imaginară, $s = j\omega$, când ω crește de la
 $-\infty$ la $+\infty$. Cum înșă $R(j\omega) = \frac{1}{K} + G(j\omega) H(j\omega)$, cum-
când $G(j\omega)$ și $H(j\omega)$ prin caracteristicile lor de frecvență pu-
tem trasa $R(j\omega)$ sau hodograful lui $R(s)$ atunci când sur-
se C înconjură tot semiplanul drept. Din numărul de
înconjurări al originii și din sensul înconjurării, putem
deduce care este diferența dintre numărul de zero-uri și nu-
mărul de poli ai lui $R(s)$, plasat în semiplanul drept,
 $\sigma > 0$. Cum poli lui $R(s)$ (și poli lui $G(s) H(s)$), rezultă
că obținem informații despre numărul de zero-uri ai lui
 $R(s)$, din semiplanul drept. Dacă sistemul în buclă deschisă
este stabil, el nu are poli în semiplanul drept. Cum $R(s)$
nu are nici o altă zero-uri în semiplanul drept, rezultă că

hodograful lui $R(s)$ nu are voie să încovjure originea sau, ceea ce este echivalent, că hodograful lui $R(j\omega)$, atunci când ω crește de la $-\infty$ la $+\infty$, nu are voie să încovjure originea.

Dar cum :

$$G(j\omega)H(j\omega) = R(j\omega) - \frac{1}{K}$$

rezultă că, pentru contul în care $R(j\omega)$ încovjuro originea, $G(j\omega)H(j\omega)$ încovjuro, în același sens, punctul $\sigma = -1/K$. De aceea se lucrează cu hodograful $G(j\omega)H(j\omega)$, numit și hodograf Nyquist. El încovjoră punctul, numit critic, $\sigma = -1/K$ de un număr de ori egal cu diferența dintre numărul de zerouri și numărul de poli din semiplanul drept. Putem formula criteriul de stabilitate al lui Nyquist

Pentru ca un sistem în buclă închisă să fie stabil, numărul net de încercări în sens orar ale punctului $\sigma = -1/K$ de către hodograful Nyquist, $G(j\omega)H(j\omega)$, trebuie să fie egal cu minus numărul de poli din semiplanul drept al produsului $G(s)H(s)$.

Formularea poate fi făcută și astfel:

Pentru ca un sistem în buclă închisă să fie stabil, numărul net de încercări în sens antiorar ale punctului $\sigma = -1/K$ de către hodograful Nyquist, $G(j\omega)H(j\omega)$, trebuie să fie egal cu numărul de poli din semiplanul drept al produsului $G(s)H(s)$.

Dacă sistemul în buclă deschisă este stabil, adică $G(s)H(s)$ nu are poli în semiplanul drept, criteriul de stabilitate al lui Nyquist se reformulează astfel:

Pentru ca un sistem care nu este stabil în buclă deschisă să fie stabil și în buclă închisă, hodograful Nyquist, $G(j\omega)H(j\omega)$, nu are voie să încovjore punctul $\sigma = -1/K$.

Exemple. ① Fie $G(s) = \frac{1}{s+1}$ și $H(s) = \frac{2}{s+2}$. Este evident că $G(s)H(s)$ nu are poli în semiplanul drept și deci sistemul în buclă deschisă este stabil. Hodograful Nyquist nu are voie să încalce punctul critic, $-1/K$. În figura 21 se prezintă

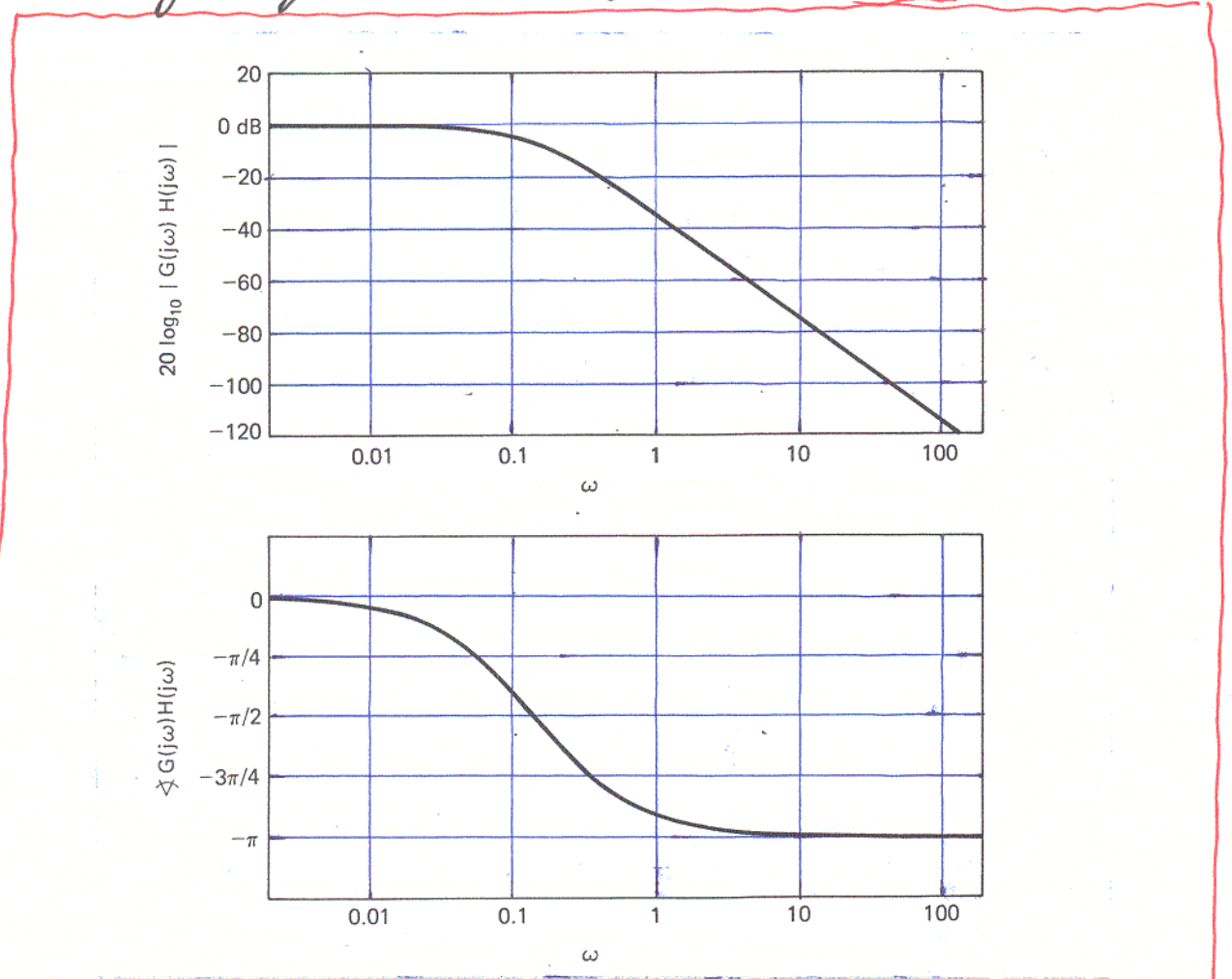


Fig 21 Diagramele Bode pentru $G(j\omega)H(j\omega) = 2/(j\omega+1)(j\omega+2)$

diagramele Bode ale produsului, $H(j\omega)G(j\omega)$. Considerând ca parametru frecvența ω , se citesc din cele două diagrame modulul și faza și se poate construi hodograful Nyquist pentru ω crescând de la 0 la ∞ . Se știe că modulul este o funcție pară de ω în timp ce argumentul este o funcție impară de ω .

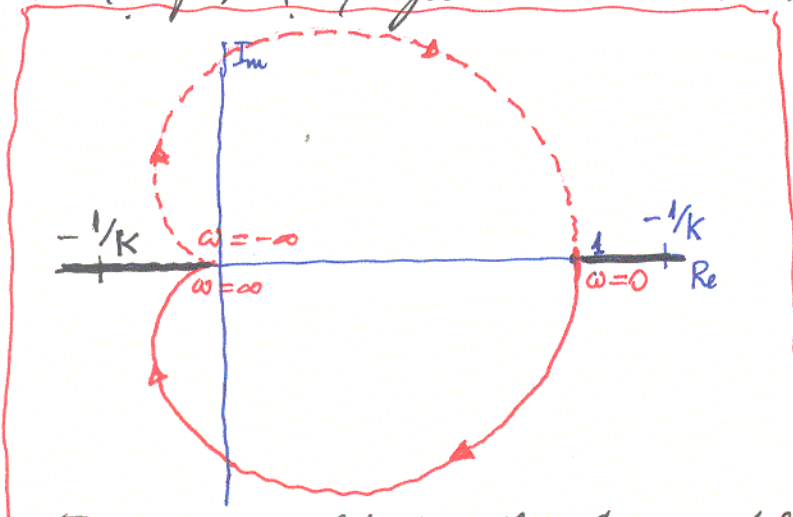


Fig 22. Hodograful Nyquist pentru exemplul 1

În consecință hodograful pentru $\omega < 0$ se construiește prin simetrie în raport cu axa reală.

Cum hodograful nu are voie să încalce punctul critic, e necesar să avem $-\frac{1}{k} < 0$ sau $-\frac{1}{k} > 1$. Considerând numai reacția negativă, $k > 0$ stabilitatea este asigurată întotdeauna. Pentru reacția pozitivă, sau $k < 0$ avem, din a doua condiție, $k > -1$ sau $-1 < k < 0$.

② Vom considera acum un sistem care în buclă deschisă este instabil, arând nu pot în semiplanul drept:

$$G(s)H(s) = \frac{z(p+1)}{(p-1)(p+2)}$$

Nu avem, pentru acest sistem, diagrame Bode. Considerând însă expresia analitică dată și punând $s = j\omega$, putem calcula, pentru diferite valori ω , modulul și argumentul funcției $G(j\omega)H(j\omega)$

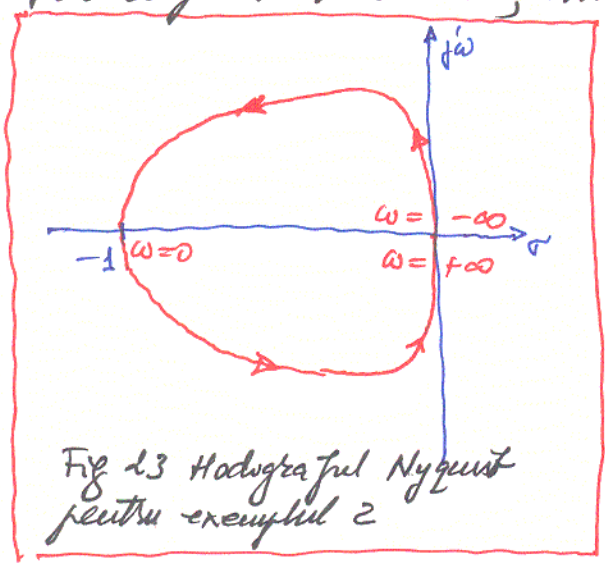


Fig 23 Hodograful Nyquist pentru exemplul 2

și putem trasa hodograful Nyquist - vezi fig. 23. Deoarece sistemul are un pol în semiplanul drept, pentru a obține stabilitatea în buclă închisă, este necesar ca punctul critic, $\sigma = -1/k$ să fie încalcat de către hodograful o pîngură dată, în sens invers acelor de ceasornic (vezi anti-

orar). Acest lucru se obține dacă:

$$-1 < -\frac{1}{k} < 0$$

ceea ce înseamnă $k > 0$ și $k > 1$ adică stabilitatea este condiționată de alegerea unui câștig pozitiv, suficient, $k > 1$.

③ Ne reîntoarcem la exemplul sistemului acuată din figura 8.

Fie $K = k_1 k_2$ și

$$G(s)H(s) = -e^{-sT} = e^{-(sT + j\pi)}$$

deoarece $e^{j\pi} = -1$. Avem:

$$G(j\omega)H(j\omega) = e^{-j(\omega T + \pi)}$$

Se vede că modulul este unitar iar argumentul $-(\omega T + \pi)$ așa că

hodograful este cercul din figura 24. Deoarece sistemul în buclă deschisă este stabil, hodograful Nyquist nu are voie să încalce punctul critic $-1/K$, sau $|K| < 1$. Cum K_1 și K_2 sunt câștiguri și atenuări acustice, ele sunt ambele pozitive. Rezultă că sistemul în buclă închisă este stabil dacă $K_1 K_2 < 1$.

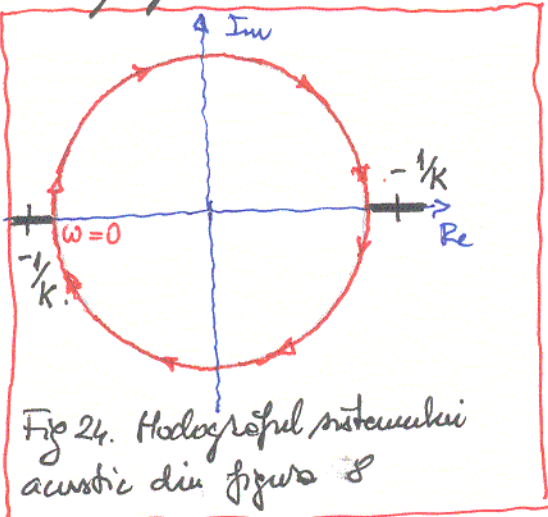


Fig 24. Hodograful sistemului acustic din figura 8

În cele prezentate până acum nu am considerat poli ai produsului KG situați pe axa imaginară. Criteriul lui Nyquist poate fi însă adaptat și pentru astfel de cazuri.

Exemplu. Considerăm cazul unui pol pe axa imaginară:

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Vom considera un contur închis C , ușor modificat, care ocolește

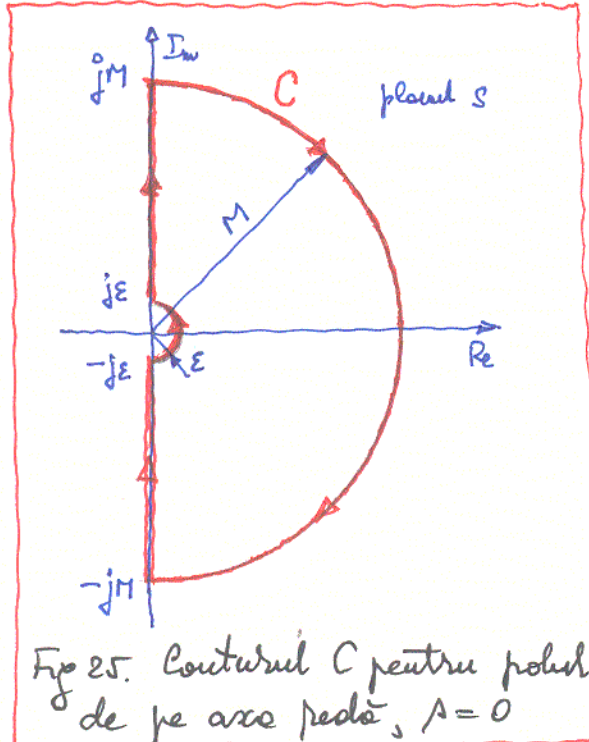


Fig 25. Conturul C pentru polul de pe axa reală, $A=0$

originea (polul de pe axa reală) printr-un semicerc de rază $\epsilon \rightarrow 0$, în același timp cu $M \rightarrow \infty$. Valoarea produsului GH pe cercul de rază $M \rightarrow \infty$ este o constantă și deci nu apare nici o variație de argument atunci când ω trece de la $+\infty$ la $-\infty$. Trebuie deci să trasăm hodograful Nyquist numai pentru axa imaginară și pentru cercul de rază infinitesimală $\epsilon \rightarrow 0$. Avem

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{|\omega| \sqrt{\omega^2+1}} e^{-j(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \omega + \arctan \omega)}$$

și

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)H(j\omega)| = \infty \quad ; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{j\omega \rightarrow 0} \text{Arg} \{G(j\omega)H(j\omega)\} = \frac{\pi}{2}$$

Se mai vede că putem scrie produsul în următoarea formă:

$$G(j\omega)H(j\omega) = -\frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{1}{\omega+\omega^3}$$

de unde se deduce că:

$$\lim_{j\omega \rightarrow 0} \text{Re} \{G(j\omega)H(j\omega)\} = -1$$

adică $\sigma = -1$ este asimptotă verticală a hodografului Nyquist. Rămâne să determinăm comportarea produsului pe semicercul de rază infinită.

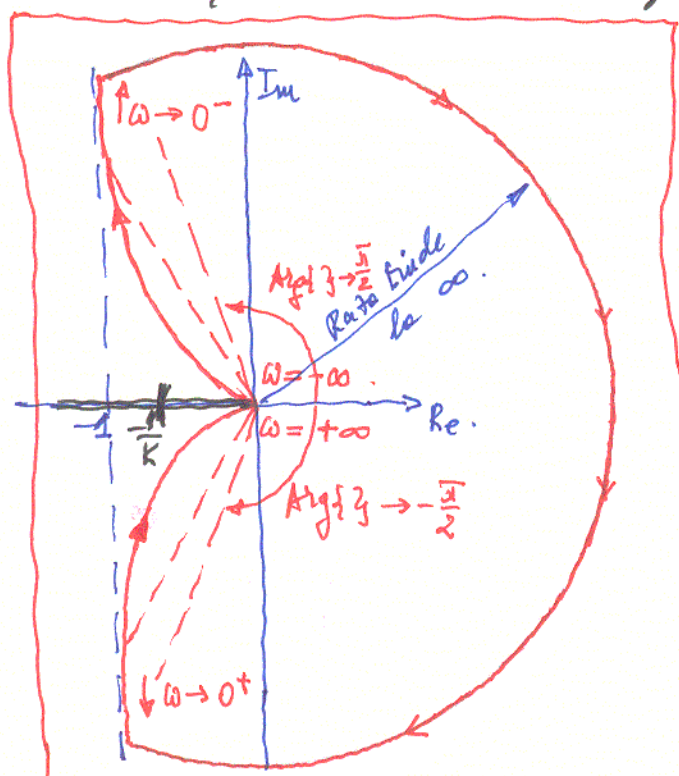


Fig 26. Hodograful Nyquist pentru cazul existenței unui pol simplu în origine

Deoarece raza ϵ tinde spre zero, variația unghiului cauzată de polul -1 este nulă, așa cum se vede din figura 27.

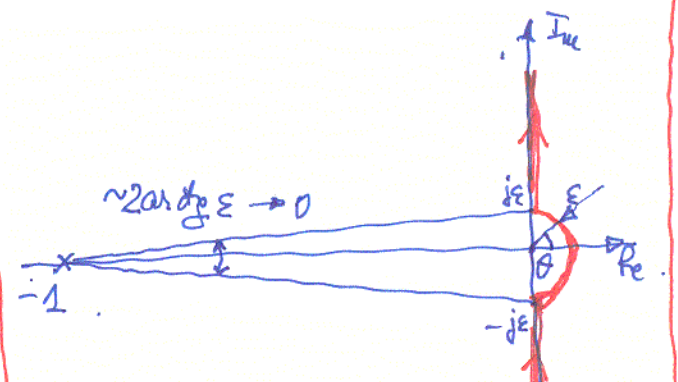


Fig 27 Variația de unghi cauzată de polul -1 este nulă. Unghiul θ variază de la $-\pi/2$ la $\pi/2$

În schimb, pe semicerc

$$\text{Arg} \{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\theta$$

și deci

$$\Delta \text{Arg} \{G(j\omega)H(j\omega)\} = -(\theta_{\omega=0^+} - \theta_{\omega=0^-}) = -\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

sau

$$\Delta \text{Arg} \{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\pi$$

atunci când se trece de la $\omega=0^-$ la $\omega=0^+$ pe semicercul de rază infinită. Aceasta înseamnă o înșurubire a hodografului cu 180° în sens orar. Rezultă hodograful din fi-

gura 26.

Pentru a determino valorile admise pentru costigul K vom face mentinnea cã în interiorul conturului considerat nu se aflã nici mãcar polul din origine, deoarece l-am lãsat în afãrã, ocotindul-l prin dreapta cu semicercul înfrunte-
 zinel. În consecinãã punctul critic nu trebuie sã fie nicou-
 jurat de hodograf, pentru a avea stabilitatea sistemului în buclã închisã. Rezultã cã trebuie sã avem $-\frac{1}{K} < 0$
 sau $K > 0$

4.3 Criteriul lui Nyquist pentru sisteme cu reactie negativã, liniare, în timp discret.

Cã ni în cazul sistemelor în timp continuu, criteriul de stabilitate al lui Nyquist pentru sistemele discrete se bazeazã pe faptul cã diferenã dintre numãrul de zerouri și numãrul de poli din interiorul unui contur poate fi determinat prin analiza comportãrii unei functii pe acel contur. Pentru ca un sistem discret în buclã închisã sã fie stabil, este necesar ca nici un zero al func-
 tiei

$$R(z) = \frac{1}{K} + G(z)H(z) \tag{60}$$

sã nu fie plasat în afãrã discului unitar din planul z . Reamini-
 tidu cã zerourile lui $R(z)$ sunt poli ai lui $G(z)$, funcția si-
 stem corespunzãtoare buclii închise.

Dar criteriul variației argumentului se referã la poli și ze-
 rourile din interiorul unui contur. Pe de altã parte când analizãm
 stabilitatea sistemului discret putem confrunããi cu problema
 zerourilor din afãrã zonei delimitate de arcã închisã, arcã
 unitar. De acum, pentru a face uz de criteriul variației ar-
 gumentului vom introduce funcția $\hat{R}(z)$ prin relația

$$\hat{R}(z) = R\left(\frac{1}{z}\right)$$

Se poate vedea cã dacã z_0 este un zero al lui $R(z)$, atunci $1/z_0$ este un zero, al lui $\hat{R}(z)$. Dacã z_p este un pol al lui $R(z)$, atunci $1/z_p$ este tot un pol, dar al lui $\hat{R}(z)$.

Din criteriul argumentului știu că, atunci când z parcurge cercul unitar în sens orar, numărul net de încercuiri, în sens orar, al originii de către hodograful $\hat{R}(z)$ este egal cu diferența dintre numărul de zerouri și numărul de poli din interiorul cercului unitar. Dar dacă $|z_0| > 1$ atunci $1/|z_0| < 1$ și dacă $|z_p| > 1$ atunci $1/|z_p| < 1$, are că orice pol sau zero al lui $R(z)$ din afara discului unitar devine pol sau zero al lui $\hat{R}(z)$ din interiorul discului unitar și invers. Rezultă deci că atunci când numărăm încercuirile nete ale lui $\hat{R}(z)$, egale cu ale lui $R(z)$, numărăm diferențe dintre zerouri și poli lui $R(z)$ din afara discului unitar. Mai avem, pentru $z = e^{j\omega}$, adică pe cercul unitar:

$$\hat{R}(e^{j\omega}) = R(e^{-j\omega})$$

Aceasta înseamnă că atunci când analizăm comportarea hodografului lui $\hat{R}(z)$ atunci când z parcurge cercul unitar în sens orar, analizăm comportarea hodografului lui $R(z)$ atunci când z parcurge cercul unitar în sens antiorar.

În rezumat, dacă cercul unitar este parcurs în sens antiorar, ceea ce înseamnă că ω crește de la 0 la 2π , în sens natural, așa cum ω crește de la $-\infty$ la $+\infty$, hodograful $R(e^{j\omega})$ începează originea în sens orar de un număr de ori egal cu diferența dintre numărul de zerouri și numărul de poli din exteriorul discului unitar, $r > 1$.

Ca și în timp continuu, numărul de încercuiri ale originii de către hodograful $R(e^{j\omega})$ este același cu numărul de încercuiri ale punctului critic, $-1/K$, de către hodograful produsului $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, numit hodograf Nyquist. El se tracează pentru valori ale lui ω crescând de la 0 la 2π .

Pe baza celor expuse se poate enunța criteriul lui Nyquist, știind că pentru stabilitate $R(z)$ nu trebuie să aibă zerouri în afara discului unitar.

Pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil, numărul net de încercuiri ale punctului critic, $-1/K$, în sens orar, de

ca tre hodograful Nyquist, $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, trasat atunci cand ω creste de la 0 la 2π trebuie sa fie egal cu minus numarul de poli ai lui $G(z)H(z)$ plasati in afara discului unitar, $\mathcal{N} > 1$.

Se poate da o formulare echivalenta, in care nu apare "minus":

Pentru ca sistemul in bucla inchisa sa fie stabil, numarul net de incercuiri ale punctului critic, $-1/K$, in sens antioros, de catre hodograful Nyquist, $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, trasat atunci cand ω creste de la 0 la 2π trebuie sa fie egal cu numarul de poli ai lui $G(z)H(z)$ plasati in afara discului unitar.

Daca sistemul in bucla deschisa este stabil, adica $G(z)H(z)$ nu are poli in afara discului unitar, criteriul de stabilitate devine:

Pentru ca un sistem stabil in bucla deschisa sa ramana stabil in bucla inchisa este necesar ca hodograful Nyquist, $G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$, trasat atunci cand ω creste de la 0 la 2π , sa nu incalce punctul critic, $-1/K$.

Exemplu Fie $G(z)H(z) = \frac{z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{z(z + \frac{1}{2})}$

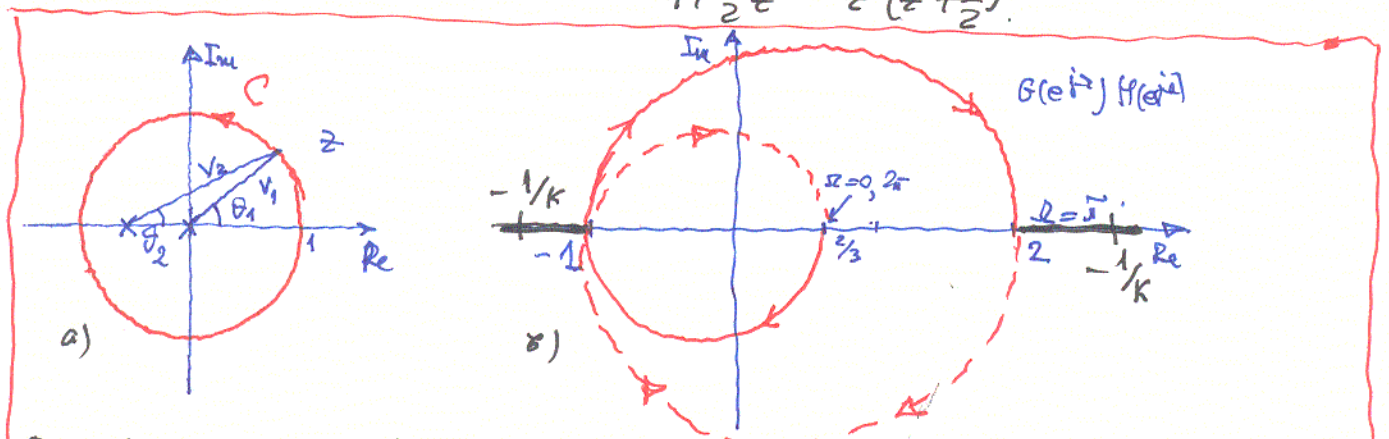


Fig 28 (a) Cercul unitar se parcurge in sensul cresterii lui ω de la 0 la 2π . Prin urmare, θ_1 si θ_2 cresc de la 0 la 2π fiecare. (b) Hodograful Nyquist corespunzator. $\text{Arg} f = -(\theta_1 + \theta_2)$ deci punctul este orar si cum unghiul total este -4π au loc doua incercuiri ale pozitiei

Se vede ca avem

$$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{e^{j2\omega}(e^{j\omega} + \frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{1}{2}V_2} e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} = \frac{1}{V_2} e^{-j(\theta_1 + \theta_2)}$$

deoarece $V_1 = 1$ - vezi figura 28a. Valorile maxime și minime ale lui V_2 sunt $3/2$ și $1/2$ respectiv și au loc pentru $\omega = 0$ și $\omega = \pi$, respectiv. Ca atare, la $\omega = 0, 2\pi$ $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|_{\omega=0,2\pi} = 2/3$ și la $\omega = \pi$ $|G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 2$. Deoarece $\text{Arg}\{G(e^{j\omega})H(e^{j\omega})\} = -(\theta_1 + \theta_2)$

semnul de mers pe hodograful este cel orar, valoarea maximă a argumentului fiind -4π , ceea ce înseamnă că se înconjoară o regiune de 2 ori (și peis orar).

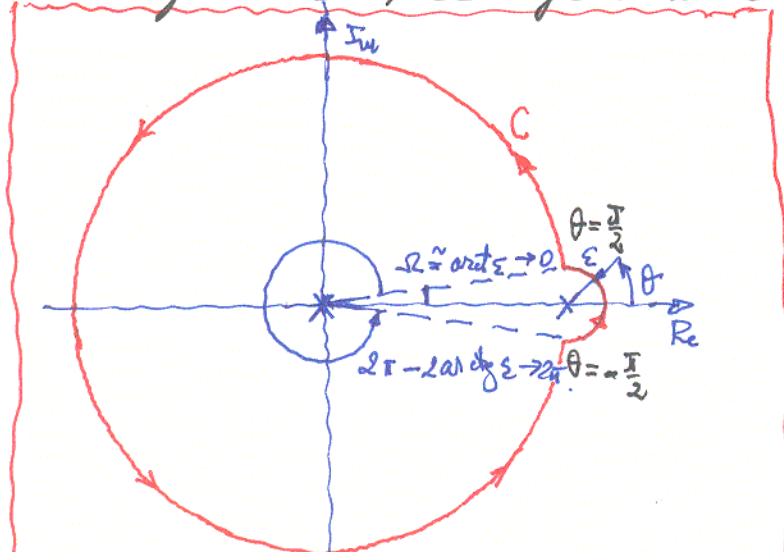
Cum sistemul în buclă deschisă este stabil, rezultă că pentru ce și sistemul în buclă închisă să rămână stabil, punctul critic $-1/K$ nu trebuie să fie înconjurat de către hodograful Nyquist. În consecință, $-1/K < -1$ sau $-1/K > 2$ de unde $0 < K < 1$ sau $-1/2 < K < 0$. În concluzie, sistemul în buclă închisă rămâne stabil pentru $K \in (-1/2, 0) \cup (0, 1)$

În discuția arată și în exemplul considerat aici nu pol al produsului $G(z)H(z)$ nu cade pe cercul unitar. Criteriul lui Nyquist poate fi extins și pentru astfel de cazuri, cum și acesta, menționăm că în cazul sistemelor în timp continuu.

Fie

$$G(z)H(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

unde polul $z=1$ cade pe cercul unitar. Vom modifica conturul



cercului unitar, adăugând un semicercl de rază $\epsilon \rightarrow 0$ care lasă înăuntru polul în interiorul discului unitar (așa cum pentru sistemele în timp continuu lăsam polul în stânga). Vom vedea că

Fig 29 Conturul închis C, modificat prin semicercl de rază $\epsilon \rightarrow 0$, pentru a ocoti polul $z=1$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |G(e^{j\epsilon})H(e^{j\epsilon})| = \infty$$

n' cã

$$\lim_{\substack{\varepsilon \searrow 0 \\ \Omega \searrow 0}} \text{Arg} \{ G(e^{j\varepsilon}) H(e^{j\varepsilon}) \} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(-\varepsilon - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon \nearrow 0 \\ \Omega \nearrow \pi}} \text{Arg} \{ G(e^{j\varepsilon}) H(e^{j\varepsilon}) \} = \lim_{\varepsilon \nearrow 0} \left(\varepsilon + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

Pentru a trasa hodograful Nyquist pe cercul unitar ^{deci} fara cercul de raza $\varepsilon \rightarrow 0$ vom remarca - vezi n' figura 30 - cã:

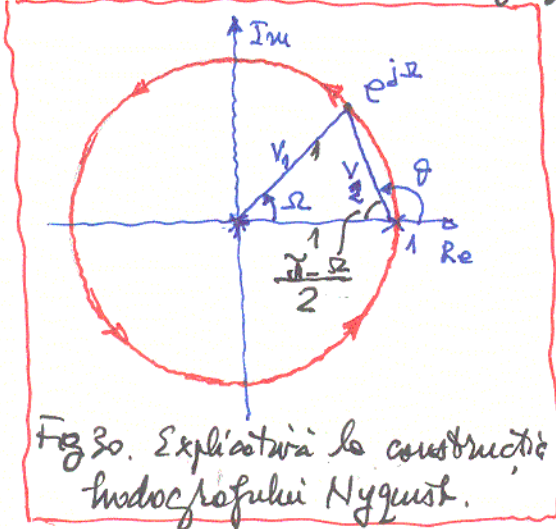


Fig 30. Explicatia la constructia hodografului Nyquist.

Figura 30 - cã:

$$G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{V_1 V_2} e^{-j(\Omega + \theta)}$$

Cum $V_1 = 1$ rezultã cã

$$|G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{V_2} \text{ ; } V_2 \neq 0$$

n' cã:

$$\text{Arg} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \} = -(\Omega + \theta), \Omega \neq 0$$

Deã considerãte simple rezultã cã pentru $\Omega = \pi/3$ $V_2 = 1$ n' deci modulul hodografului este 1. Dar la $\Omega = \pi/3$, $\theta = 2\pi/3$, arã cum se vede din fig 30. Ca atare, $\text{Arg} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) |_{\Omega = \pi/3} \} = -\pi$. Pentru $\Omega = \pi$ n' $\theta = \pi$ ara cã $\text{Arg} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) |_{\Omega = \pi} \} = -2\pi$ n' ,

cum $V_2 = 2$ rezultã cã modulul hodografului este 1/2

Cu $e^{j\Omega} = \cos \Omega + j \sin \Omega$ se poate stabili partea realã a produsului $G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega})$ este:

$$\text{Re} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \} = \frac{\cos^2 \Omega - \sin^2 \Omega - \cos \Omega}{2(1 - \cos \Omega)}$$

Pentru calculã limite a acestei parti reale atunci când $\Omega \rightarrow 0$, aplicãnd regula lui Hôpital

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \text{Re} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \} = \frac{0}{0} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{1 - 4 \cos \Omega}{2} = -\frac{3}{2}$$

Cu alte cuvinte, $x = -3/2$ este asimptotã verticalã pentru hodograful Nyquist.

Vom analiza acum comportarea hodografului pe cercul de raza $\varepsilon \rightarrow 0$. Deoarece, conform figurii 29, când $\Omega \rightarrow 0$ putem scrie:

$$\text{Arg} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \} \Big|_{\Omega \rightarrow 0} = -(\varphi + \theta) \Big|_{\Omega \rightarrow 0} \cong -\theta$$

Când parcurgem în sens orar, pe cercul $\varepsilon \rightarrow 0$ în sens orar, θ crește de la $-\pi/2$ la $+\pi/2$ așa că argumentul suferă o variație

$$\Delta \text{Arg} \{ G(e^{j\Omega}) H(e^{j\Omega}) \} \Big|_{\Omega \rightarrow 0} = -\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\pi$$

Ω trece de la $2\pi^-$ la 0^+
 θ trece de la $-\frac{\pi}{2}$ la $\frac{\pi}{2}$

ceea ce înseamnă că hodograful începe la origine, pe la început, în sens orar, atunci când Ω trece de la $2\pi^-$ la 0^+ .

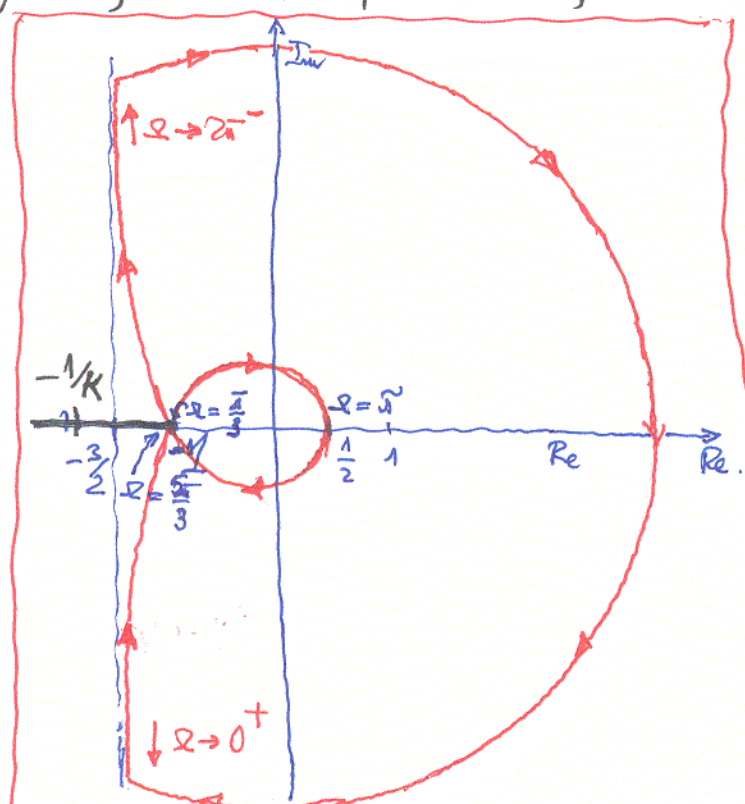


Fig 31. Hodograful sistemului cu un pol pe cercul unitar. El se închide pe la început, în sens orar.

Rezultă hodograful din figura 31. Se vede că închiderea, atunci când Ω trece de la $2\pi^-$ la 0^+ are loc pe la început, în sens orar, cu pînă la toate axe pozitive. Pentru ca sistemul să fie închis pe la început, trebuie să avem $-\frac{1}{K} < -1$ sau $0 < K < 1$.

5. Rezerva de amplificarea și rezerva de fază.

Suntem interesați nu numai să știm dacă un sistem este stabil și cât de mult poate fi modificat câștigul până apare instabilitatea și cât de mult poate fi modificată faza până apare instabilitatea. În multe aplicații funcțiile de transfer ale căilor directe și ale căilor de feedback se cunosc doar aproximativ și se mai pot modifica ca urmare a modificării caracteristicilor componentelor, ș.a. Dacă ne referim la exemplul din fig 1, sistemul

tenul constă dintr-un motor, un potențiometrul ce convertește unghiul într-o tensiune și un amplificator ce amplifică funcționează de eroare. Presupunând că dispunem de descrieri aproximative ale tuturor componentelor, putem reple câștigul astfel încât sistemul să fie stabil; el nu fi stabil doar numai dacă descrierile aproximative sunt bune. Totuși, câștigul și constante de proporționalitate ce devine dependentă unghi-tensiune dată de potențiometrului nu se cunoscă niciodată cu precizie și de aceea câștigul efectiv din sistem poate diferi de valoarea nominală considerată la proiectare. Mai mult, constanta de timp a proiectului motorului nu poate fi determinată cu precizie și de aceea poate diferi de cea considerată la proiectare. Dacă constanta de timp reală este mai mare decât cea considerată, motorul va răspunde mai încet decât se presupus, introducând o întârziere suplimentară în sistemul cu reacție. Întârzierile au ca efect creșterea defazajului în răspunsul sistemului. Aceasta defazare suplimentară poate cauza intrarea sistemului în instabilitate.

Este deci bine să existe "rezerve" pentru modificările de amplificarea și pentru modificarea de fază, cât mai mari.

Vom considera un sistem în buclă închisă, prezentat în figura 32a, în care $H(s)$ și $G(s)$ sunt funcțiile cu valorile nominale ale parametri-

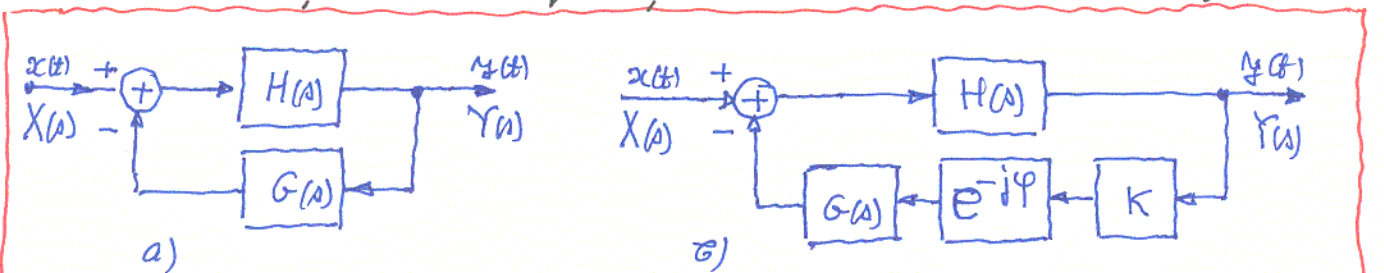


Fig 32 (a) Sistemul proiectat să fie stabil, cu $G(s)$ și $H(s)$ "nominale". (b) Sistemul real, ce conține posibile devieri ale defazajului ($-\varphi$) și ale câștigului (K).

lor, astfel proiectat încât este stabil în buclă închisă. Sistemul real, prezentat în figura 32.b, diferă de cel nominal, motor pentru care se introduce o modificare a câștigului prin K și o modificare $-\varphi$ a fazei. Pentru sistemul nominal $K=1$ și $\varphi=0$.

Ar fi bine să știu ce valori K și φ sunt tolerabile de sistem până la a ajunge la instabilitate.

▲ Rezerva de amplificarea (de câștig) a sistemului cu reacție se definește ca fiind minimumul lui K , cu $\varphi = 0$, care determină intrarea sistemului în instabilitate

▲ Rezerva de fază este valoarea minimă a defazajului suplimentar, $-\varphi$, cu $K = 1$, care determină intrarea sistemului în instabilitate. Prin convenție, rezerva de fază se exprimă prin numere pozitive

Deoarece sistemul din figura 33.a este stabil, sistemul din figura 32.6 poate deveni instabil dacă, modificând K și φ cel puțin un pol al sistemului în punctă închisă trece din semiplanul stâng ($\sigma < 0$) în semiplanul drept ($\sigma > 0$). Dacă un pol al sistemului în punctă închisă se află chiar pe axa imaginară (la limita celor două domenii), la $\omega = \omega_0$, atunci avem:

$$1 + K e^{-j\varphi} G(j\omega_0) H(j\omega_0) = 0$$

sau:

$$K e^{-j\varphi} G(j\omega_0) H(j\omega_0) = -1 \tag{61}$$

Deoarece sistemul nominal este stabil, pentru $K = 1$ și $\varphi = 0$ nu există nici o valoare ω_0 care să satisfacă ecuația (61).

Rezerva de amplificarea a sistemului este valoarea minimă a lui $K > 1$ pentru care ecuația (61) are o soluție, cel puțin:

$$K G(j\omega_0) H(j\omega_0) = -1 \tag{62}$$

Rezerva de fază a sistemului este valoarea minimă a lui φ , pentru care ecuația (61), cu $K = 1$, are cel puțin o soluție:

$$e^{-j\varphi} G(j\omega_0) H(j\omega_0) = -1 \tag{63}$$

Pentru a înțelege aceste noțiuni și pentru a vedea interpretarea lor grafică vom recurge la câteva exemple.

Exemplu ① Fie

$$G(s) H(s) = \frac{4(1 + \frac{1}{2}s)}{s(1 + 2s)[1 + 0,05s + (0,125s)^2]}$$

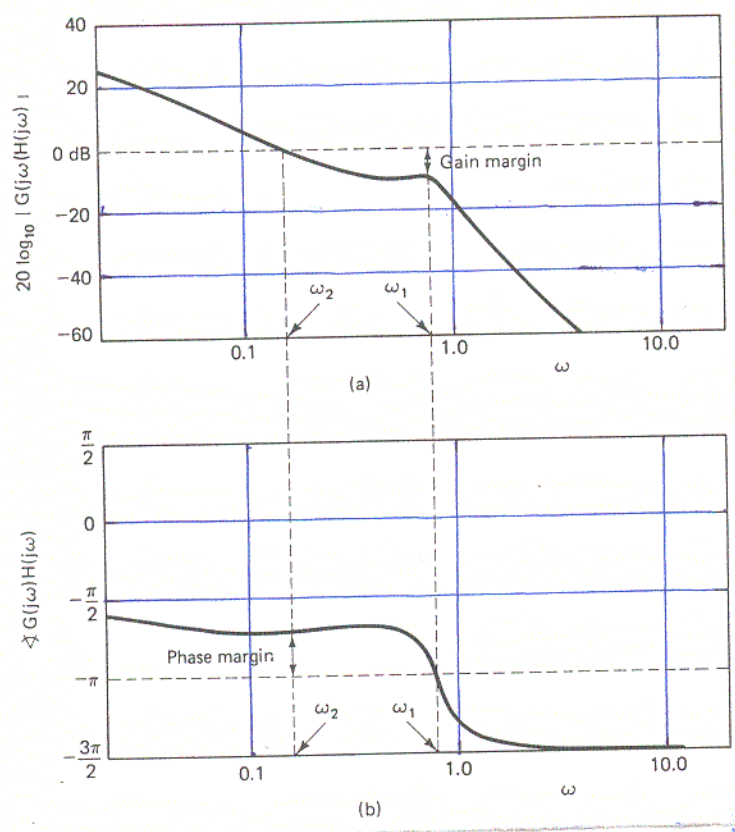


Fig 33 Utilizarea diagramei Bode pentru determinarea rezervei de amplificarea (a) și a rezervei de fază (b).

Diagramele Bode ale produsului $G(j\omega)H(j\omega)$ sunt ale din figura 33. Dacă $\varphi=0$ ecuația (62) poate fi satisfăcută numai la acea frecvență la care argumentul produsului este $-\pi$:

$$K |G(j\omega_0)H(j\omega_0)| e^{j \text{Arg} \{G(j\omega_0)H(j\omega_0)\}} = -1$$

factori reali pozitivi

Primi doi factori sunt reali și pozitivi. Cui membrul drept este real și negativ, românse că exponențiala, de modul 1, trebuie să fie reală și negativă, adică, măsura polului pozitivă:

$$e^{j \text{Arg} \{G(j\omega_0)H(j\omega_0)\}} = -1$$

de unde se deduce că argumentul este $-\pi$.

Pentru precizarea ideilor fie ω_1 (și nu ω_0 !) frecvența la care argumentul - defazajul citit din diagrama fază - frecvență - este $-\pi$. La această frecvență este posibil să citim din diagrama amplificarea - frecvență rezerva de amplificarea. Analitic, deci ω_1 este frecvența la care avem:

$$\text{Arg} \{G(j\omega_1)H(j\omega_1)\} = -\pi \Rightarrow \omega_1$$

pe poate determinare rezerva de amplificarea cu rezerva:

$$K = \frac{1}{|G(j\omega_1)H(j\omega_1)|} > 1$$

deoarece stabilitatea sistemului nominal nu pune niciun punct critic, -1, adică $|G(j\omega_1)H(j\omega_1)| < 1$ dacă defazajul la $\omega = \omega_1$ este $-\pi$.

Într-o manieră asemănătoare se poate determina și rezerva de fază. Fie ω_2 frecvența la care $|G(j\omega_2)H(j\omega_2)| = 1$, citite din diagrama amplificarea frecvență, la intersecția cu linia de 0 dB. Din diagramă fază-frecvență se determină argumentul produsului $\text{Arg}\{G(j\omega_2)H(j\omega_2)\} > -\pi$. Acest argument este mai mare decât $-\pi$ deoarece sistemul nominal este stabil. Tot din diagrama fază-frecvență se poate citi imediat rezerva de fază, așa cum se arată în figura 33.6. Astfel:

$$|G(j\omega_2)H(j\omega_2)| = 1 \Rightarrow \omega_2$$

și rezerva de fază ca fiind:

$$\varphi = \pi - \text{Arg}\{G(j\omega_2)H(j\omega_2)\} > 0.$$

Este posibilă construcția unei curbe care să dea dependența între amplificarea și fază. În fapt este reprezentarea hodografului Nyquist în coordonate rectangulare și nu polare.

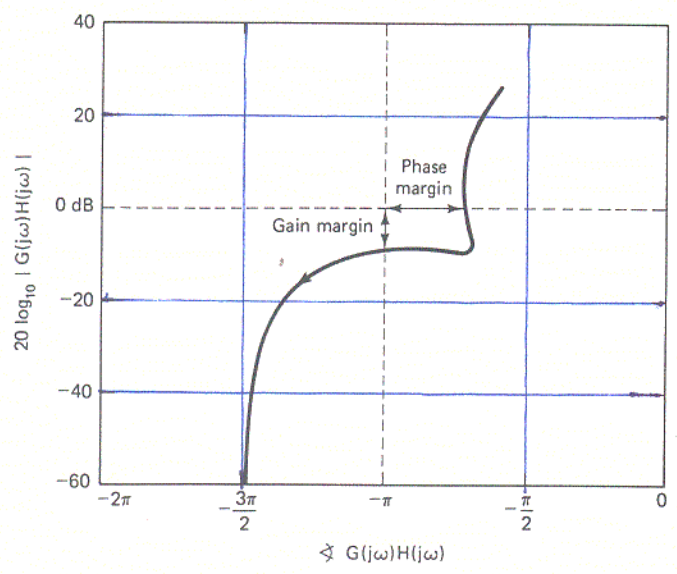


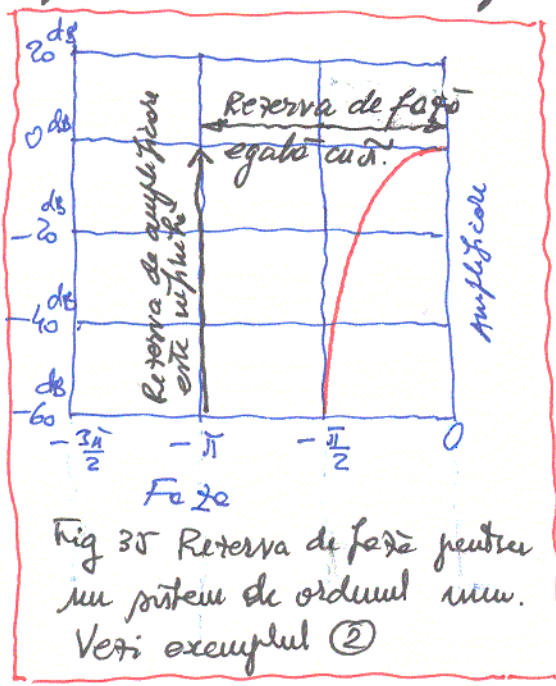
Fig 36 Curba amplificarea - fază pentru exemplul considerat, ①.

Amplificarea este dată în scară logaritmică și nu liniară, așa cum se vede în figura 34. Rezervele de amplificarea și de fază pot fi citite imediat din această diagramă, așa cum se arată în figura.

② Fie că

$$G(s)H(s) = \frac{1}{s^p + 1} \quad p > 0.$$

Curba amplificor-fază este ușor de construit în acest caz, fie pornind de la diagramele Bode fie prin calcul direct:



$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$\text{Arg}\{G(j\omega)H(j\omega)\} = -\text{arctg}\omega\tau$$

Se reprezintă pentru diferite valori ω cuprinsite:

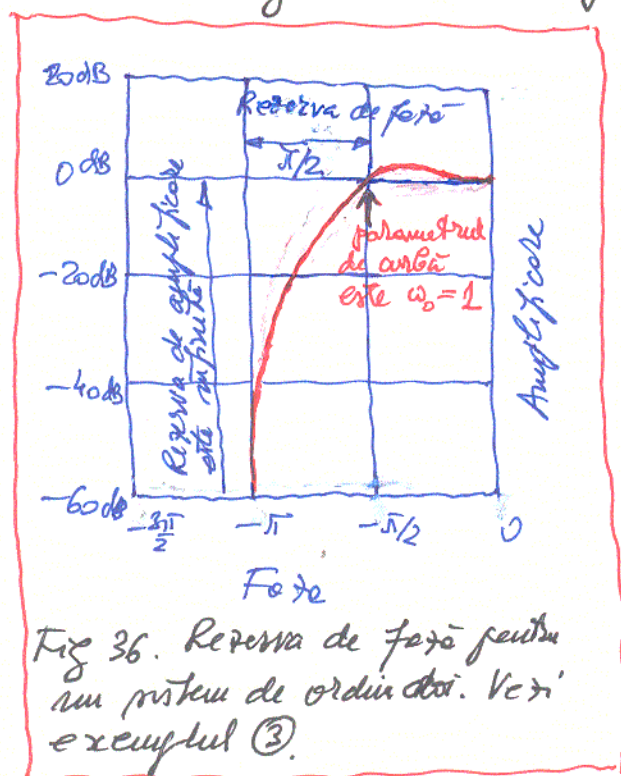
$$\left(20 \log \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \quad -\text{arctg}\omega\tau\right)$$

și se obține diagrame din figura 35.

Se vede ușor că rezerva de fază este π (180°) și rezerva de amplificare este infinite.

③ Considerăm acum un sistem cu $H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$ ($G(s) = 1$).

Pentru $H(s)$ putem deduce $\omega_0 = 1$ și $\zeta = 0,5$ (sistem de ordin doi). Fie cei doi diagramele Bode fie analitice, reprezentând la diferite



frecvențe ω cuprinsite (modul, argument), pentru care ω este parametrul de curbă.

Se vede că pentru $\omega = \omega_0 = 1$

$$H(j\omega_0) = H(j) = \frac{1}{j} = -j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

defazajul este de $-\pi/2$. Modulul este, la $\omega_0 = 1$, de valoare 1 sau 0 dB.

④ Vom arăta, cu referire la acest exemplu, tipul de probleme care se

pot rezolva folosind conceptele de rezerva de amplificare și rezerva de fază. Să presupunem că sistemul ③ nu poate fi implementat, ca urmare a unor întăririi inevitabile pe cele

de reacție. Prin urmare, un model pentru $G(s)$ este $G(s) = e^{-s\tau}$ unde τ este întârzierea introdusă. Am deri până acum cât de mult poate să fie întârzierea τ pentru ca să asigurăm stabilitatea sistemului în buclă închisă. Vom observa că pentru $G(j\omega)$ avem $|G(j\omega)| = 1$ și $\text{Arg}\{G(j\omega)\} = -\omega\tau$. În consecință, fiecare punct al curbei amplificarea-fază este deplasat cu $\omega\tau$ spre stânga, obținându-se o nouă caracteristică așa cum se vede în figura 37.

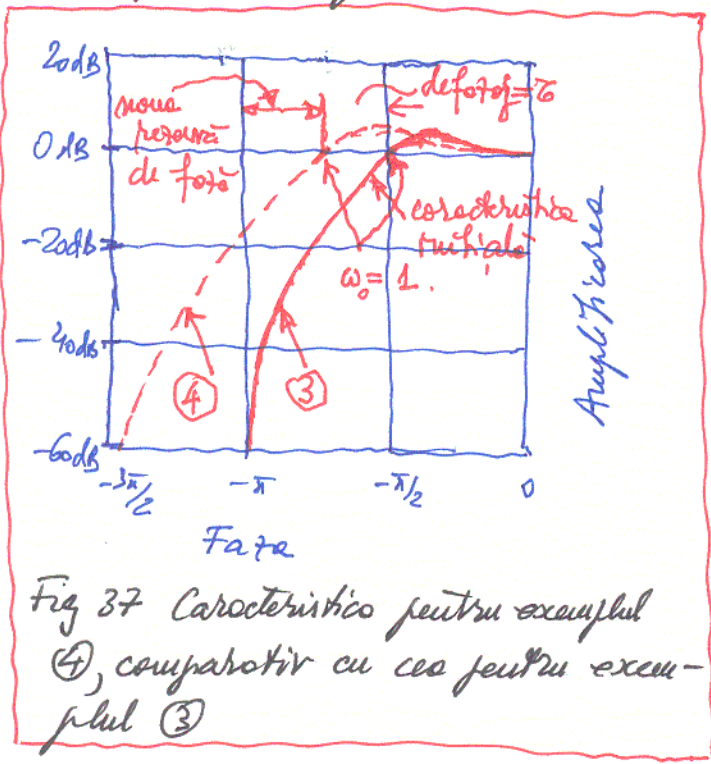


Fig 37 Caracteristici pentru exemplul ④, comparativ cu cea pentru exemplul ③

Noua rezervă de fază se micșorează și este numeric egală cu $\frac{\pi}{2} - \tau$, deoarece la $\omega_0 = 1$ $\text{Arg}\{G(j\omega_0)\} = -\tau$.

Este necesar, pentru stabilitate ca să avem o rezervă de fază:

$$\frac{\pi}{2} - \tau > 0$$

Rezultă că este tolerabilă o

întârziere de cel mult 1,57 secunde:

$$\tau < 1,57 \text{ secunde.}$$

pentru ca sistemul în buclă închisă cu $H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$ și $G(s) = e^{-s\tau}$ să rămână stabil.

⑤ Vom reconsidera exemplul sistemului acustic cu reacție, prezentat în figura 8. Vom presupune că am proiectat sistemul nominal stabil, cu $K_1 K_2 < 1$. Pentru acest sistem produsul GH este:

$$G(s)H(s) = K_1 K_2 e^{-(sT + \bar{\alpha})}$$

și deci:

$$G(j\omega)H(j\omega) = K_1 K_2 e^{-j(\omega T + \bar{\alpha})}$$

Modulul este o constantă, $K_1 K_2$ iar argumentul $-(\omega T + \bar{\alpha})$, deci caracteristica amplificarea-fază este ușor de trasat. Cum $K_1 K_2 < 1$, $20 \log K_1 K_2 < 0$ - vezi figura 38.

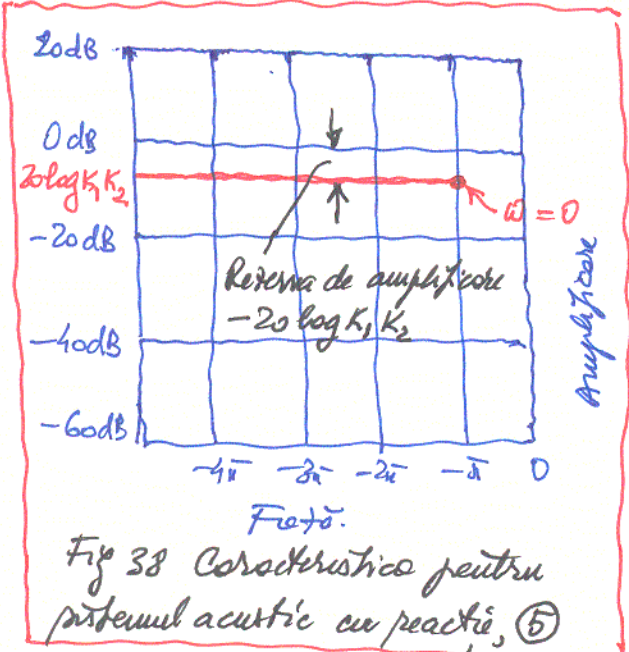


Fig 38 Caracteristica pentru sistemul acustic cu reactie, (5)

Așa cum se vede din figura 38, rezerva de fază este infinită iar rezerva de amplificari are valoarea de

$$-20 \log K_1 K_2 > 0$$

(6) Vom analiza conceptele de rezervă de amplificari și de rezervă de fază pentru un sistem discret.

Fie sistemul discret descris de

produsul :

$$G(z)H(z) = \frac{7\sqrt{2}}{4} z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{7\sqrt{2}}{8} z^{-1} + \frac{49}{64} z^{-2}}$$

Se poate verifica faptul că sistemul este stabil, pentru $K=1$ și $\varphi=0$ (vezi în figura 39). Dacă se pune $z = e^{j\omega}$ obținem :

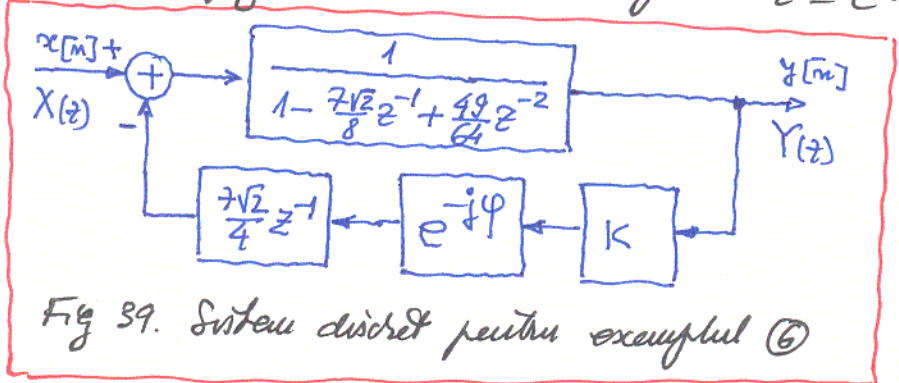


Fig 39. Sistem discret pentru exemplul (6)

$$G(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{7\sqrt{2}}{4} \frac{e^{j\omega}}{e^{2j\omega} - \frac{7\sqrt{2}}{8} e^{j\omega} + \frac{49}{64}}$$

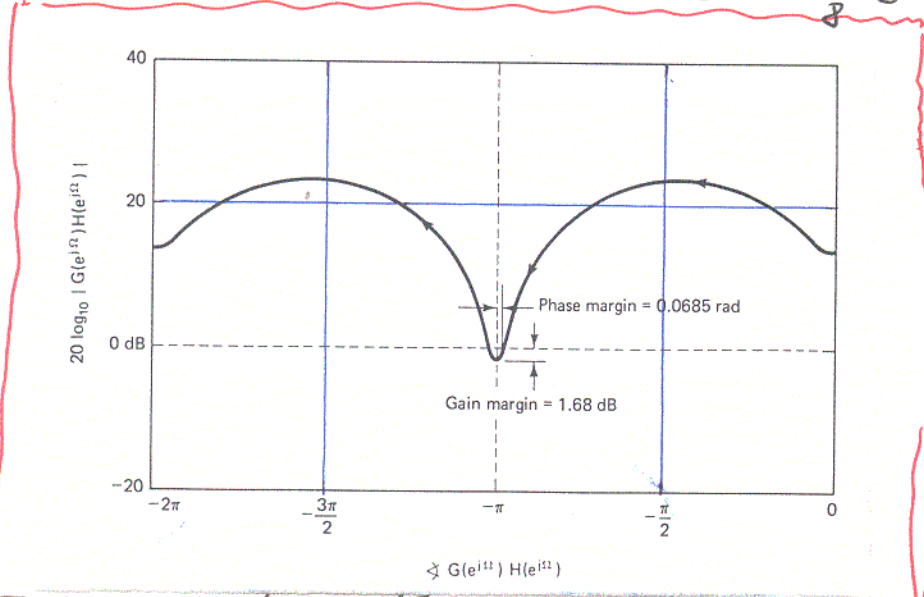


Fig 40. Caracteristica amplificari-fază pentru ex. (6)

Se poate observa caracteristica amplificari-fază. Ea este arată în figura 40, unde sunt marcate și rezervele de amplificari (1,68) și de fază (0,0685 radiani)

Observatii Este de remarcat cã nu e sigur cã sistemul este instabil pentru orice amplificãre peste rezerva de amplificãre \bar{m} pentru orice întârziere de fazã suplimentarã, mai mare decât rezerva de fazã. Pe mãsura ce K crește, spre exemplu, un pol se deplaseazã pe locul rãdãcînilor s_i , cãnd se atinge marginea de fazã polul ajunge pe axa imaginãrã. Dacã creștem castigul în continuare, polul trece în semiplanul drept, $\sigma > 0$. Nu este însã sigur cã locul rãdãcînilor nu revine în semiplanul stâng pentru valori \bar{m} mai mari ale lui K , ceea ce ar face ca sistemul sã devinã stabil, deși am depășit rezerva de amplificãre.