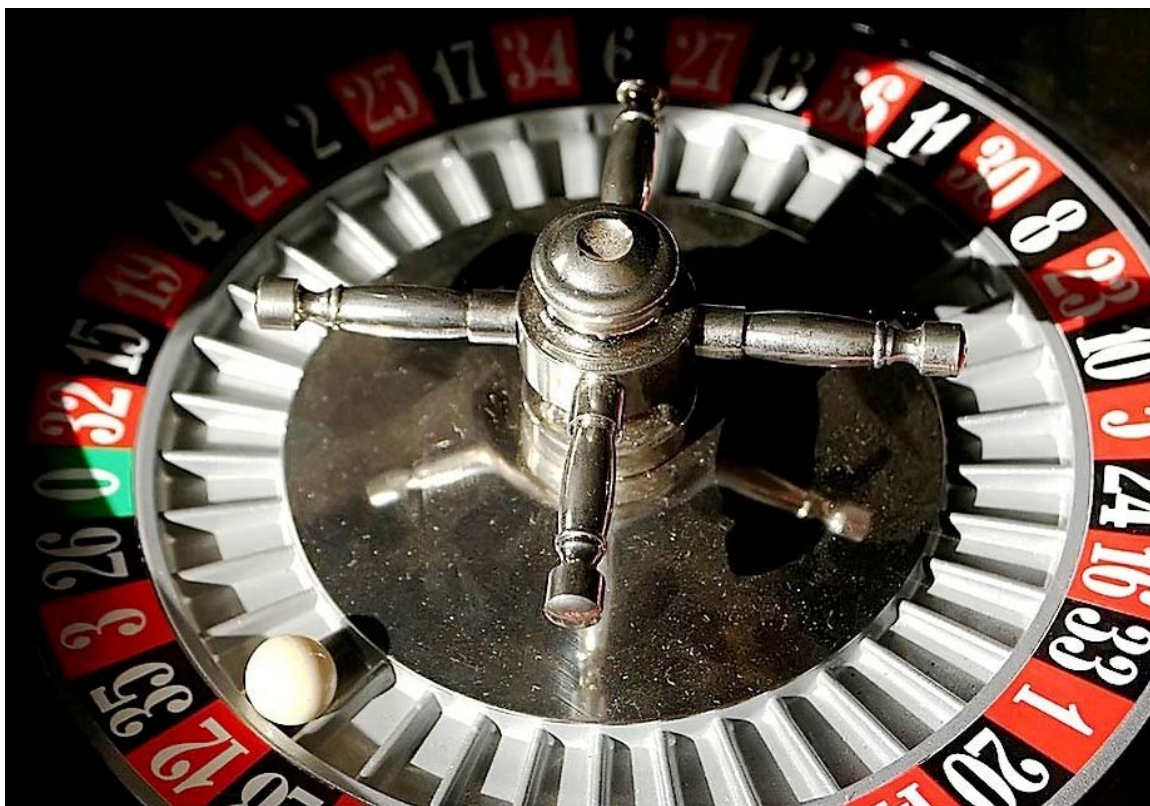


**UNIVERSITATEA "POLITEHNICA"
TIMISOARA**



**PROBABILITATI
SI
PROCESE ALEATOARE**

2007

A.1 Notiunea de "probabilitate"

Ne putem imagina că aruncăm un zar omogen. Nu putem ști ce număr va veni după aruncare. Putem doar să afirmăm că va apărea, cu siguranță, unul dintre numerele din mulțimea $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Fiecare număr are aceeași "șansă" să apară, dar numai după ce "experimentul" de aruncare al zarului a fost efectuat și se rezultă rezultatul.

Experimentul înseamnă a alege, printr-un procedeu dat, un element dintr-o mulțime precisată. O anumită realizare a experimentului se numește "proba" sau "eraudition".

Evenimentul aleator (întâmplător). Dacă rezultatul unui experiment nu poate fi confirmat decât prin efectuarea lui (prin "eraudition") se spune că evenimentul în cauză este "aleator" sau "întâmplător". Și experimentul în cauză se numește aleator sau întâmplător.

Mulțimea S este constituită din erauditionele (probele) posibile. Efectuând experimentul obținem un rezultat $\omega_i \in S$. Se spune că $\{\omega_i\}$ este un eveniment simplu. Se pot imagina evenimente mai complexe, cum ar fi apariția unui număr par $E_{ev} = \{2, 4, 6\}$. Mulțimea tuturor evenimentelor posibile este mulțimea partilor lui S . Ea include, pe lângă S și alte evenimente și mulțimea vidă, \emptyset . Dacă S este o mulțime cu n elemente atunci pot fi imaginat 2^n evenimente.

Mulțimea S , privită ca eveniment, se numește "evenimentul sigur" iar mulțimea \emptyset , privită tot ca eveniment, se numește "evenimentul imposibil".

Evenimente mutual exclusive. Dacă

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \tag{A1.1}$$

evenimentele E_1 și E_2 se numesc mutual exclusive sau, simplu, exclusive.

Probabilitatea de producere a unui eveniment poate fi definită axiomatic sau "euristic". Vom prezenta modul axiomatic de introducere a probabilității. Pentru aceasta vom enunța cele trei axiome de probabilitate:

Axiomele probabilității: Dacă E este un eveniment oarecare,

postulăm:

1. $P\{E\} \geq 0$ (A1.2)

2. $P\{S\} = 1$ (A1.3)

3. $P\{E_m \cup E_l\} = P\{E_m\} + P\{E_l\}$, dacă $E_m \cap E_l = \emptyset$ (A1.4).

Adunând aceste axiome rezultă câteva consecințe:

1. Dacă $E^c \cup E = S$ și $E^c \cap E = \emptyset$, E^c fiind evenimentul complementar evenimentului E , atunci conform postulatelor 1, 2 și 3:

$P\{E^c\} = 1 - P\{E\} \leq 1$ (A1.5)

2. Deoarece $S \cup \emptyset = S$ și $S \cap \emptyset = \emptyset$ rezultă că $S^c = \emptyset$, deci

$P\{\emptyset\} = 1 - P\{S\} = 0$ (A1.6)

3. Din axioma 1 și din (A1.5) rezultă că, oricare ar fi evenimentul E :

$P\{E\} \in [0, 1]$ (A1.7)

4. Dacă E_m și E_l nu sunt disjuncte, adică $E_m \cap E_l \neq \emptyset$, atunci

$P\{E_m \cup E_l\} = P\{E_m\} + P\{E_l\} - P\{E_m \cap E_l\}$ (A1.8)

5. Dacă $E_m \subset E_l$ atunci $E_l = E_m \cup (E_l \setminus E_m)$ unde E_m și $E_l \setminus E_m$ sunt disjuncte, avem:

$P\{E_l\} = P\{E_m\} + P\{E_l \setminus E_m\} \geq P\{E_m\}$ (A1.9)

6. Pentru evenimentele E_1, E_2 și E_3 avem:

$P\{E_1 \cap E_2 \cap E_3\} \leq P\{E_1 \cap E_2\} + P\{E_2 \cap E_3\} + P\{E_3 \cap E_1\}$ (A1.10)

7. Tot pentru cele trei evenimente este valabilă și inegalitatea lui Boole:

$P\{E_1 \cup E_2 \cup E_3\} \leq P\{E_1\} + P\{E_2\} + P\{E_3\}$ (A1.11)

sau "limita inferioară a probabilității reuniunii".

Există și un "mod euristic" de introducere a probabilității, pe baza frecvenței de apariție a unui eveniment, ca raport dintre numărul de

costuri "favorabile" producerii evenimentului și numărul total de costuri "proslate":

$$P\{E\} = \frac{\text{nr. de costuri favorabile producerii evenimentului } E}{\text{nr. total de costuri}} = \frac{n_E}{n} \quad (A1.12)$$

Probabilitatea condiționată. Vom considera două evenimente, A și B.

Fie că evenimentul B s-a produs deja și dorim să aflăm care este, în condiția dată, probabilitatea ca să se producă și evenimentul A, probabilitate notată cu $P\{A|B\}$. Ea este probabilitatea condiționată de producere a evenimentului A atunci când evenimentul B s-a produs deja.

Dacă evenimentului B îi corespund n_B costuri favorabile iar evenimentului $A \cap B$ îi corespund n_{AB} costuri favorabile, atunci

$$P\{A|B\} = \frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}$$

unde cu n am notat numărul total de costuri. Am notat deci

$$P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{B\}} \quad (A1.13)$$

unde am revenit la simbolul intersecției, \cap . Putem scrie și

$$P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}} \quad (A1.14)$$

Eliminând $P\{AB\}$ între (A1.13 și A1.14) obținem așa numita formulă a lui Bayes:

$$P\{B|A\} = \frac{P\{A|B\} P\{B\}}{P\{A\}} \quad (A1.15)$$

Formule probabilității totale. Se spune că evenimentele B_i realizează o desfacere a mulținii S dacă

$$\bigcup_{i=1}^N B_i = S, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \text{ dacă } i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (A1.16)$$

Fie A un eveniment oarecare. Nu este evident $A \cap S = A$ deoarece A este parte a lui S. Prin urmare

$$A = A \cap S = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^N B_i \right) = \bigcup_{i=1}^N A \cap B_i$$

Dar $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset$ dacă $i \neq j$
așa că:

Thomas Bayes

From Wikipedia, the free encyclopedia

Thomas Bayes



Born c. 1702
London

Died April 17th 1761
Tunbridge Wells

Nationality British

Thomas Bayes (c. 1702 – April 17, 1761) was a British mathematician and Presbyterian minister, known for having formulated a special case of Bayes' theorem, which was published posthumously.

Contents

- 1 Biography
- 2 Bayes' theorem
- 3 Bayes and Bayesianism
- 4 See also
- 5 References
- 6 External links

Biography

Thomas Bayes was born in London. In 1719 he enrolled at the University of Edinburgh to study logic and theology: as a Nonconformist, Oxford and Cambridge were closed to him.

He is known to have published two works in his lifetime: *Divine Benevolence, or an Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures* (1731), and *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst* (published anonymously in 1736), in which he defended the logical foundation of Isaac Newton's calculus against the criticism of George Berkeley, author of *The Analyst*.

It is speculated that Bayes was elected as a Fellow of the Royal Society in 1742 on the strength of the *Introduction to the Doctrine of Fluxions*, as he is not known to have published any other mathematical works during his lifetime.

Bayes died in Tunbridge Wells, Kent. He is interred in Bunhill Fields Cemetery in London where many Nonconformists are buried.

Bayes' theorem

Bayes' solution to a problem of "inverse probability" was presented in the *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (1764), published posthumously by his friend Richard Price in the

Philosophical Transactions of the Royal Society of London. This essay contains a statement of a special case of Bayes' theorem.

In the first decades of the eighteenth century, many problems concerning the probability of certain events, given specified conditions, were solved. For example, given a specified number of white and black balls in an urn, what is the probability of drawing a black ball? These are sometimes called "forward probability" problems. Attention soon turned to the converse of such a problem: given that one or more balls has been drawn, what can be said about the number of white and black balls in the urn? The *Essay* of Bayes contains his solution to a similar problem, posed by Abraham de Moivre, author of *The Doctrine of Chances* (1718).

In addition to the *Essay Towards Solving a Problem*, a paper on asymptotic series was published posthumously.

Bayes and Bayesianism

Bayesian probability is the name given to several related interpretations of probability, which have in common the notion of probability as something like a partial belief, rather than a frequency. This allows the application of probability to all sorts of propositions rather than just ones that come with a reference class, and allows for a cleaner foundation than the frequentist interpretation. "Bayesian" has been used in this sense since about 1950.

It is not at all clear that Bayes himself would have embraced the very broad interpretation now called Bayesian. It is difficult to assess Bayes' philosophical views on probability, as the only direct evidence is his essay, which does not go into questions of interpretation. In the essay, Bayes defines *probability* as follows (Definition 5).

The probability of any event is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the chance of the thing expected upon it's [sic] happening

In modern utility theory we would say that expected utility is - sometimes, because buying risk for small

amounts or buying security for big amounts also happens - the probability of an event times the payoff received in case of that event. Rearranging that to solve for the probability, we obtain Bayes' definition. As Stigler (citation below) points out, this is a subjective definition, and does not require repeated events; however, it does require that the event in question be observable, for otherwise it could never be said to have "happened". (Some would argue, however, that things can happen without being observable.)

Thus it can be argued, as Stigler does, that Bayes intended his results in a rather more limited way than modern Bayesians; given Bayes' definition of probability, his result concerning the parameter of a binomial distribution makes sense only to the extent that one can bet on its observable consequences.

See also

- Empirical Bayes

References

- Andrew I. Dale. "Most Honourable Remembrance: The Life and Work of Thomas Bayes". ISBN 0-387-00499-8. Springer, 2003.
- Stephen M. Stigler. "Thomas Bayes' Bayesian Inference," *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, 145:250-258, 1982.
- Stephen M. Stigler. "Who Discovered Bayes's Theorem?" *The American Statistician*, 37(4):290-296, 1983.
- Michael Kanellos. "18th-century theory is new force in computing" CNET News, 18 Feb 2003.

External links

- Who was The Rev. Thomas Bayes?
- Biographical sketch of Thomas Bayes
- Thomas Bayes. "An essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances" (*Bayes's essay in the original notation*)
- D.R. Bellhouse. "On Some Recently Discovered Manuscripts of Thomas Bayes"

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^N P\{A \cap B_i\} = \sum_{i=1}^N P\{A|B_i\}P\{B_i\}$$

Deci, dacă $\{B_i\}, i=1, 2, \dots, N$, realizează o desfacere a mulțimii S este valabilă "formula probabilității totale":

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^N P\{A|B_i\}P\{B_i\} \quad (A1.17)$$

Probabilitatea condiționată de producerea a două evenimente. Dacă se produc simultan două evenimente B și C , dorim să determinăm probabilitatea de producere a evenimentului A , în aceste condiții, adică

$$P\{A|B, C\} = P\{A|BC\} = \frac{P\{ABC\}}{P\{BC\}}$$

Dar: $P\{BC\} = P\{B|C\}P\{C\}$

are că eliminând $P\{BC\}$ rezultă că

$$P\{ABC\} = P\{A|BC\}P\{B|C\}P\{C\} \quad (A1.18)$$

Evenimente statistice independente. Dacă evenimentele A și B sunt astfel încât

$$P\{A|B\} = P\{A\} \quad (A1.19)$$

se spune că cele două evenimente sunt statistice independente. Producerea evenimentului B nu influențează probabilitatea de producere a evenimentului A . Substituind (A1.19) în (A1.13) obținem că, pentru evenimentele A și B statistice independente:

$$P\{AB\} = P\{A\}P\{B\} \quad (A1.20)$$

A2. Variabile aleatoare.

Definiție. O funcție definită pe spațiul S și cu valori în mulțimea reală pe numere, variabilă aleatoare.

Dacă ω_i este un eveniment elementar din S care se produce atunci variabilei aleatoare $X(\omega)$ îi se atribuie valoarea numerică x_i

$$X(\omega_i) = x_i$$

↑ ↑
 Ver. aleatoare Număr real

(A2.1)

Dacă S este o mulțime discretă atunci și variabila aleatoare $X(\omega)$ este și ea "discretă". Fiecărui eveniment ω_i îi se asociază o probabilitate

Prin urmare:

$$P\{x_i\} = P\{X(\omega_i) = x_i\} = f_X(x_i) \tag{A2.2}$$

Avem deci probabilitatea ca core variabila aleatoare X sa a anumite valori reale (un numar), x . Vom numi ^{$f_X(x)$} functia de frecventa a variabilei aleatoare X . Ea se numeste si functia repartitiei de masa probabilitate, PMF (Probability Mass Function).

Daca spatiul de rezultate S este o multime continua, de obicei un segment al axei reale, atunci X este o variabila aleatoare continua.

Pentru o variabila aleatoare (v.a) continua se defineste functia cumulativa de repartitie $F_X(x)$ prin:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \tag{A2.3}$$

Ea denota core este probabilitatea ca variabila aleatoare (v.a) X sa ia valori sub un nivel fixat, x .

Functia $F_X(x)$ are urmatoarele proprietati remarcabile:

- 1. $F_X(-\infty) = 0$
- 2. $F_X(\infty) = 1$
- 3. $F_X(x)$ nu este descrescatoare

} (A2.4)

Derivata acestei functii pe numeste densitatea de probabilitate sau densitatea de repartitie a v.a. continue:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{A2.5}$$

Este evident ca

$$f_X(x) dx = P\{x < X \leq x + dx\} \tag{A2.6}$$

si pentru Δx suficient de mic

$$f_X(x) \Delta x \approx P\{x < X < x + \Delta x\} \tag{A2.7}$$

Oricare ar fi a si b din domeniul de valori ale v.a. continue,

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a) \tag{A2.8}$$

Probabilitatea ca o variabila aleatoare X sa ia o valoare si sa nu faca parte dintr-un interval este nulla:

$$P\{X=a\} = P\{a < X \leq a\} = \int_a^a p_X(x) dx = F_X(a) - F_X(a) = 0 \quad (A2.9)$$

A3. Operatorul de mediere statistică E{·}

Media ponderată cu probabilitatea de apariție a valorii este așa numită "mediu statistică". Operatorul de calcul este:

$$E\{X\} = \sum_i x_i p_X(x_i) \quad (A3.1)$$

sume extinzându-se la toate valorile x_i posibile, pentru o v.a. discretă sau:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx \quad (A3.2)$$

pentru o v.a. continuă.

În ambele cazuri, operatorul de mediere statistică este un operator liniar. Avem deci:

$$E\{aX + c\} = aE\{X\} + c \quad (A3.3)$$

Dacă dorim, putem media statistică o funcție de v.a. X , $g(X)$. Avem:

$$E\{g(X)\} = \sum_i g(x_i) p_X(x_i) \quad (A3.4)$$

dacă X este o v.a. discretă sau

$$E\{g(X)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (A3.5)$$

dacă X este o v.a. continuă.

În legătură cu operatorul de mediere statistică vom da momentele de ordin m pentru v.a. X și pentru v.a. centrată $X - E\{X\}$:

$$E\{X^m\} = \sum_i x_i^m p_X(x_i) \quad ; \quad E\{X^m\} = \int_a^b x^m p_X(x) dx \quad (A3.6)$$

$$E\{(X - E\{X\})^m\} = \sum_i (x_i - \mu_X)^m p_X(x_i) \quad ; \quad E\{(X - E\{X\})^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^m p_X(x) dx \quad (A3.7)$$

unde am notat media cu μ_X :

$$E\{X\} = \mu_X \quad (A3.8)$$

Momentele de ordinul doi $E\{X^2\}$ și $E\{(X - \mu_X)^2\}$ au semnificații aparte.

Astfel

$$E\{X^2\} = I_X \quad (A3.9)$$

este puterea variabilei aleatoare.

⊛ Operatorul $D_{\text{inf}}\{x\}$ nu este un operator liniar. Pentru el sunt valabile următoarele reguli de calcul:

1. $D_{\text{inf}}\{c\} = 0$, $c = \text{cst.}$

2. $D_{\text{inf}}\{ax\} = a^2 D_{\text{inf}}\{x\}$, $a = \text{cst.}$

(A3.13)

3. $D_{\text{inf}}\{ax + b\} = a^2 D_{\text{inf}}\{x\}$.

completare pe pag 7.

"Componenta continuă" a v.a. X este chiar μ_x . În jurul ei fluctuează v.a., fluctuația fiind $X - \mu_x$. Media fluctuației este evident zero:

$$E\{X - \mu_x\} = E\{X\} - \mu_x = \mu_x - \mu_x = 0 \quad (A3.10)$$

iar puterea ei poate denumi-se de "varianță" sau "dispersia" v.a.

$$\text{Disp}\{X\} = E\{(X - \mu_x)^2\} \quad (A3.11)$$

este chiar momentul central de ordinul doi al v.a. X . Avem:

$$\begin{aligned} \text{Disp}\{X\} &= E\{X^2 - 2\mu_x X + \mu_x^2\} = E\{X^2\} - 2\mu_x E\{X\} + \mu_x^2 \\ &= E\{X^2\} - 2\mu_x \mu_x + \mu_x^2 \end{aligned}$$

și deci:

$$\text{Disp}\{X\} = E\{X^2\} - \mu_x^2 = E\{X^2\} - (E\{X\})^2 \quad (A3.12)$$

sau

$$E\{X^2\} = \mu_x^2 + \text{Disp}\{X\} \quad (A3.12b)$$

Puterea variabilității aleatoare este purta dintre puterea mediei și puterea de fluctuație.

Funcția caracteristică a unei v.a. este media statistică a funcției

$$g(x) = e^{j\omega x}$$

adică

$$\phi_X(\omega) = E\{e^{j\omega X}\} \quad (A3.14)$$

Pentru o v.a. X continuă, de exemplu, funcția caracteristică ia forma

$$\phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x} dx = \mathcal{F}\{f_X(x)\}(-\omega) \quad (A3.15)$$

Altfel spus funcția caracteristică este pereche Fourier (e drept de argument cu semn schimbat) a densității de probabilitate (pdf-ului):

$$f_X(x) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \phi_X(\omega) = \mathcal{F}\{f_X(x)\}(-\omega) \quad (A3.16)$$

Cunoașterea funcției caracteristice permite calculul comod al momentelor "necesitate" de ordin n :

$$E\{X^n\} = \frac{1}{j^n} \frac{d^n \phi_X(\omega)}{d\omega^n} = \frac{d^n f_X(j\omega)}{d(j\omega)^n} \quad (A3.17)$$

A4. Inegalitatea lui Cebîșev. Probabilitatea ca fluctuația v.a. X , $X - \mu_x$ să fie în banda $\pm \gamma$ sau, altfel zis, probabilitatea ca v.a. X să se abată cu mai mult decât $\pm \gamma$ de la medie, este

$P\{|X - \mu_X| > r\}$. Pentru a estima o margine superioară a acestei probabilități folosim de la Disp $\{X\}$:

$$\begin{aligned} \text{Disp}\{X\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = \int_{\{x: |x - \mu_X| > r\}} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx + \int_{\{x: |x - \mu_X| \leq r\}} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \\ &\geq \int_{\{x: |x - \mu_X| > r\}} r^2 f_X(x) dx \geq \int_{\{x: |x - \mu_X| > r\}} r^2 f_X(x) dx \\ &= r^2 \int_{\{x: |x - \mu_X| > r\}} f_X(x) dx = r^2 P\{|X - \mu_X| > r\} \end{aligned}$$

Rezultă deci că:

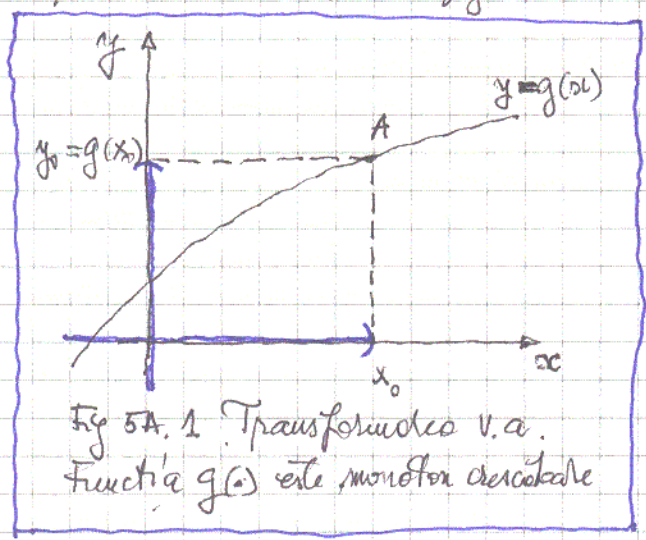
$$P\{|X - \mu_X| > r\} \leq \frac{r^2}{\text{Disp}\{X\}} \tag{A4.1}$$

inegalitatea lui Cebășev.

A5. Transformări ale variabilei aleatoare. Vom considera transformarea v.a. X în v.a. Y prin funcția $g(\cdot)$, monoton crescătoare

$$Y = g(X) \tag{A5.1}$$

asa cum se arată în figura A5.1. Fie $A(x_0, y_0 = g(x_0))$.



$$P\{Y < y_0\} = P\{X < x_0\} \tag{A5.2}$$

unde $x_0 \in \mathbb{R}$ este un punct precisat, dar oarecare. Avem deci:

$$F_Y(y_0) = F_X(x_0)$$

sau, punând la indicele 0

$$F_Y(y) = F_X(x)$$

care prin diferențiere conduce la

$$f_Y(y) dy = f_X(x) dx \quad ; \quad dy > 0, dx > 0 \tag{A5.3}$$

din care

$$f_Y(y) = f_X(x) \frac{dx}{dy} = f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \tag{A5.4}$$

Vom considera acum că $g(x)$ este o funcție monoton descrescătoare, așa cum se arată în figura 5A.2. Avem:

$$P\{X < x_0\} = P\{Y > y_0\} = P\{Y \in \mathbb{R} - Y < y_0\} = 1 - P\{Y < y_0\}$$

Pafnuty Chebyshev

From Wikipedia, the free encyclopedia

Pafnuty Chebyshev



Pafnuty Lvovich Chebyshev

Born

May 26 [O.S. May 14] 1821
Borovsk, Kaluga, Russia

Died

December 8 [O.S. Nov. 26] 1894
St Petersburg, Russia

Residence

 Russia

Nationality

 Russian

Field

Mathematician

Institutions

St Petersburg University

Alma mater

Moscow University

Academic advisor	Nikolai Brashman Dmitry Grave
Notable students	Aleksandr Korkin Aleksandr Lyapunov Andrei Markov
Known for	Mechanics and analytical geometry
Notable prizes	Demidov Prize (1836)

Pafnuty Lvovich Chebyshev (Russian:)
(May 26 [O.S. May 14] 1821 – December 8 [O.S. November 26] 1894) was a Russian mathematician. His name is also transliterated in various ways, e. g. as **Chebychev**, **Chebyshev**, **Tchebycheff** or **Tschebyscheff** (French and German transcriptions).

Contents

- 1 Biography
 - 1.1 Early years
 - 1.2 University studies
 - 1.3 Adult years
- 2 Mathematical contributions
- 3 Legacy
- 4 See also
- 5 External links

Biography

Early years

One of nine children, he was born in the village of Okatovo, the district of Borovsk, province of Kaluga. His father was the wealthy landowner Lev Pavlovich Chebyshev. Pafnuty Lvovich got his first education at home from his mother Agrafena Ivanovna Chebysheva (reading and writing) and his cousin Avdotya Kvintillianovna Sukhareva (French and arithmetic). His music-teacher also played an important role in Chebyshev's education, for she "brought up his mind to exactness and analysis", as Chebyshev himself mentioned.

Possibly a physical handicap, whose reasons are yet unknown, was important for Chebyshev's adolescence and development: He limped since his childhood and walked with a stick. Therefore his parents had to give up the idea to make an officer's career possible for him, although he would have followed the family's tradition. His complaint prevented him from most of the usual children's games, so very soon he devoted himself to a passion, which would determine his whole life: the construction of mechanisms.

In 1832, the family moved to Moscow mainly to attend to the education of their eldest sons (Pafnuty and Pavel, who would become a lawyer). The education continued at home, P.N. Pogorelski was engaged as a teacher for mathematics and physics, who was held as one of the best teachers in Moscow and, e. g. had educated the writer Ivan Sergeevich Turgenev. For the other subjects teachers with excellent reputation were invited, too.

University studies

In summer 1837, Chebyshev passed the registration examinations and in September he started the studies of mathematics at the second philosophical department of Moscow university. Among his teachers were counted N.D. Brashman, N.E. Zernov and D.M. Perevoshchikov. No doubt that among them Brashman had the greatest influence on Chebyshev. He instructed him in practical mechanics and probably showed him the work of the French engineer J.V. Poncelet. In 1841 Chebyshev was awarded the silver medal for his work "calculation of the roots of equations" which had already been finished in 1838. In this contribution Chebyshev derived an approximating algorithm for the solution of algebraic equations of n th degree based on Newton's algorithm. In the same year he finished his studies as "most outstanding candidate".

In 1841, Chebyshev's financial situation drastically changed. In Russia a famine broke out, Chebyshev's parents were forced to leave the city and were not able to support their son anymore. Nevertheless, he decided to continue his mathematical studies and prepared the master examinations which spread over half a year. He passed the final examination in October 1843. In 1846 he defended his master thesis "An Attempt to an Elementary Analysis of Probabilistic Theory". The biographer Prudnikov assumes that

Chebyshev was directed to this mathematical branch after getting knowledge about recently edited books on probabilistic theory or the revenue of the insurance industry in Russia.

Adult years

In 1847, Chebyshev defended his dissertation *pro venia legendi* "About integration with the help of logarithms" at St Petersburg University and thus obtained the right to teach there as a lecturer. At that time some of Leonhard Euler's works were rediscovered by P. N. Fuss and were being edited by V. Ya. Bunyakovsky, who encouraged Chebyshev to engage in the study of them, something that would come to direct his life's work. Already in 1848, he had submitted his work theory of congruences for his doctorate, which he defended in May, 1849. After one year he was elected for an extraordinary professor at St Petersburg University, 1860 he became ordinary professor. In 1872, after 25 years of lectureship, he became merited professor. In 1882 he left the university and completely devoted his life to research.

Besides his lectureship at the university from 1852 to 1858, Chebyshev taught practical mechanics at the Alexander Lyceum in Tsarskoe Selo (now Pushkin), a southern suburb of St Petersburg.

His scientific achievements give the reasons for his election for a junior academician (*adjunkt*) in 1856. Later on, he became an extraordinary (1856) and in 1858 an ordinary member of the Imperial Academy of Sciences. In the same year he became honorable member of Moscow University. Moreover, he assumed other honourable appointments and was decorated several times: in 1856, Chebyshev became member of the scientific committee of the ministry of national education. In 1859, he became an ordinary member of the ordnance department of the academy with the adoption of the headship of the commission for mathematical questions according to ordnance and experiments related to the theory of shooting. The Paris academy elected him corresponding member in 1860 and full foreign member in 1874. In 1893, he was elected honorable member of the St. Petersburg Mathematical Society, recently founded in 1890.

Pafnuty Lvovich Chebyshev died November 26, 1894, in St Petersburg.

Mathematical contributions

Chebyshev is known for his work in the field of probability, statistics and number theory. Chebyshev's inequality says that if X is a random variable with standard deviation σ , the probability that the outcome of X is no less than $a\sigma$ away from its mean is no more than $1/a^2$:

$$\Pr(|X - \mathbf{E}(X)| \geq a\sigma) \leq \frac{1}{a^2}$$

Chebyshev's inequality is used to prove the weak law of large numbers.

The Bertrand-Chebyshev theorem (1845|1850) states that for any $n > 1$, there exists a prime number p such that $n < p < 2n$. It is a consequence of Chebyshev inequalities for the number $\pi(x)$ of prime numbers less than x , which state that $\pi(x)$ is of the order of $n / \log(n)$. A more precise form is given by the celebrated prime number theorem: the *quotient* of the two expressions approaches 1 as n tends to infinity.

Legacy

Chebyshev is considered one of the founding fathers of Russian mathematics. Among his students were Dmitry Grave, Aleksandr Korkin, Aleksandr Lyapunov and Andrei Markov, themselves well known and prolific mathematicians. According to the Mathematics Genealogy Project, Chebyshev has about 4,000 mathematical descendants.

See also

- Chebyshev's inequality
- Chebyshev distance
- Chebyshev filter, in electronics and signal processing, a family of electronic filters
- Chebyshev function, in number theory
- Chebyshev polynomials
- Chebyshev's sum inequality
- Chebyshev's equation
- Chebyshev linkage, a straight line generating linkage.
- Chebyshev-Markov-Stieltjes inequalities

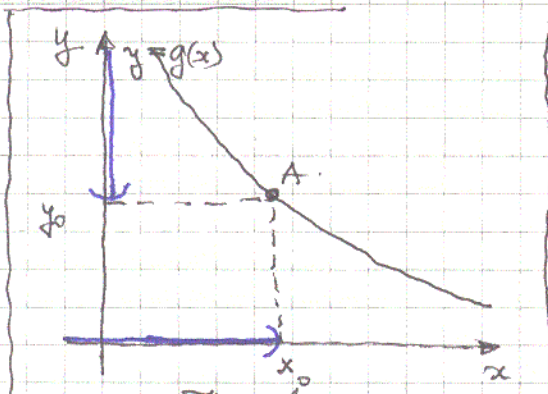


Fig A5.2 Transformarea v.a
Funcția g(.) este monoton descrescătoare

în remintând la indicele 0 :

$$P\{Y < y\} = 1 - P\{X < x\}$$

care prin diferențiere dă :

$$f_Y(y) dy = -f_X(x) dx ; dx > 0, dy < 0. \quad (A5.5)$$

în deii

$$f_Y(y) = -f_X(x) \frac{dx}{dy} = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \quad (A5.6)$$

Relațiile (A5.4) și (A5.6) conduc la concluzia că

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (A5.7)$$

Dacă g(.) are porțiuni crescătoare și porțiuni descrescătoare pe M în intervale, și anume similitudine arată că

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^M f_X(g_i^{-1}(y)) \left| \frac{dg_i^{-1}(y)}{dy} \right| \quad (A5.8)$$

unde $g_i^{-1}(y)$ este funcția inversă funcției g(x) pe subintervalul de monotonie notat cu indexul "i".

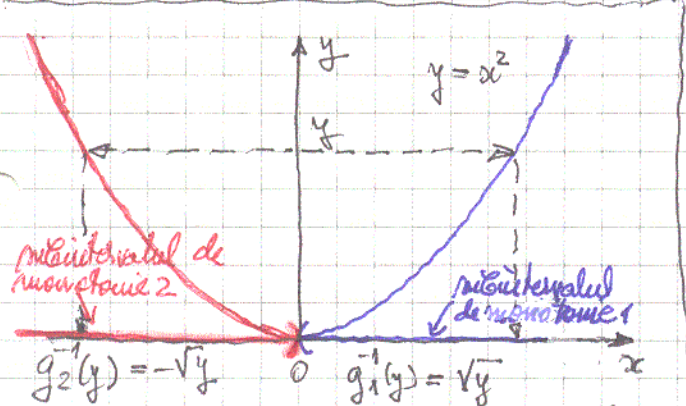


Fig A5.3 Subintervalele de monotonie pentru $y = g(x^2)$ și cele două inversse, \sqrt{y} și $-\sqrt{y}$

Pentru exemplificare fie $g(x) = x^2$

Șa este monotonă pe :

- 1: $x \in [0, \infty)$ cu $g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$ și $y \geq 0$
- 2: $x \in (-\infty, 0)$ cu $g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ și $y > 0$

Aplicăm (A5.8) cu

$$\left| \frac{dg_1^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} ; \left| \frac{dg_2^{-1}(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

și obținem :

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \quad (A5.9)$$

Vom mai considera o transformare de forma

$$Y = \sin \Theta ; \Theta \in [-\pi, \pi] \quad (A5.10)$$

funcția fiind $y = \sin \theta$, așa cum se arată în figura A5.4

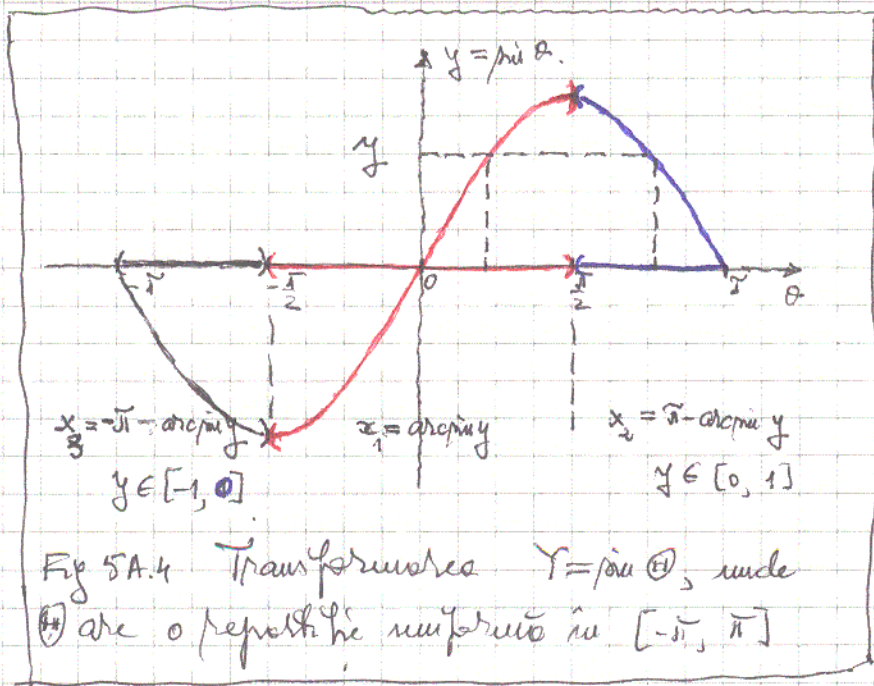


Fig 5A.4 Transformarea $Y = \sin \Theta$, unde Θ are o repartiție uniformă în $[-\pi, \pi]$

10.
Vom considera că repartiția v.a. Θ este una uniformă cu

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \theta \in [-\pi, \pi]$$

și este nulă în rest.

Se vede că pentru $y > 0$,

$y \in [0, 1]$ rezultă:

$$g_1^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$g_2^{-1}(y) = \pi - \arcsin y$$

și pentru $y < 0$, $y \in [-1, 0]$:

$$g_1^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$g_3^{-1}(y) = -\pi - \arcsin y$$

Așadar

$$\left| \frac{d g_i^{-1}(y)}{d y} \right| = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad i=1,2,3.$$

și deci

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_{\Theta}(\arcsin y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_{\Theta}(\pi - \arcsin y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & ; y \in [0, 1) \\ f_{\Theta}(\arcsin y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_{\Theta}(-\pi - \arcsin y) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & ; y \in (-1, 0) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & ; y \in [0, 1) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & ; y \in (-1, 0) \end{cases}$$

sau, în final:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}} \quad ; y \in (-1, 1) \quad (5A.11)$$

În figura 5A.5 se dau $f_{\Theta}(\theta)$ și $f_Y(y)$.

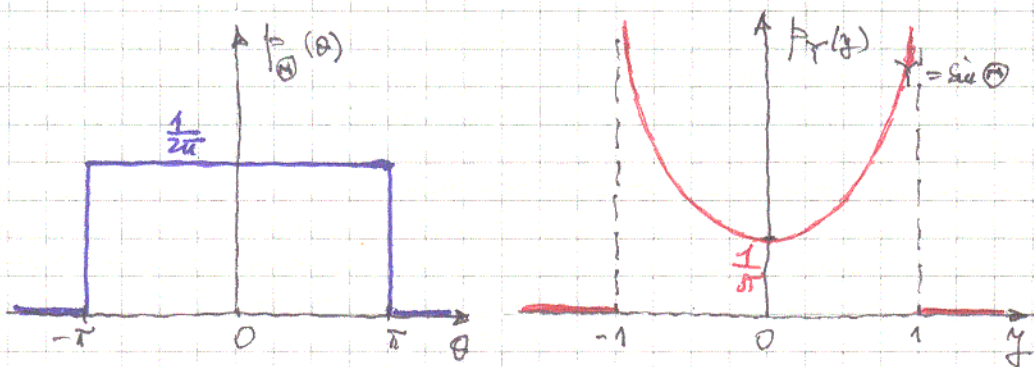


Fig 5A.5 Repartiția uniformă pentru Θ și repartiția pentru $Y = \sin \Theta$.

AG. Câteva repartiții uzuale.

1. Variabile aleatoare discrete repartizată Bernoulli. Pentru o astfel de v.a. discretă, PMF este

$$p_x\{k\} = \begin{cases} p & \text{pentru } k=1 \text{ sau "succes"} \\ 1-p & \text{pentru } k=0 \text{ sau "insucces"} \end{cases} \quad (AG.1)$$

Se spune că X are o repartiție Bernoulli de parametru p și se scrie simbolic:

$$X \sim \text{Ber}\{p\} \quad (AG.2)$$

Putem calcula media și dispersia v.a. repartizate Bernoulli:

$$\mu_X = \sum_{k=0}^1 k p_x\{k\} = 0 \cdot p_x\{0\} + 1 \cdot p_x\{1\} = 0(1-p) + 1p = p \quad (AG.3)$$

$$\text{Disp}\{X\} = \sum_{k=0}^1 k^2 p_x\{k\} - \mu_X^2 = p - p^2 = p(1-p) \geq 0 \quad (AG.4)$$

2. Variabile aleatoare discrete repartizată binomială. Dacă efectuăm cu n de n experimente de tip Bernoulli cu parametrul p , probabilitatea de a obține k succese în cele n încercări este o v.a. discretă de tip binomial, cu PMF:

$$p\{k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad ; \quad k=0, 1, \dots, n \quad (AG.5)$$

în care

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad ; \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (AG.6)$$

și

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \quad ; \quad 1! = 1 \quad \text{și} \quad 0! = 1$$

Media repartiției binomiale este

$$\mu_X = E\{X\} = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} \mu_x &= \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k-1=K}^{n-1} \frac{n!}{K!(n-K-1)!} p^{K+1} (1-p)^{n-K-1} = n p \sum_{K=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{K!(n-1-K)!} p^K (1-p)^{n-1-K} \\ &= n p (1 + 1 - p)^{n-1} \\ &= n p. \end{aligned} \tag{A6.7}$$

Procedând în mod asemănător se poate determina și dispersia repartiției binomiale

$$\begin{aligned} \text{Disp}\{X\} &= \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - (np)^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned} \tag{A6.8}$$

3. Variabila aleatoare discretă repartizată geometric. Efectuăm ^{repetat} experimente de tip Bernoulli, statistic independente, până ce obținem un prim succes. Încăute am avut $k-1$ insuccese și în experimenta cu nr. k obținem primul succes. Avem

$$p_x\{k\} = (1-p)^{k-1} p \quad ; \quad k=1, 2, \dots \tag{A6.9}$$

Avem și:

$$\mu_x = E\{X\} = \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} p = \frac{1}{p} \tag{A6.10}$$

$$\text{Disp}\{X\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \tag{A6.11}$$

4. Variabila aleatoare discretă repartizată Poisson, exprimă probabilitatea apariției unui număr de k evenimente într-o unitate de timp, dacă aceste evenimente apar cu o rată λ cunoscută.

$$p_x\{k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad ; \quad k=0, 1, 2, \dots \tag{A6.12}$$

Vom calcula media distribuției Poisson. Avem:

$$\mu_x = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!}$$

Dezvoltarea în serie a lui e^x este:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Punem $x = \lambda$ și avem că

$$e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

În consecință, rezultă că

$$\mu_x = E\{X\} = \lambda. \quad (A6.13)$$

În mod asemănător se poate calcula și dispersia variabilei distribuite Poisson:

$$\text{Disp}\{X\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \lambda \quad (A6.14)$$

5. Repartitia Dirac. Repartitia unei constante δ_a este

$$f(x) = \delta(x-a) \quad (A6.15)$$

Se poate verifica faptul că

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

Media constantei este

$$\mu_a = \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x-a) dx = x|_{x=a} = a$$

adică chiar constanta. Dispersia constantei este nulă:

$$\text{Disp}\{a\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x-a) dx - a^2 = a^2 - a^2 = 0$$

6. Variabile aleatoare continue repartizată uniform. Densitatea de probabilitate este, pentru $X \in [a, b]$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}; & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (A6.16)$$

Media și dispersia se calculează după cum urmează:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned} \quad (A6.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Disp}\{X\} &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad (A6.18)$$

7. Variabilă aleatoare continuă cu repartiție normală sau gaussiană.

Parametrii de core depinde repartiția normală sunt media μ și dispersia σ^2 . Faptul că o variabilă aleatoare este repartizată normal se marchează, simbolic, prin

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2) \tag{A6.19}$$

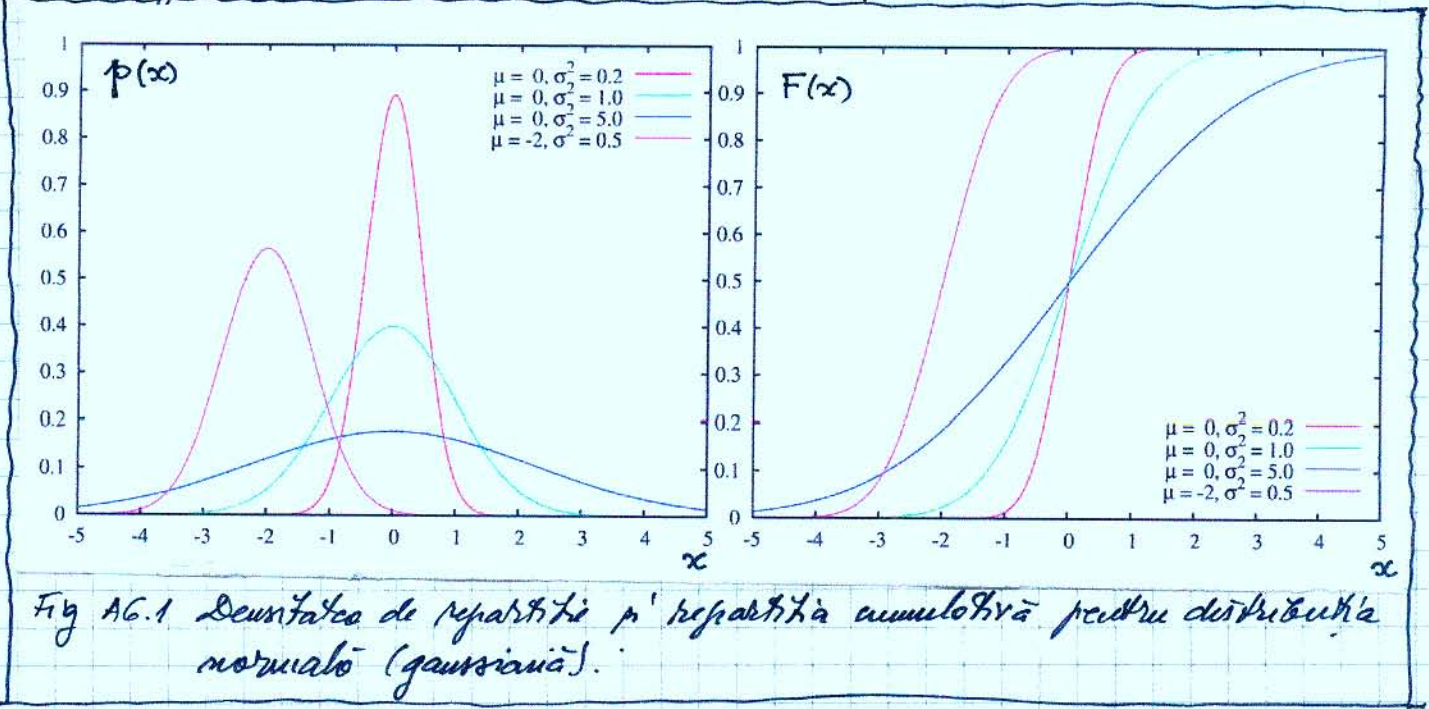
Densitatea de probabilitate a unei astfel de variabile aleatoare este :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \tag{A6.20}$$

iar repartiția cumulativă are forma :

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} du \tag{A6.21}$$

În figura A6.1 sunt reprezentate $f_X(x)$ și $F_X(x)$ pentru patru medii



și patru dispersii. Maximul curbei $f_X(x; \mu)$ are loc pentru $x = \mu$ iar "întinderea" curbei pe axa x este determinată de σ , și are cam 6σ .

Avem :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 \tag{A6.22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu \tag{A6.23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 \tag{A6.24}$$

Valoarea σ^2 se numește dispersie iar valoarea σ se numește "abatere standard".

Repartiția normală "standard" este cea pentru care $\mu=0$ și $\sigma^2=1$ adică $N(0,1)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (A6.25)$$

Particularizând relațiile (A6.22) și (A6.24) pentru $\mu=0$ și $\sigma=1$ obținem următoarele integrale utile în multe cazuri:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad (A6.22b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad (A6.24b)$$

Funcția de repartiție cumulativă a v.a. cu repartiție normală standard și mai nota cu $\Phi^*(x)$ și ea este tabelată:

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (A6.26)$$

Este ușor de vădit că, pentru $X \sim N(\mu, \sigma)$, putem exprima F prin Φ^*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \Phi^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad (A6.27)$$

Funcția caracteristică aferentă repartiției normale $N(\mu, \sigma)$ este

$$\phi(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \quad (A6.28)$$

(Nu trebuie confundată funcția caracteristică ϕ cu funcția de repartiție cumulativă a v.a. normale standard.)

Recurgând la funcția tabelată Φ^* putem determina probabilitatea ca o v.a. cu repartiție normală să se afle într-un interval, $[a, b]$

$$P\{a \leq X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a) = \Phi^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad (A6.29)$$

Vom conștientiza și că, pentru x_0 precizat

$$\begin{aligned} \Phi(x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_0}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} (-dv) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x_0} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = 1 - \Phi^*(-x_0) \end{aligned}$$

Am stabilit că

$$\phi^*(-x_0) = 1 - \phi(x_0) \tag{A6.20}$$

Vom determina probabilitatea ca X să ia valori în intervalul $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$:

$$P\{\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\} = \phi^*(1) - \phi^*(-1) = 2\phi^*(1) - 1$$

Dar $\phi^*(1) = 0,8413$ are că

$$P\{\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma\} = 0,6826 \approx 68,26\% \tag{A6.21}$$

În 68,26% dintre cazuri valorile luate de v.a. gaussiană se află într-o bandă de $\pm \sigma$ în jurul mediei μ .

Pentru intervalul $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ avem:

$$P\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\} = 2\phi^*(2) - 1$$

și cum $\phi^*(2) = 0,9772$ rezultă că

$$P\{\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma\} = 0,9544 \approx 95,44\% \tag{A6.22}$$

ceea înseamnă că în 95,44% dintre cazuri valorile vor fi într-o bandă de $\pm 2\sigma$ în jurul mediei μ .

Dacă luăm un interval și mai larg $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$:

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 2\phi^*(3) - 1$$

și cum $\phi^*(3) = 0,9986$ rezultă că

$$P\{\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma\} = 0,9972 \approx 99,72\% \tag{A6.23}$$

ceea înseamnă că doar foarte rar valorile v.a. X se vor abate cu mai mult de $\pm 3\sigma$ de la media μ .

În figura A6.2 se dau probabilitățile, pe subintervale, pentru ca v.a. să intre în acele subintervale.

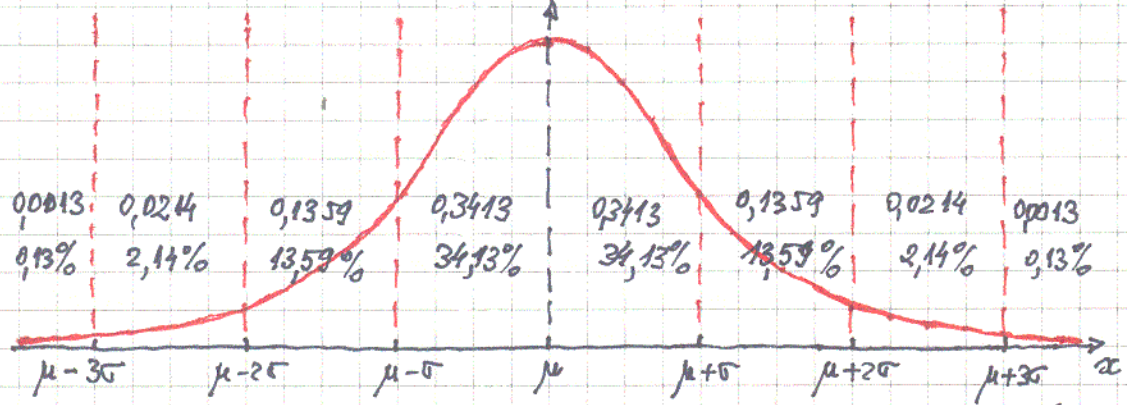


Fig A6.2 Probabilitățile cu care o v.a. gaussiană ia valori în diferite subintervale din jurul valorii medii

Servindu-ne de funcția caracteristică a v.a. normale, (A6.28), și de formula (A3.17) se pot calcula, succesiv momentele:

$$\begin{aligned}
 E\{X^2\} &= \mu^2 + \sigma^2 & E\{(X-\mu)^2\} &= \sigma^2 \\
 E\{X^3\} &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 & E\{(X-\mu)^3\} &= 0 \\
 E\{X^4\} &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 & E\{(X-\mu)^4\} &= 3\sigma^4
 \end{aligned}
 \tag{A6.34}$$

Quantila de ordinul α este valoarea x_α pentru care

$$P\{X \leq x_\alpha\} = \alpha \tag{A6.35}$$

sau

$$F_X(x_\alpha) = \alpha \tag{A6.36}$$

Cum înră

$$F_X(x_\alpha) = \Phi\left(\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma}\right) = \alpha$$

rezultă că

$$\frac{x_\alpha - \mu}{\sigma} = \Phi^{*-1}(\alpha)$$

sau că:

$$x_\alpha = \mu + \sigma \Phi^{*-1}(\alpha) \tag{A6.37}$$

Spre exemplu, pentru $\alpha = 0,5$, $\Phi^*(0) = 0,5$ sau $\Phi^{*-1}(0,5) = 0$ și deci $x_{0,5} = \mu$ sau $P\{X \leq \mu\} = 0,5$. Pentru $\alpha = 0,05$ rezultă $x_{0,05} \approx -1,65$ adică $P\{X \leq \mu - 1,65\sigma\} = 0,05$.

În legătură cu v.a. continue se introduc două noțiuni utile: coeficientul de asimetrie (skewness) și coeficientul de kurtosis.

Coeficientul de asimetrie se definește, în general, prin

$$\gamma_1 = \frac{E\{(X-\mu)^3\}}{[E\{(X-\mu)^2\}]^{\frac{3}{2}}} \tag{A6.38}$$

și, conform cu relațiile (A6.34) are valoarea $\gamma_1 = 0$ în cazul repartiției normale. Acest lucru înseamnă că repartiția gaussiană este simetrică față de medie.

Coeficientul de kurtosis are definiția

$$\gamma_2 = \frac{E\{(X-\mu)^4\}}{[E\{(X-\mu)^2\}]^2} - 3 \tag{A6.39}$$

Conform cu (A6.34) coeficientul de kurtosis este și el nul pentru repartiția gaussiană. Vom menționa că, uneori, kurtosis este numită în "exces de kurtosis".

Carl Friedrich Gauss

From Wikipedia, the free encyclopedia

Johann Carl Friedrich Gauss



Carl Friedrich Gauss, painted by Christian Albrecht Jensen

Born	30 April 1777 Brunswick, Germany
Died	23 February 1855 Göttingen, Hannover, Germany
Residence	 Germany
Nationality	 German
Field	Mathematician and physicist
Institutions	Georg-August University
Alma mater	Helmstedt University
Academic advisor	Johann Friedrich Pfaff Friedrich Bessel
Notable students	Christoph Gudermann Christian Ludwig Gerling J. W. Richard Dedekind Johann Encke Johann Listing Bernhard Riemann

	Number theory
Known for	The Gaussian
	Magnetism

Johann Carl Friedrich Gauss or **Gauß** (listen (help·info); Latin: *Carolus Fridericus Gauss*) (30 April 1777 – 23 February 1855) was a German mathematician and scientist of profound genius who contributed significantly to many fields, including number theory, analysis, differential geometry, geodesy, magnetism, astronomy, and optics. Sometimes known as "the prince of mathematicians" and "greatest mathematician since antiquity", Gauss had a remarkable influence in many fields of mathematics and science and is ranked as one of history's most influential mathematicians.

Gauss was a child prodigy, of whom there are many anecdotes pertaining to his astounding precocity while a mere toddler, and made his first ground-breaking mathematical discoveries while still a teenager. He completed *Disquisitiones Arithmeticae*, his magnum opus, at the age of twenty-one (1798), though it would not be published until 1801. This work was fundamental in consolidating number theory as a discipline and has shaped the field to the present day.

Contents

- 1 Biography
 - 1.1 Early years
 - 1.2 Middle years
 - 1.3 Later years, death, and afterwards
 - 1.4 Family
 - 1.5 Personality
- 2 Commemorations
- 3 See also
- 4 References
- 5 External links
- 6 Further reading

Biography

Early years



Statue of Gauss in Brunswick

Gauss was born in Brunswick, in the Duchy of Brunswick-Lüneburg (now part of Lower Saxony, Germany), as the only son of uneducated lower-class parents. According to legend, his gifts became very apparent at the age of three when he corrected, in his head, an error his father had made on paper while calculating finances.

Another famous story, and one that has evolved in the telling, has it that in primary school his teacher, J.G. Büttner tried to occupy pupils by making them add up the integers from 1 to 100. The young Gauss produced the correct answer within seconds by a flash of mathematical insight, to the astonishment of all. Gauss had realized that pairwise addition of terms from opposite ends of the list yielded identical intermediate sums: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, and so on, for a total sum of $50 \times 101 = 5050$ (*see arithmetic series and summation*). (For

more information, see [1] for discussion of original Wolfgang Sartorius von Waltershausen source.)

The Duke of Brunswick awarded Gauss a fellowship to the Collegium Carolinum (now Technische Universität Braunschweig), which he attended from 1792 to 1795, and from there went on to the University of Göttingen from 1795 to 1798. While in college, Gauss independently rediscovered several important theorems; his breakthrough occurred in 1796 when he was able to show that any regular polygon with a number of sides which is a Fermat prime (and, consequently, those polygons with any number of sides which is the product of distinct Fermat primes and a power of 2) can be constructed by compass and straightedge. This was a major discovery in an important field of mathematics; construction problems had occupied mathematicians since the days of the Ancient Greeks. Gauss was so pleased by this result that he requested that a regular heptadecagon be inscribed on his tombstone. The stonemason declined, stating that the difficult construction would essentially look like a circle.

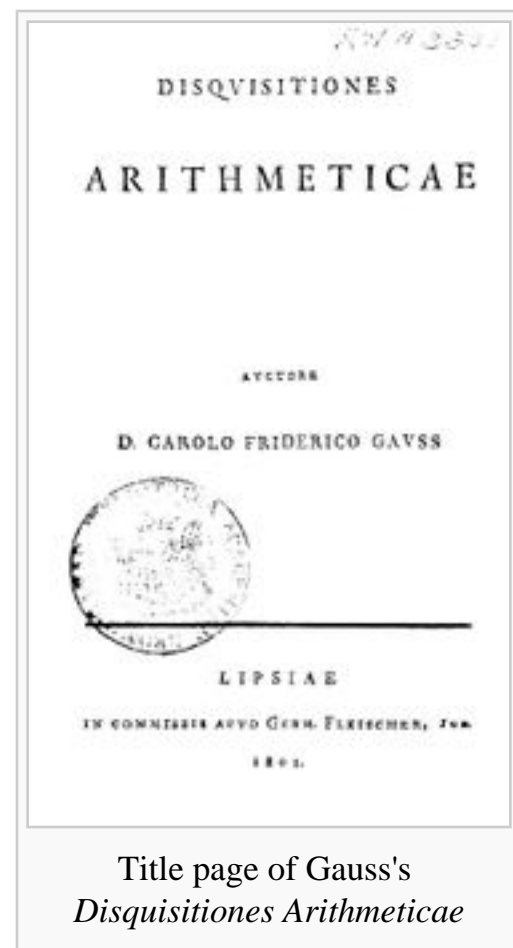
1796 was probably the most productive year for both Gauss and number theory. The construction of the heptadecagon was discovered on March 30. He invented modular arithmetic, greatly simplifying manipulations in number theory. He became the first to prove the quadratic reciprocity law on April 8.

This remarkably general law allows mathematicians to determine the solvability of any quadratic equation in modular arithmetic. The prime number theorem, conjectured on May 31, gives a good understanding of how the prime numbers are distributed among the integers. Gauss also discovered that every positive integer is representable as a sum of at most three triangular numbers on July 10 and then jotted down in his diary the famous words, "Heureka! num= $\Delta + \Delta + \Delta$." On October 1 he published a result on the number of solutions of polynomials with coefficients in finite fields (this ultimately led to the Weil conjectures 150 years later).

Middle years

In his 1799 dissertation, *A New Proof That Every Rational Integer Function of One Variable Can Be Resolved into Real Factors of the First or Second Degree*, Gauss gave a proof of the fundamental theorem of algebra. This important theorem states that every polynomial over the complex numbers must have at least one root. Other mathematicians had tried to prove this before him, e.g. Jean le Rond d'Alembert. Gauss's dissertation contained a critique of d'Alembert's proof, but his own attempt would not be accepted owing to implicit use of the Jordan curve theorem. Gauss over his lifetime produced three more proofs, probably due in part to this rejection of his dissertation; his last proof in 1849 is generally considered rigorous by today's standard. His attempts clarified the concept of complex numbers considerably along the way.

Gauss also made important contributions to number theory with his 1801 book *Disquisitiones Arithmeticae*, which contained a clean presentation of modular arithmetic and the first proof of the law of quadratic reciprocity. In that same year, Italian astronomer Giuseppe Piazzi discovered the planetoid Ceres, but could only watch it for a few days. Gauss predicted correctly the position at which it could be found again, and it was rediscovered by Franz Xaver von Zach on December 31, 1801 in Gotha, and one day later by Heinrich Olbers in Bremen. Zach noted that "without



the intelligent work and calculations of Doctor Gauss we might not have found Ceres again." Though Gauss had up to this point been supported by the stipend from the Duke, he doubted the security of this arrangement, and also did not believe pure mathematics to be important enough to deserve support. Thus he sought a position in astronomy, and in 1807 was appointed Professor of Astronomy and Director of the astronomical observatory in Göttingen, a post he held for the remainder of his life.

The discovery of Ceres by Piazzi on January 1, 1801 led Gauss to his work on a theory of the motion of planetoids disturbed by large planets, eventually published in 1809 under the name *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientum* (theory of motion of the celestial bodies moving in conic sections around the sun). Piazzi had only been able to track Ceres for a couple of months, following it for three degrees across the night sky. Then it disappeared temporarily behind the glare of the Sun. Several months later, when Ceres should have reappeared, Piazzi could not locate it: the mathematical tools of the time were not able to extrapolate a position from such a scant amount of data – three degrees represent less than 1% of the total orbit.

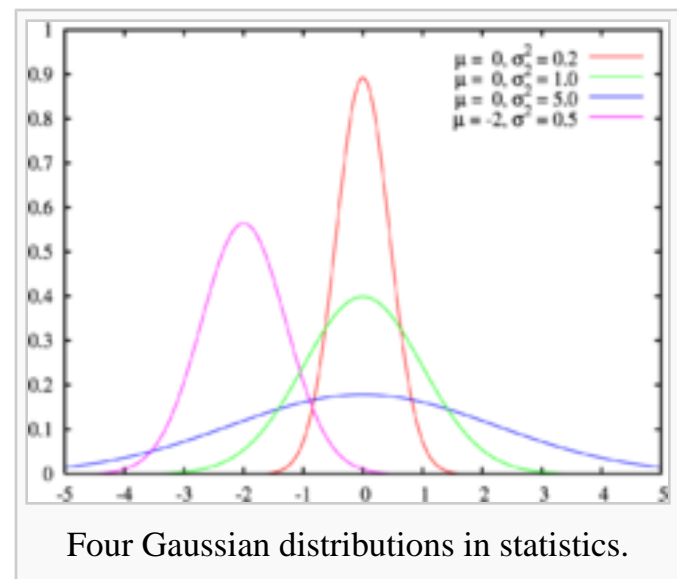
Gauss, who was 23 at the time, heard about the problem and tackled it head-on. After three months of intense work, he predicted a position for Ceres in December 1801 – just about a year after its first sighting – and this turned out to be accurate within a half-degree. In the process, he so streamlined the cumbersome mathematics of 18th century orbital prediction that his work – published a few years later as *Theory of Celestial Movement* – remains a cornerstone of astronomical computation. It introduced the Gaussian gravitational constant, and contained an influential treatment of the method of least squares, a procedure used in all sciences to this day to minimize the impact of measurement error. Gauss was able to prove the method in 1809 under the assumption of normally distributed errors (see Gauss-Markov theorem; see also Gaussian). The method had been described earlier by Adrien-Marie Legendre in 1805, but Gauss claimed that he had been using it since 1795.

Gauss was a prodigious mental calculator. Reputedly, when asked how he had been able to predict the trajectory of Ceres with such accuracy he replied, "I used logarithms." The questioner then wanted to know how he had been able to look up so many numbers from the tables so quickly. "Look them up?" Gauss responded. "Who needs to look them up? I just calculate them in my head!"

Gauss had been asked in the late 1810s to carry out a geodetic survey of the state of Hanover to link up with the existing Danish grid. Gauss was pleased to accept and took personal charge of the survey, making measurements during the day and reducing them at night, using his extraordinary mental capacity for calculations. He regularly wrote to Schumacher, Olbers and Bessel, reporting on his progress and discussing problems. As part of the survey, Gauss invented the heliotrope which worked by reflecting the Sun's rays using a set of mirrors and a small telescope.

Gauss also claimed to have discovered the possibility of non-Euclidean geometries but never published it. This discovery was a major paradigm shift in mathematics, as it freed mathematicians from the mistaken belief that Euclid's axioms were the only way to make geometry consistent and non-contradictory. Research on these geometries led to, among other things, Einstein's theory of general relativity, which describes the universe as non-Euclidean. His friend Farkas (Wolfgang) Bolyai (with whom Gauss had sworn "brotherhood and the banner of truth" as a student) had tried in vain for many years to prove the parallel postulate from Euclid's other axioms of geometry. Bolyai's son, János Bolyai, discovered non-Euclidean geometry in 1829; his work was published in 1832. After seeing it, Gauss wrote to Farkas Bolyai: *"To praise it would amount to praising myself. For the entire content of the work ... coincides almost exactly with my own meditations which have occupied my mind for the past thirty or thirty-five years."* This unproved statement put a strain on his relationship with János Bolyai (who thought that Gauss was "stealing" his idea), but it is nowadays generally taken at face value.

The survey of Hanover later led to the development of the Gaussian distribution, also known as the normal distribution, for describing measurement errors. Moreover, it fuelled Gauss's interest in differential geometry, a field of mathematics dealing with curves and surfaces. In this field, he came up in 1828 with an important theorem, the *theorema egregium* (*remarkable theorem* in Latin) establishing an important property of the notion of curvature. Informally, the theorem says that the curvature of



a surface can be determined entirely by measuring angles and distances on the surface; that is, curvature does not depend on how the surface might be embedded in (3-dimensional) space.

Later years, death, and afterwards

In 1831 Gauss developed a fruitful collaboration with the physics professor Wilhelm Weber; it led to new knowledge in the field of magnetism (including finding a representation for the unit of magnetism in terms of mass, length and time) and the discovery of Kirchhoff's circuit laws in electricity. Gauss and Weber constructed the first electromagnetic telegraph in 1833, which connected the observatory with the institute for physics in Göttingen. Gauss ordered a magnetic observatory to be built in the garden of the observatory and with Weber founded the *magnetischer Verein* ("magnetic club"), which supported measurements of earth's magnetic field in many regions of the world. He developed a method of measuring the horizontal intensity of the magnetic field which has been in use well into the second half of the 20th century and worked out the mathematical theory for separating the inner (core and crust) and outer (magnetospheric) sources of Earth's magnetic field.

Gauss died in Göttingen, Hanover (now part of Lower Saxony, Germany) in 1855 and is interred in the cemetery *Albanifriedhof* there. Two individuals gave eulogies at his funeral, Gauss's son-in-law Heinrich Ewald, and Wolfgang Sartorius von Waltershausen, who was Gauss's close friend and biographer. His brain was preserved and was studied by Rudolf Wagner who found its weight to be 1,492 grams and the cerebral area equal to 219,588 square centimeters. Highly developed convolutions were also found, which in the early 20th century was suggested as the explanation of his genius (Dunnington, 1927).

Family

Gauss's personal life was overshadowed by the early death of his first wife, Johanna Osthoff, in 1809, soon followed by the death of one child, Louis. Gauss plunged into a depression from which he never fully recovered. He married again, to a friend of his first wife named Friederica Wilhelmine Waldeck (Minna), but this second marriage does not seem to have been very happy. When his second wife died in 1831 after a long illness, one of his daughters, Therese, took over the household and cared for Gauss until the end of his life. His mother lived in his house from 1817 until her death in 1839.

Gauss had six children, three by each wife. With Johanna (1780–1809), his children were Joseph (1806–1873), Wilhelmina (1808–1846) and Louis (1809–1810). Of all of Gauss's children, Wilhelmina was said to have come closest to his talent, but she died young. With Minna Waldeck he also had three children: Eugene (1811–1896), Wilhelm (1813–1879) and Therese (1816–1864). Eugene immigrated to the United States about 1832 after a falling out with his father, eventually settling in St. Charles, Missouri, where he became a well respected member of the community. Wilhelm came to settle in Missouri somewhat later, starting as a farmer and later becoming wealthy in the shoe business in St. Louis. Therese kept house for Gauss until his death, after which she married.

Personality

Gauss was an ardent perfectionist and a hard worker. There is a famous anecdote of Gauss being interrupted in the middle of a problem and told that his wife was dying. He is purported to have said, "Tell her to wait a moment 'til I'm through". He was never a prolific writer, refusing to publish works which he did not consider complete and above criticism. This was in keeping with his personal motto *pauca sed matura* (few, but ripe). A study of his personal diaries reveals that he had in fact discovered several important mathematical concepts years or decades before they were published by his contemporaries. Prominent mathematical historian Eric Temple Bell estimated that had Gauss made known all of his discoveries, mathematics would have been advanced by fifty years. (Bell, 1937)

Another criticism of Gauss is that he did not support the younger mathematicians who followed him. He rarely, if ever, collaborated with other mathematicians and was considered aloof and austere by many. Though he did take in a few students, Gauss was known to dislike teaching (it is said that he attended only a single scientific conference, which was in Berlin in 1828). However, several of his students turned out to be influential mathematicians, among them Richard Dedekind, Bernhard Riemann, and Friedrich Bessel. Before she died, Sophie Germain was recommended by Gauss to receive her honorary degree.

Gauss generally did not get along with his male relatives. His father had wanted him to follow in his footsteps, i.e., to become a mason. He was not supportive of Gauss's schooling in mathematics and science. Gauss was primarily supported by his mother in this effort. Likewise, he had conflicts with his

sons, two of whom migrated to the United States. He did not want any of his sons to enter mathematics or science for "fear of sullyng the family name". His conflict with Eugene was particularly bitter. Gauss wanted Eugene to become a lawyer, but Eugene wanted to study languages. They had an argument over a party Eugene held, which Gauss refused to pay for. The son left in anger and immigrated to the United States, where he was quite successful. It took many years for Eugene's success to counteract his reputation among Gauss's friends and colleagues. See, also the letter from Robert Gauss to Felix Klein on September 3, 1912.

Unlike modern mathematicians, Gauss usually declined to present the intuition behind his often very elegant proofs--he preferred them to appear "out of thin air" and erased all traces of how he discovered them.

Gauss was deeply religious and conservative. He supported monarchy and opposed Napoleon whom he saw as an outgrowth of revolution.

Commemorations

The cgs unit for magnetic induction was named gauss in his honor.

From 1989 until the end of 2001, his portrait and a normal distribution curve were featured on the German ten-mark banknote. Germany has issued three stamps honoring Gauss, as well. A stamp (no. 725), was issued in 1955 on the hundredth anniversary of his death; two other stamps, no. 1246 and 1811, were issued in 1977, the 200th anniversary of his birth.



G. Waldo Dunnington was a lifelong student of Gauss. He wrote many articles, and a biography: *Carl Frederick Gauss: Titan of Science*. This book was reissued in 2003, after having been out of print for almost 50 years.

In 2007, his bust will be introduced to the Walhalla.

Places, vessels and events named in honour of Gauss:

- Gauss crater on the Moon
- Asteroid 1001 Gaussia.
- The First German Antarctica Expedition's ship *Gauss*
- Gaussberg, an extinct volcano discovered by the above mentioned expedition
- Gauss Tower, an observation tower
- In Canadian junior high schools, an annual national mathematics competition administered by the Centre for Education in Mathematics and Computing is named in honour of Gauss.

See also

- List of topics named after Carl Friedrich Gauss

References

- Bell, E. T. (1986). "Ch. 14: The Prince of Mathematicians: Gauss", *Men of Mathematics: The Lives and Achievements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*. New York: Simon and Schuster, pp. 218–269. ISBN 0-671-46400-0.
- Carl Friedrich Gauss. Retrieved on June, 2005.
- Carl Friedrich Gauss on PlanetMath
- Dunnington, G. Waldo. (May, 1927). "The Sesquicentennial of the Birth of Gauss". *Scientific Monthly* **XXIV**: 402–414. Retrieved on 29 June 2005. Comprehensive biographical article.
- Dunnington, G. Waldo. (June 2003). *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*. The Mathematical Association of America. ISBN 0-88385-547-X.
- Gauss, Carl Friedrich (1965). *Disquisitiones Arithmeticae*, tr. Arthur A. Clarke, Yale University Press. ISBN 0-300-09473-6.
- Hall, T. (1970). *Carl Friedrich Gauss: A Biography*. Cambridge, MA: MIT Press. ISBN 0-262-08040-0.
- Gauss and His Children. Retrieved on June, 2005.
- Simmons, J. (1996). *The Giant Book of Scientists: The 100 Greatest Minds of All Time*. Sydney: The Book Company.

External links

Wikiquote has a collection of quotations related to:

Carl Friedrich Gauss

8. Variabilă aleatoare continuă cu repartiție exponențială. O astfel de v.a. modelează timpul scurs între două evenimente independente statistice, ce apar cu o rată medie constantă, λ :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \in [0, \infty) \\ 0 & , x \in (-\infty, 0) \end{cases} \quad (A6.40)$$

În figura A6.3 se arată densitatea de repartiție și funcția de repartiție

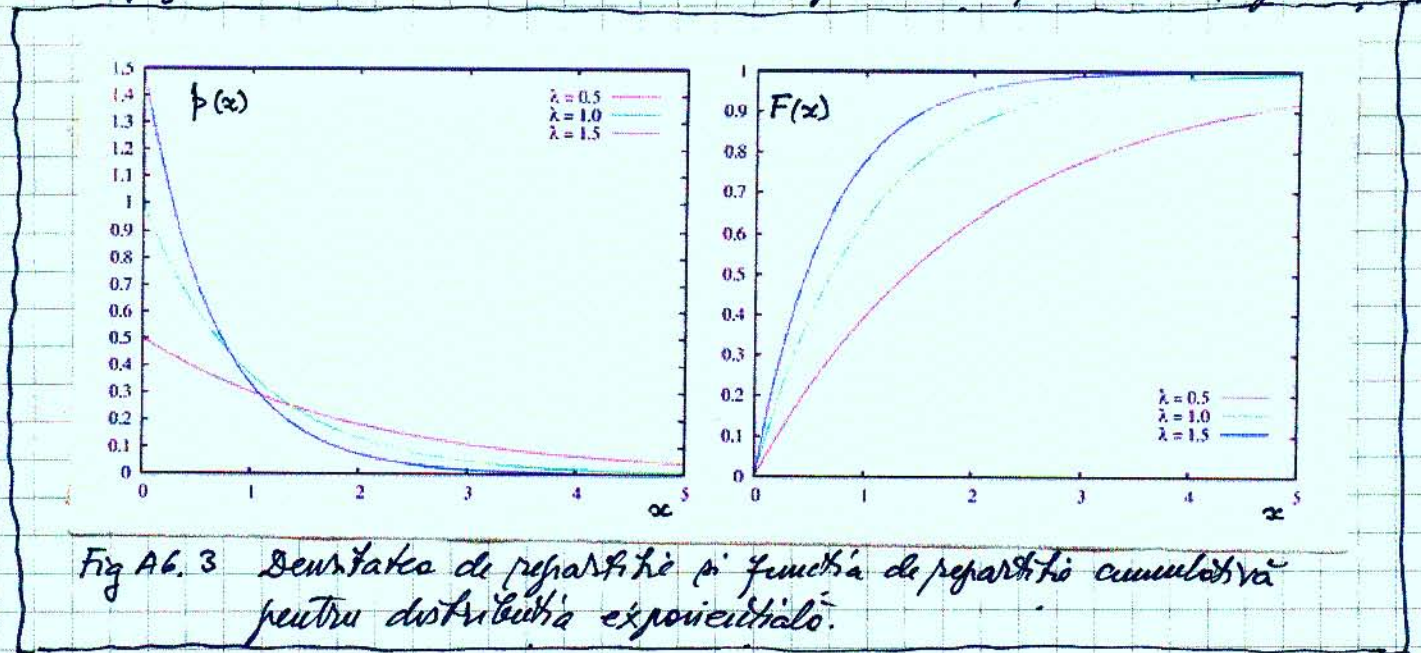


Fig A6.3 Densitatea de repartiție și funcția de repartiție cumulativă pentru distribuția exponențială.

cumulativă pentru câte trei valori ale parametrului λ .

Media și dispersia se calculează după cum urmează:

$$\mu_X = E\{X\} = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu} d\mu$$

Dată:

$$\int_0^{\infty} \mu e^{-\mu} d\mu = -\mu e^{-\mu} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\mu} d\mu = 1$$

pe care o

$$\mu_X = \frac{1}{\lambda} \quad (A6.41)$$

$$Disp\{X\} = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (A6.42)$$

Coefficientul de asimetrie și de turtire sunt $\gamma_1 = 2$ (curba este asimetrică)

$$\text{și } \gamma_2 = 6$$

9. Variabilă aleatoare continuă cu repartiție Laplaciannă. Distribuția Laplace se mai numește și distribuție dublu exponențială și modelează timpul scurs între două evenimente independente dar cu distribuții temporale identice. Densitatea de probabilitate (repartiție) este:

Pierre-Simon Laplace

From Wikipedia, the free encyclopedia

For the city in Louisiana, see Laplace, Louisiana.



This article may require cleanup to meet Wikipedia's quality standards.

Please discuss this issue on the talk page or replace this tag with a more specific message.

This article has been tagged since **June 2006**.

Pierre-Simon, Marquis de Laplace



French mathematician & astronomer

March 23, 1749

Born Beaumont-en-Auge, Normandy

Died March 5, 1827

Pierre-Simon, Marquis de Laplace (March 23, 1749 – March 5, 1827) was a French mathematician and astronomer who put the final capstone on mathematical astronomy by summarizing and extending the work of his predecessors in his five volume *Mécanique Céleste* (Celestial Mechanics) (1799-1825). This masterpiece translated the geometrical study of classical mechanics used by Isaac Newton to one based on calculus, known as physical mechanics [1].

He is also the discoverer of Laplace's equation. The Laplace transform appears in all branches of mathematical physics — a field he took a leading role in forming. The Laplacian differential operator, much relied-upon in applied mathematics, is likewise named after him.

He became count of the Empire in 1806 and was named a marquis in 1817 after the restoration of the Bourbons.

Contents

- 1 Biography
- 2 Probability theory
- 3 Laplace's demon
- 4 Spherical harmonics or Laplace's coefficients
- 5 Planetary inequalities
- 6 Celestial mechanics
- 7 Science as prediction
- 8 Black hole
- 9 Analytic theory of probabilities
- 10 Minor discoveries and accomplishments
- 11 Quotes
- 12 See also
- 13 References
- 14 Further reading
- 15 External links

Biography

Pierre Simon Laplace was born in Beaumont-en-Auge, Normandy, the son of a small cottager or perhaps a farm-labourer, and owed his education to the interest excited in some wealthy neighbours by his abilities and engaging presence. It would seem from a pupil he became an usher in the school at Beaumont; but, having procured a letter of introduction to Jean le Rond d'Alembert, he went to Paris to push his fortune. A paper on the principles of mechanics excited d'Alembert's interest, and on his recommendation a place in the military school was offered to Laplace.

Secure of a competency, Laplace now threw himself into original research, and in the next seventeen years, 1771-1787, he produced much of his original work in astronomy. This commenced with a memoir, read before the French Academy in 1773, in which he showed that the planetary motions were

stable, and carried the proof as far as the cubes of the eccentricities and inclinations. This was followed by several papers on points in the integral calculus, finite differences, differential equations, and astronomy.

Laplace had a wide knowledge of all sciences and dominated all discussions in the Académie. Quite uniquely for a mathematical prodigy of his skill, Laplace viewed mathematics as nothing in itself but a tool to be called upon in the investigation of a scientific or practical inquiry.

Laplace spent much of his life working on mathematical astronomy that culminated in his masterpiece on the proof of the dynamic stability of the solar system with the assumption that it consists of a collection of rigid bodies moving in a vacuum. He independently formulated the nebular hypothesis and was one of the first scientists to postulate the existence of black holes and the notion of gravitational collapse.

He is remembered as one of the greatest scientists of all time (sometimes referred to as a French Newton) with a natural phenomenal mathematical faculty possessed by none of his contemporaries. It does appear that Laplace was not modest about his abilities and achievements, and he probably failed to recognise the effect of his attitude on his colleagues. Anders Johan Lexell visited the Académie des Sciences in Paris in 1780-81 and reported that Laplace let it be known widely that he considered himself the best mathematician in France. The effect on his colleagues would have been only mildly eased by the fact that Laplace was very likely right. [2]

Probability theory

While he conducted much research in physics, another major theme of his life's endeavours was probability theory. In his *Essai philosophique sur les probabilités*, Laplace set out a mathematical system of inductive reasoning based on probability, which we would today recognise as Bayesian. One well-known formula arising from his system is the rule of succession. Suppose that some trial has only two possible outcomes, labeled "success" and "failure". Under the assumption that little or nothing is known *a priori* about the relative plausibilities of the outcomes, Laplace derived a formula for the probability that the next trial will be a success.

$$\Pr(\text{next outcome is success}) = \frac{s + 1}{n + 2}$$

where s is the number of previously observed successes and n is the total number of observed trials. It is still used as an estimator for the probability of an event if we know the event space, but only have a small number of samples.

The rule of succession has been subject to much criticism, partly due to the example which Laplace chose to illustrate it. He calculated that the probability that the sun will rise tomorrow, given that it has never failed to in the past, was

$$\Pr(\text{sun will rise tomorrow}) = \frac{d + 1}{d + 2}$$

where d is the number of times the sun has risen in the past times. This result has been derided as absurd, and some authors have concluded that all applications of the Rule of Succession are absurd by extension. However, Laplace was fully aware of the absurdity of the result; immediately following the example, he wrote, "But this number [i.e., the probability that the sun will rise tomorrow] is far greater for him who, seeing in the totality of phenomena the principle regulating the days and seasons, realizes that nothing at the present moment can arrest the course of it."

Laplace's demon

Laplace strongly believed in causal determinism, which is expressed in the following quote from the introduction to the *Essai*:

“ We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes. ”

This intellect is often referred to as *Laplace's demon* (in the same vein as Maxwell's demon). Note that the description of the hypothetical intellect described above by Laplace as a demon does not come from Laplace, but from later biographers: Laplace saw himself as a scientist that hoped that humanity would progress in a better scientific understanding of the world, which, if and when eventually completed, would still need a tremendous calculating power to compute it all in a single instant. While Laplace saw foremost *practical* problems for mankind to reach this ultimate stage of knowledge and computation, later interpretations of quantum mechanics, which were adopted by philosophers defending the existence of free will, also leave the *theoretical* possibility of such an "intellect" contested. A physical implementation of Laplace's Demon has been referred to as a Laplace Computer.

There has recently been proposed a limit on the computational power of the universe, i.e., the ability of Laplace's Demon to process an infinite amount of information. The limit is based on the maximum entropy of the universe, the speed of light, and the minimum amount of time taken to move information across the Planck length, and the figure turns out to be 2^{130} bits. Accordingly, anything that requires more than this amount of data cannot be computed in the amount of time that has elapsed so far in the universe. (An actual theory of everything might find an exception to this limit, of course.)

Spherical harmonics or Laplace's coefficients

During the years 1784-1787 he produced some memoirs of exceptional power. Prominent among these is one read in 1784, and reprinted in the third volume of the *Mécanique céleste*, in which he completely determined the attraction of a spheroid on a particle outside it. This is memorable for the introduction into analysis of spherical harmonics or Laplace's coefficients, as also for the development of the use of the potential - a name first given by Green in 1828.

If the co-ordinates of two points be (r, μ, ω) and (r', μ', ω') , and if $r' \geq r$, then the reciprocal of the distance between them can be expanded in powers of r/r' , and the respective coefficients are Laplace's coefficients. Their utility arises from the fact that every function of the co-ordinates of a point on the sphere can be expanded in a series of them. It should be stated that the similar coefficients for space of two dimensions, together with some of their properties, had been previously given by Legendre in a

paper sent to the French Academy in 1783. Legendre had good reason to complain of the way in which he was treated in this matter.

This paper is also remarkable for the development of the idea of the potential, which was appropriated from Lagrange, who had used it in his memoirs of 1773, 1777 and 1780. Laplace showed that the potential always satisfies the differential equation

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

and on this result his subsequent work on attractions was based. The quantity $\nabla^2 V = 0$ has been termed the concentration of V and its value at any point indicates the excess of the value of V there over its mean value in the neighbourhood of the point. Laplace's equation, or the more general form $\nabla^2 V = -4\pi\rho$, appears in all branches of mathematical physics. According to some writers this follows at once from the fact that ∇^2 is a scalar operator or possibly it might be regarded by a Kantian as the outward sign of one of the necessary forms through which all phenomena are perceived.

Planetary inequalities

This memoir was followed by another on planetary inequalities, which was presented in three sections in 1784, 1785, and 1786. This deals mainly with the explanation of the "great inequality" of Jupiter and Saturn. Laplace showed by general considerations that the mutual action of two planets could never largely affect the eccentricities and inclinations of their orbits; and that the peculiarities of the Jovian system were due to the near approach to commensurability of the mean motions of Jupiter and Saturn: further developments of these theorems on planetary motion were given in his two memoirs of 1788 and 1789. It was on these data that Delambre computed his astronomical tables.

The year 1787 was rendered memorable by Laplace's explanation and analysis of the relation between the lunar acceleration and the secular changes in the eccentricity of the earth's orbit: this investigation completed the proof of the stability of the whole solar system on the assumption that it consists of a collection of rigid bodies moving in a vacuum. All the memoirs above alluded to were presented to the

French Academy, and they are printed in the "Mémoires présentés par divers savants".

Celestial mechanics

Laplace now set himself the task to write a work which should "offer a complete solution of the great mechanical problem presented by the solar system, and bring theory to coincide so closely with observation that empirical equations should no longer find a place in astronomical tables." The result is embodied in the *Exposition du système du monde* and the *Mécanique céleste*.

The former was published in 1796, and gives a general explanation of the phenomena, but omits all details. It contains a summary of the history of astronomy: this summary procured for its author the honour of admission to the forty of the French Academy; it is commonly esteemed one of the masterpieces of French literature, though it is not altogether reliable for the later periods of which it treats.

The nebular hypothesis was here enunciated. According to this hypothesis the solar system has been evolved from a globular mass of incandescent gas rotating around an axis through its centre of mass. As it cooled this mass contracted and successive rings broke off from its outer edge. These rings in their turn cooled, and finally condensed into the planets, while the sun represents the central core which is still left. On this view we should expect that the more distant planets would be older than those nearer the sun. The subject is one of great difficulty, and though it seems certain that the solar system has a common origin, there are various features which appear almost inexplicable on the nebular hypothesis as enunciated by Laplace.

Probably the best modern opinion inclines to the view that nebular condensation, meteoric condensation, tidal friction, and possibly other causes yet unsuspected, have all played their part in the evolution of the system.

The idea of the nebular hypothesis had been outlined by Kant in 1755, and he had also suggested meteoric aggregations and tidal friction as causes affecting the formation of the solar system: it is probable that Laplace was not aware of this.

According to the rule published by Titius of Wittemberg in 1766-but generally known as Bode's Law, from the fact that attention was called to it by Johann Elert Bode in 1778 - the distances of the planets from the sun are nearly in the ratio of the numbers $0 + 4, 3 + 4, 6 + 4, 12+4$, etc., the n -th term being $((n - 1) * 3) + 4$.

Laplace's analytical discussion of the solar system is given in his *Mécanique céleste* published in five volumes. The first two volumes, published in 1799, contain methods for calculating the motions of the planets, determining their figures, and resolving tidal problems. The third and fourth volumes, published in 1802 and 1805, contain applications of these methods, and several astronomical tables. The fifth volume, published in 1825, is mainly historical, but it gives as appendices the results of Laplace's latest researches. Laplace's own investigations embodied in it are so numerous and valuable that it is regrettable to have to add that many results are appropriated from writers with scanty or no acknowledgement, and the conclusions - which have been described as the organized result of a century of patient toil - are frequently mentioned as if they were due to Laplace.

Biot, who assisted Laplace in revising it for the press, says that Laplace himself was frequently unable to recover the details in the chain of reasoning, and, if satisfied that the conclusions were correct, he was content to insert the constantly recurring formula, "*Il est aisé à voir.*" The *Mécanique céleste* is not only the translation of the *Principia* into the language of the differential calculus, but it completes parts of which Newton had been unable to fill in the details. F. F. Tisserand's recent work may be taken as the modern presentation of dynamical astronomy on classical lines, but Laplace's treatise will always remain a standard authority.

Science as prediction

Laplace went in state to beg Napoleon to accept a copy of his work, who had heard that the book contained no mention of God; Napoleon, who was fond of putting embarrassing questions, received it with the remark, "M. Laplace, they tell me you have written this large book on the system of the universe, and have never even mentioned its Creator." Laplace, who, though the most supple of politicians, was as stiff as a martyr on every point of his philosophy, drew himself up and answered bluntly, "*Je n'avais pas besoin de cette hypothèse-là.*" (I did not need to make such an assumption).

Napoleon, greatly amused, told this reply to Lagrange, who exclaimed, "*Ah! c'est une belle hypothèse; ça explique beaucoup de choses*" (Ah! that is a beautiful assumption; it explains many things). Laplace then declared: "*Cette hypothèse, Sire, explique en effet tout, mais ne permet de prédire rien. En tant que savant, je me dois de vous fournir des travaux permettant des prédictions*" ("This hypothesis, Sire, does explain everything, but does not permit to predict anything. As a scholar, I must provide you with works permitting predictions." - quoted by Ian Stewart and Jack Cohen). Laplace thus defined science as a predicting tool.

Black hole

Laplace also came close to propounding the concept of the black hole. He pointed out that there could be massive stars whose gravity is so great that not even light could escape from their surface (see escape velocity). Laplace also speculated that some of the nebulae revealed by telescopes may not be part of the Milky Way and might actually be galaxies themselves. Thus, he anticipated the major discovery of Edwin Hubble, some 100 years before it happened.

Analytic theory of probabilities

In 1812, Laplace issued his *Théorie analytique des probabilités*. The method of estimating the ratio of the number of favourable cases, compared to the whole number of possible cases, had been previously indicated by Laplace in a paper written in 1779. It consists of treating the successive values of any function as the coefficients in the expansion of another function, with reference to a different variable. The latter is therefore called the generating function of the former. Laplace then shows how, by means of interpolation, these coefficients may be determined from the generating function. Next he attacks the converse problem, and from the coefficients he finds the generating function; this is effected by the solution of an equation in finite differences. The method is cumbersome and leads most of the time to a normal probability distribution the so called Laplace-Gauss distribution.

This treatise includes an exposition of the method of least squares, a remarkable testimony to Laplace's command over the processes of analysis. The method of least squares for the combination of numerous observations had been given empirically by Gauss and Legendre, but the fourth chapter of this work

contains a formal proof of it, on which the whole of the theory of errors has been since based. This was affected only by a most intricate analysis specially invented for the purpose, but the form in which it is presented is so meagre and unsatisfactory that, in spite of the uniform accuracy of the results, it was at one time questioned whether Laplace had actually gone through the difficult work he so briefly and often incorrectly indicates.

Laplace seems to have regarded analysis merely as a means of attacking physical problems, though the ability with which he invented the necessary analysis is almost phenomenal. As long as his results were true he took but little trouble to explain the steps by which he arrived at them; he never studied elegance or symmetry in his processes, and it was sufficient for him if he could by any means solve the particular question he was discussing.

In 1819, Laplace published a popular account of his work on probability. This book bears the same relation to the *Théorie des probabilités* that the *Système du monde* does to the *Mécanique céleste*.

Minor discoveries and accomplishments

Amongst the minor discoveries of Laplace in pure mathematics is his discussion (simultaneously with Vandermonde) of the general theory of determinants in 1772; his proof that every equation of an even degree must have at least one real quadratic factor; his reduction of the solution of linear differential equations to definite integrals; and his solution of the linear partial differential equation of the second order. He was also the first to consider the difficult problems involved in equations of mixed differences, and to prove that the solution of an equation in finite differences of the first degree and the second order might be always obtained in the form of a continued fraction. Besides these original discoveries he determined, in his theory of probabilities, the values of a number of the more common definite integrals; and in the same book gave the general proof of the theorem enunciated by Lagrange for the development of any implicit function in a series by means of differential coefficients.

Together with Thomas Young, Laplace is credited with describing the pressure across a curved surface, as set out in the Young-Laplace equation.

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad (A6.43)$$

In figura A6.4 se dau atat densitatea de probabilitate cat si functia de repartitie cumulativa, pentru diferite valori μ si b .

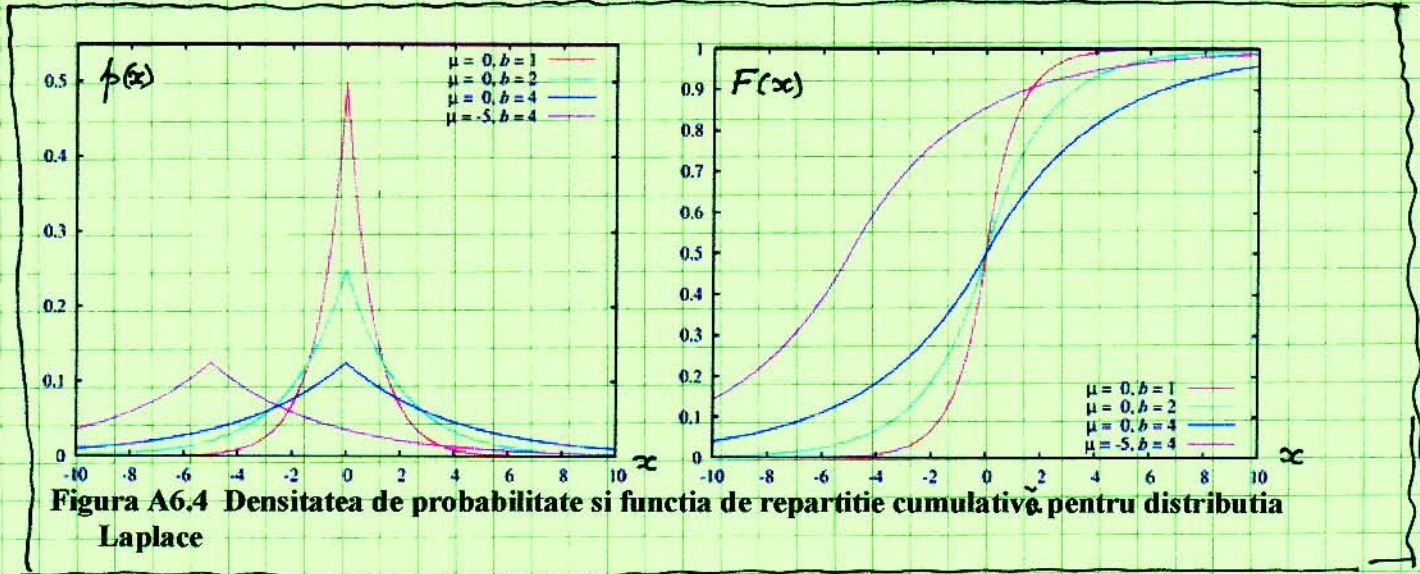


Figura A6.4 Densitatea de probabilitate si functia de repartitie cumulativa pentru distributia Laplace

Media se calculeaza cu:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{x}{2b} e^{\frac{x-\mu}{b}} dx + \int_{\mu}^{\infty} \frac{x}{2b} e^{-\frac{x-\mu}{b}} dx = \mu \quad (A6.44)$$

iar dispersia cu:

$$Disp\{X\} = \int_{-\infty}^{\mu} \frac{x^2}{2b} e^{\frac{x-\mu}{b}} dx + \int_{\mu}^{\infty} \frac{x^2}{2b} e^{-\frac{x-\mu}{b}} dx - \mu^2 = 2b^2 \quad (A6.45)$$

Coefficientul de asimetrie este nul $\gamma_1 = 0$ (curba este simetrica fata de medie) iar coefficientul de kurtosis este $\gamma_2 = 3$.

10. Variabila aleatoare continua cu distributie Cauchy-Lorentz.

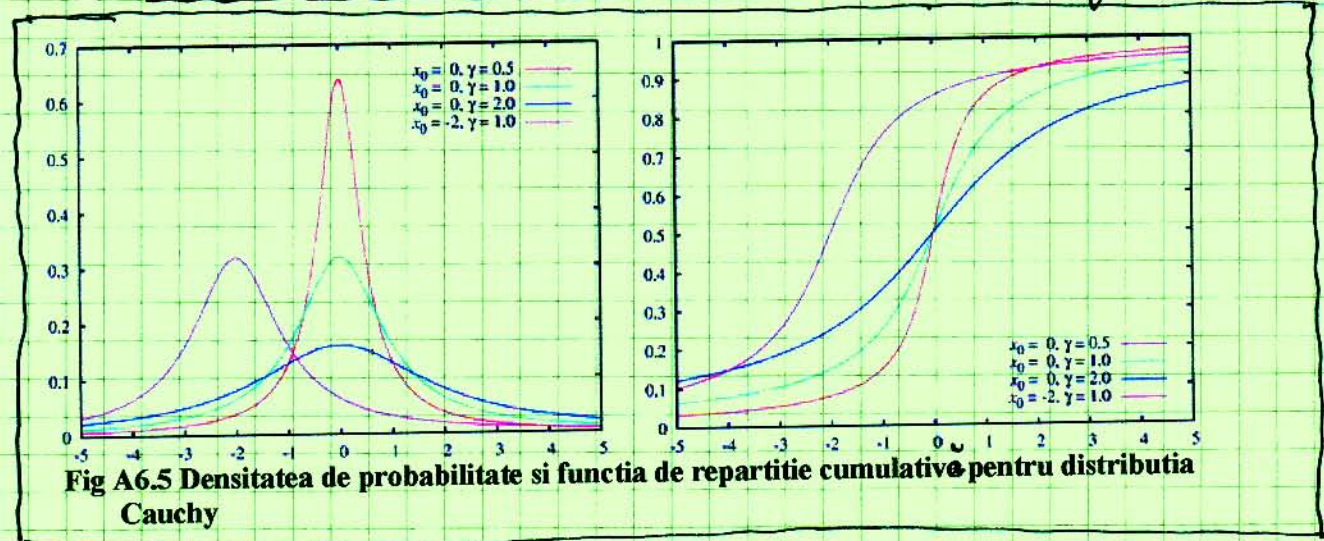


Fig A6.5 Densitatea de probabilitate si functia de repartitie cumulativa pentru distributia Cauchy

Densitatea de repartitie a unei astfel de v.a. este:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma} \right)^2 \right]} ; \quad \begin{matrix} x_0 \text{ este locul de zero maximului} \\ \gamma > 0 \text{ este scala} \end{matrix} \quad (A6.46)$$

11. Variabilă aleatoare continuă cu distribuție Rayleigh

Are densitatea de repartiție :

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} ; x \geq 0 \tag{A6.47}$$

și apare ca modul a două componente cu repartiție normală, de medii nule și aceeași dispersie σ^2 statistic independente și ortogonale.

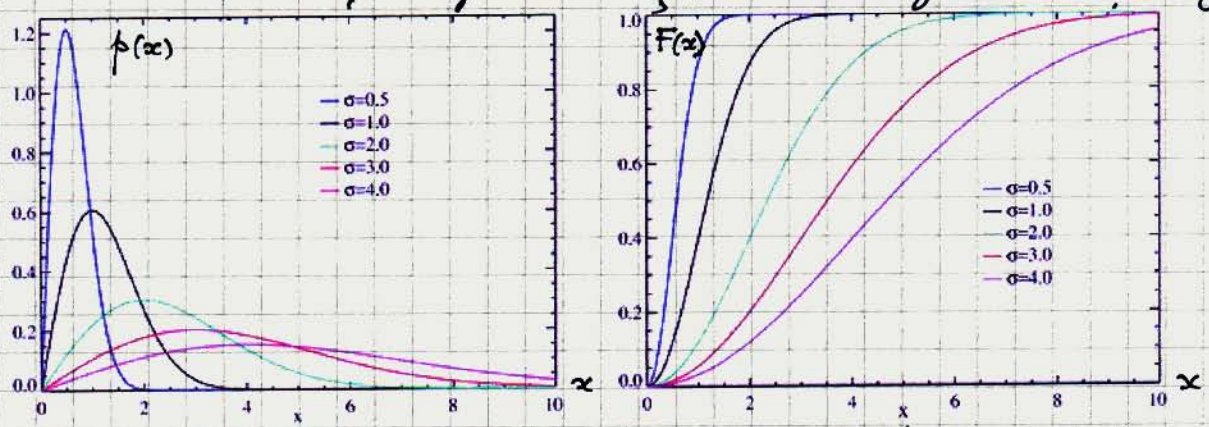


Fig. A6.6 Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție cumulativă pentru distribuția Rayleigh

În figura A6.6 se prezintă densitatea de repartiție și funcția de repartiție cumulativă. Media statistică este :

$$\begin{aligned} \mu_X = E\{X\} &= \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{2\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sigma} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx}_{=\sigma^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \end{aligned} \tag{A6.48}$$

La fel :

$$Dif\{X\} = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - \frac{\pi}{2} \sigma^2 = \frac{4-\pi}{2} \sigma^2 \tag{A6.49}$$

Coefficientul de asimetrie este $\delta_1 = \frac{2\sqrt{\pi}(\pi-3)}{\sqrt{(4-\pi)^3}}$ iar cel de curbura are valoarea $\delta_2 = -\frac{6\pi^2 - 24\pi + 16}{(\pi-\pi)^2}$

12. Variabilă aleatoare continuă cu distribuție Rice.

Densitatea ei de repartiție depinde de doi parametri, v și σ și are expresia :

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2+v^2}{2\sigma^2}\right\} I_0\left(\frac{xv}{\sigma^2}\right) ; x \geq 0. \tag{A6.50}$$

În relație $I_0(x)$ este funcția Bessel modificată, ^{de ordin 0} și are valoarea 1 pentru $x=0$.

În figura A6.7 se pot vedea densitățile de probabilitate și funcțiile de repartiție cumulativă. Pe măsură ce valoarea v crește, distribuția Rice



John Strutt, 3rd Baron Rayleigh


From Wikipedia, the free encyclopedia

Lord Rayleigh



John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh

Born	12 November 1842 Langford Grove, Maldon, Essex, UK
Died	30 June 1919 Terling Place, Witham, Essex, UK
Residence	 UK
Nationality	 English
Field	Physicist
Institutions	University of Cambridge
Alma mater	University of Cambridge
Academic advisor	Edward John Routh J. J. Thomson 
Notable students	George Paget Thomson  Jagdish Chandra Bose

Known for	Discovery of argon Rayleigh waves Rayleigh scattering Rayleigh criterion
Notable prizes	 Nobel Prize for Physics (1904)

John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh (12 November 1842 – 30 June 1919) was an English physicist who (with William Ramsay) discovered the element argon, an achievement that earned him the Nobel Prize for Physics in 1904. He also discovered the phenomenon now called Rayleigh scattering and predicted the existence of the surface waves now known as Rayleigh waves.

Contents

- 1 Biography
- 2 Prizes
- 3 See also
- 4 Notes
- 5 References and further reading

Biography

Strutt was born in Langford Grove, Essex and in his early years suffered frailty and poor health.

He went to Harrow School and began studying mathematics at Trinity College, Cambridge, in 1861. In 1865, he obtained his BA (Senior Wrangler and 1st Smith's prize) and MA in 1868. He was subsequently elected to a Fellowship of Trinity. He held the post until his marriage to Evelyn Balfour, daughter of James Maitland Balfour in 1871. He had three sons with her.



In 1873 his father, John Strutt, 2nd Baron Rayleigh died, and he inherited the Barony of Rayleigh.

He was the second Cavendish Professor of Physics at the University of Cambridge, following James Clerk Maxwell in this position from 1879 to 1884.

Approximately 1900 Lord Rayleigh developed the Duplex (combination of two) Theory (Human sound localization using two binaural cues). Interaural time delay (ITD) and interaural level difference (ILD) (assuming a spherical head with no external pinnae). Humans perceive sound objects spatially, using the difference in the phase (time delay) of the sound and the difference in amplitude (level) between the two ears, in a similar way that stereoscopic sight provides depth perception. Also called two primary cues for azimuth (horizontal location) but possibly its two primary cues for a 3 dimensional bearing. For example when you hear a seagull call out you can determine roughly x y and z location of the sound. Although Pinnae reflections are considered a main cue for vertical localisation.

Lord Rayleigh was elected to Fellow of the Royal Society on June 12, 1873 and was elected president of the Royal Society between 1905 and 1908.

Lord Rayleigh died on June 30, 1919 in Witham, Essex.

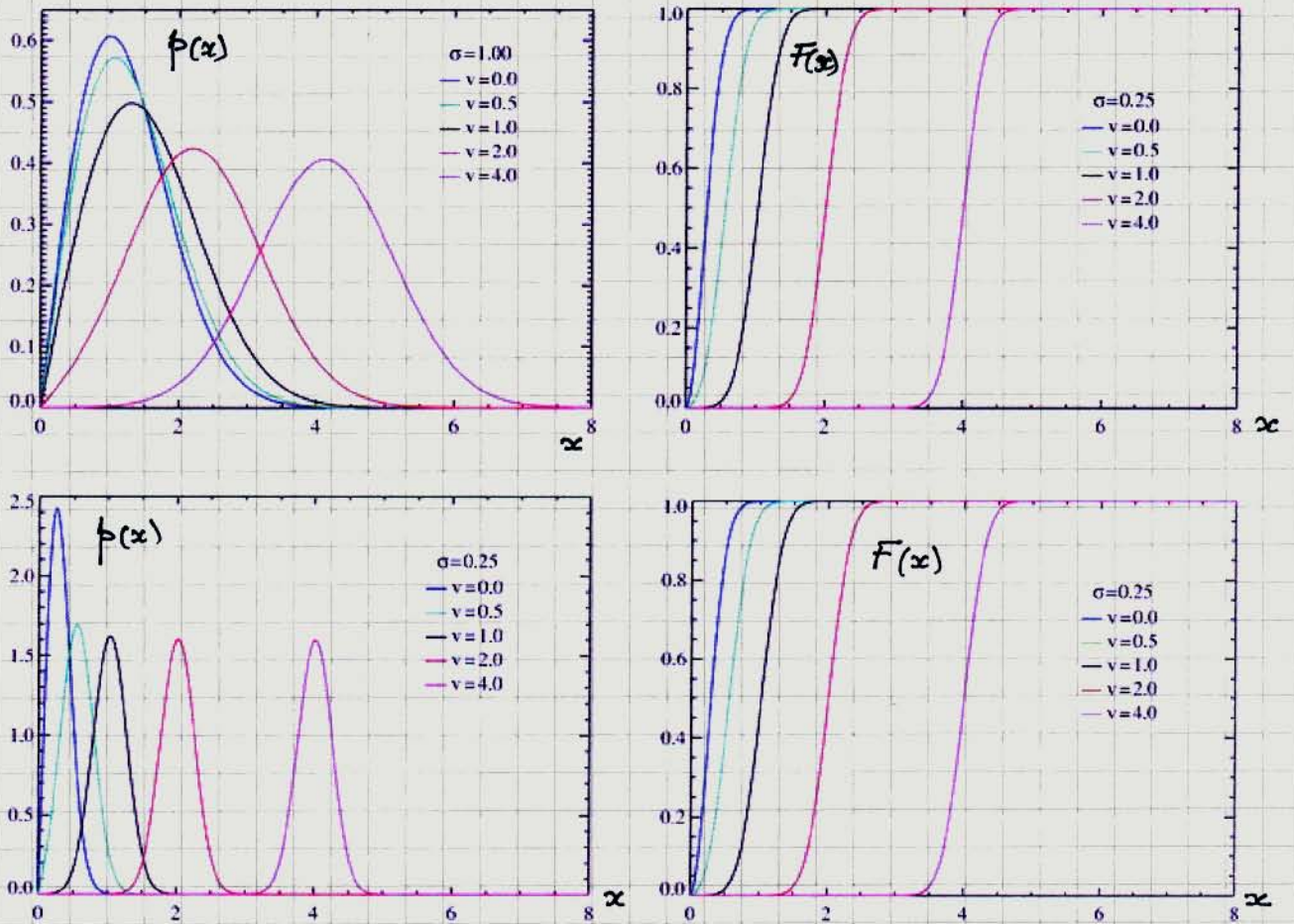
Craters on Mars and the Moon are named in his honor as well as a type of surface wave known as a Rayleigh wave.

Prizes

- Royal Medal (1882)
- Matteucci Medal (1894)
- Copley Medal (1899)
- Nobel Prize for Physics (1904)
- Rumford Medal (1920)

See also

- Rayleigh criterion
- Rayleigh fading
- Rayleigh number
- Rayleigh quotient
- Rayleigh scattering
- Rayleigh (unit) (named after his son)
- Rayleigh waves



FigA6.7 Densitatea de probabilitate si functia de repartitie cumulativa pentru distributia Rice.

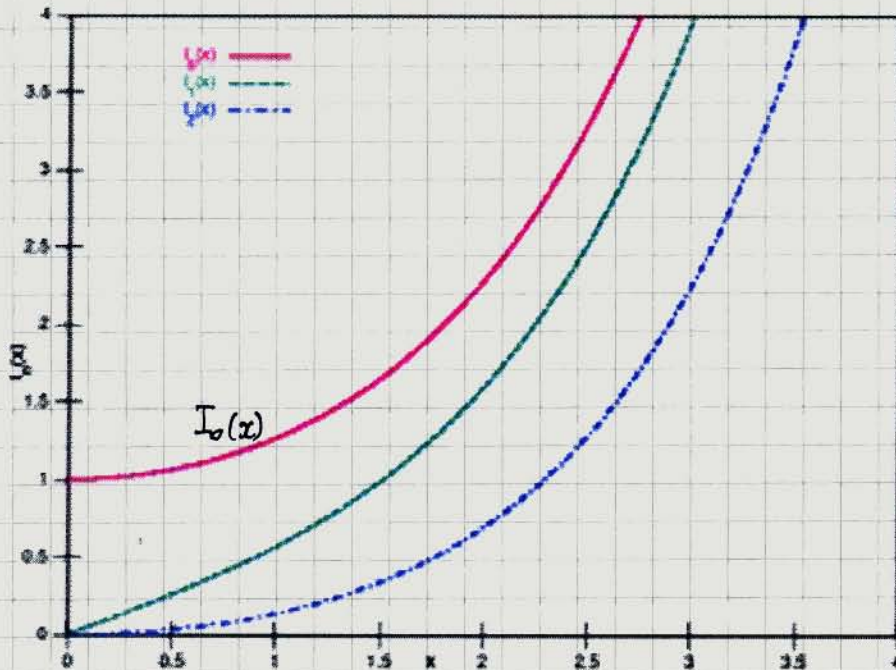


Fig. A6.8 Functii Bessel modificate, de speta I-a.

De asemenea tot mai mult cu o repartiție gaussiană, de medie $\approx \nu$. Alături de comportament se observă și pentru $\nu \rightarrow 0$.

Forma de variație a funcției Bessel modificate, de speta 1-a, ordin 0 și argument x se arată în figura A6.8. Se vede că este o funcție crescătoare, și că $I_0(0) = 1$. În consecință, pentru $\nu = 0$, (A6.56) devine (A6.47)

Stephen O. Rice, 1907 - 1986



Stephen O. Rice was born November 29, 1907, in Shedd, Oregon. He received the B. S. degree in electrical engineering from Oregon State College, Corvallis, in 1929 and carried out graduate work at California Institute of Technology and at Columbia University. In 1961 he received the honorary degree of Doctor of Science from Oregon State College. Following his graduate study, he joined Bell Telephone Laboratories as a Member of Technical Staff.

From 1930 until 1968, Dr. Rice served Bell Labs as a consultant on transmission engineering and carried out research in communication theory. From 1968 until his retirement in 1972, he served as Head of the Communications Analysis Research Department where he was concerned with various aspects of communication theory, particularly those areas involving random phenomena and noise. Since 1972 he has been a research physicist in the Department of Electrical Engineering and Computer Science at the University of California, San Diego.

Dr. Rice has been one of the giants in the development of communication theory. His career has been marked by extraordinary technical contributions to the scientific basis of telecommunications. His more than 60 papers have included major contributions in the fields of noise theory, frequency modulation, nonlinear systems, and communication theory. To these could be added significant work in such areas as scattering from rough surfaces, propagation, traffic theory, transmission and wave-guide theory, and mathematics.

Dr. Rice's paper on "Mathematical Analysis of Random Noise," published in 1944 and 1945, is a classic in its field. It has had immense scientific and engineering influence not only on electrical communications, but also on other fields of engineering where random processes are important. In addition to his engineering achievements, Dr. Rice has proven himself to be an exceedingly able mathematician and has made many contributions to applied mathematics as a spin-off from his engineering investigations.

Dr. Rice is a member of the National Academy of Engineering and is a Fellow of the IEEE. During 1958 he served as a Gordon McKay Visiting Lecturer in Applied Physics at Harvard University. He was the recipient of the 1965 Mervin J. Kelly Award of the IEEE for his outstanding contributions in the field of communications and in 1974 received the Outstanding Contribution Award of the IEEE National Telecommunications Conference. From the outset, Dr. Rice's work has been characterized by depth, breadth, and an uncanny ability of getting directly to the essence of the engineering problem of interest. Common threads running throughout his work include applications of probability and random process theory, electromagnetic theory, nonlinear theory, special functions, and asymptotic methods.

Dr. Rice's work has had an extended influence through the younger research workers to whom he has taught his methods. He and his wife, Inez, have one son, two married daughters and six grandchildren. (Editor's Note: Dr. Rice passed away on 18 November 1986.)

Dr. Rice won the 1983 IEEE Alexander Graham Bell Medal "For his contributions to the fundamental understanding of communications

systems and to the underlying mathematics, and for inspiring younger scientists and engineers. "

From the *1983 IEEE Annual Awards Presentation Brochure*



distribuția Rayleigh.

Formulele pentru medie, dispersie, coeficient de asimetrie și coeficient de înclinare sunt complicate.

13 Variabila aleatoare continuă cu distribuție "hi-pătrat"

Distribuția se notează și cu χ^2 . Dacă variabilele aleatoare X_i sunt toate distribuite normal standard, cu media 0 și dispersia 1,

$$X_i \sim N(0, 1) \quad i = 1, 2, \dots, k$$

și sunt și staturte independente atunci variabila aleatoare:

$$X = \sum_{i=1}^k X_i^2 \tag{A6.51}$$

are o distribuție "hi-pătrat" cu k grade de libertate. Dacă v.a. X_i sunt repartizate normal cu valori medii μ_i și dispersii σ_i , fiind statistic independente, atunci:

$$\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \sim N(0, 1)$$

și deci

$$X = \sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \tag{A6.52}$$

are distribuția χ_k^2 cu k grade de libertate.

Densitatea de probabilitate, dependentă de numărul gradelor de libertate este:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(k/2)} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} ; x \geq 0, k \in \mathbb{N}^* \tag{A6.53}$$

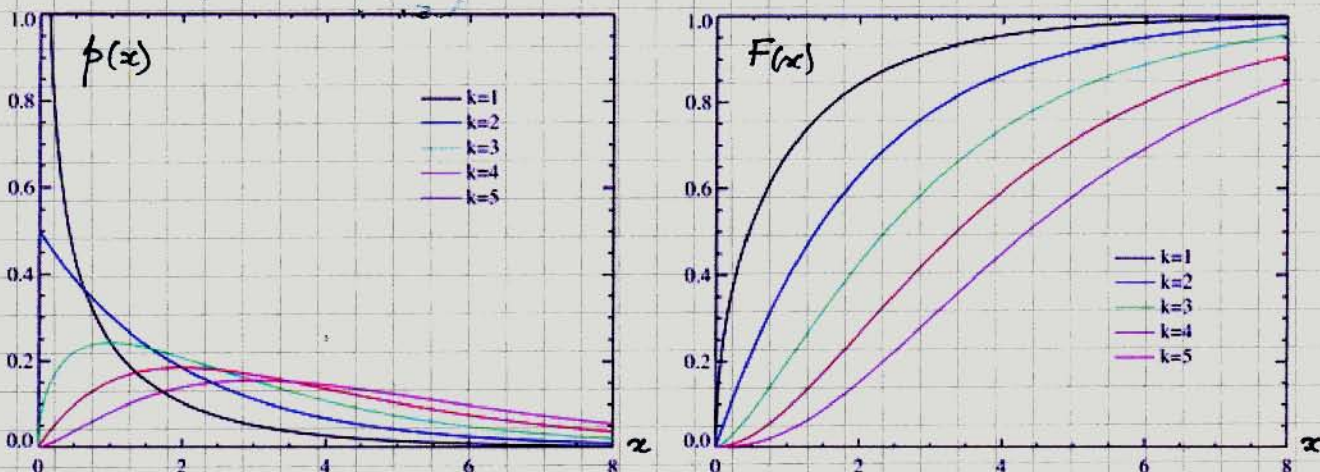


Fig. A6.8 Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție cumulativă pentru repartiția "hi-pătrat"

în care $\Gamma(\cdot)$ este funcția gamma. În figura A6.8 reprezentate $f(x)$ și $F(x)$ pentru $k=1, 2, 3, 4$ și 5 . Când $k \rightarrow \infty$, distribuția χ_k^2 tinde spre o distribuție normală.

Pentru χ^2_k avem media:

$$\mu = k \tag{A6.54}$$

si dispersia:

$$\sigma^2 = 2k \tag{A6.55}$$

Coefficientii de asimetrie si de kurtosis au valorile

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{8}{k}} \tag{A6.56}$$

$$\gamma_2 = \frac{12}{k} \tag{A6.57}$$

Distributia "hi-patrat" este utilizata in testul de normalitate, motiv pentru care se dau tabel de valori.

14. Variabila aleatoare centrata cu repartitie "hi-patrat non-centrata"

Daie variabilele aleatoare X_i sunt statistice independente si repartitionate normal cu medii μ_i si dispersii σ_i^2 , adica $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, atunci variabila aleatoare:

$$X = \sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right)^2 \tag{A6.58}$$

are o repartitie "hi-patrat" noncentrata cu k grade de libertate si parametru λ , legat de medii, calculat cu relatia:

$$\lambda = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \tag{A6.59}$$

Parametrul λ este numit si "parametru de non-centrality" si, dupa cum se vede, este pozitiv. Densitatea de repartitie (proabilitate) are forma:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x+\lambda}{2}} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\frac{k}{2} - \frac{1}{2}} I_{\frac{k}{2}-1}(\sqrt{\lambda x}) \tag{A6.60}$$

$I_\nu(x)$ fiind functia Bessel modificata, de specie 1-a, ordin ν si argument x .

Distributia $\chi^2_{k,\lambda}$ cu parametrul de non-centrality λ este echivalenta cu o distributie χ^2_{k+2P} , centrata, cu $k+2P$ grade de libertate, unde P este o variabila-aleatoare Poisson cu parametrul $\frac{\lambda}{2}$.

Media si dispersia unei v.a. cu repartitie $\chi^2_{k,\lambda}$, "hi-patrat non-centrata" cu k grade de libertate si parametrul de non-centrality λ sunt:

$$\mu = k + \lambda \tag{A6.61}$$

$$\sigma^2 = 2(k + 2\lambda) \tag{A6.62}$$

14. Variabile aleatoare continuă cu distribuție "Hi" Dacă variabilele aleatoare X_i sunt statistice independente și repartizate normal, cu mediiile μ_i și dispersiile σ_i^2 , adică $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, atunci variabilele aleatoare:

$$X = \sqrt{\sum_{i=1}^k \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2} \tag{A6.63}$$

are o repartiziie χ_k , "hi cu k grade de libertate. Densitatea de probabilitate a v.a. χ_k este

$$f(x) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} ; x \geq 0, k \in \mathbb{N}^* \tag{A6.64}$$

În figura A6.9 se dau $f(x)$ și $F(x)$ pentru o distribuție χ_k . Media ei

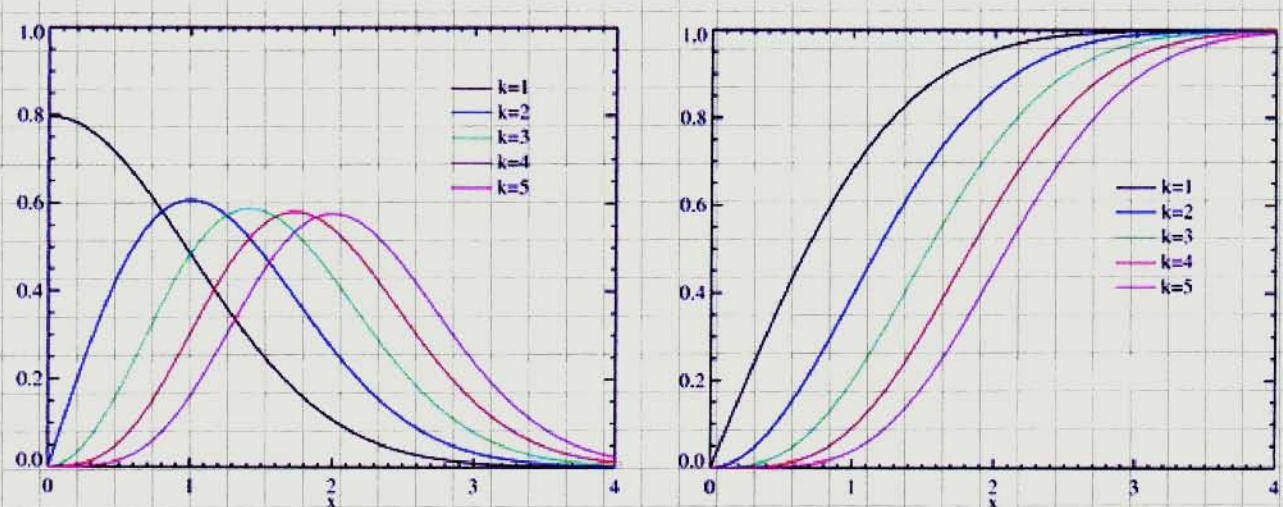


Fig A6.9 Densitatea de probabilitate și funcția de repartiție cumulativă pentru distribuția "Hi"

dispersiia variabilei aleatoare repartizate χ_k sunt:

$$\mu = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \tag{A6.65}$$

$$\sigma^2 = k - \mu^2 \tag{A6.66}$$

Observație Ca și în cazul repartiziie $\chi_{k,\lambda}^2$ non-centrale și repartiziie χ_k are o versiune non-centrală, $\chi_{k,\lambda}$, așa cum se prezintă spre exemplu la adresa de web http://en.wikipedia.org/wiki/Noncentral_chi_distribution

15 Variabile aleatoare continuă cu distribuție "t-Student"

Fie $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$; $i = 1, 2, \dots, N$ și statistice independente (v.a. X_i sunt de tipul IID). Continuăm mai întâi media esantion \bar{X}_N și estima-

rea S_N^2 pentru dispersia σ^2 :

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2$$

(A6.67)

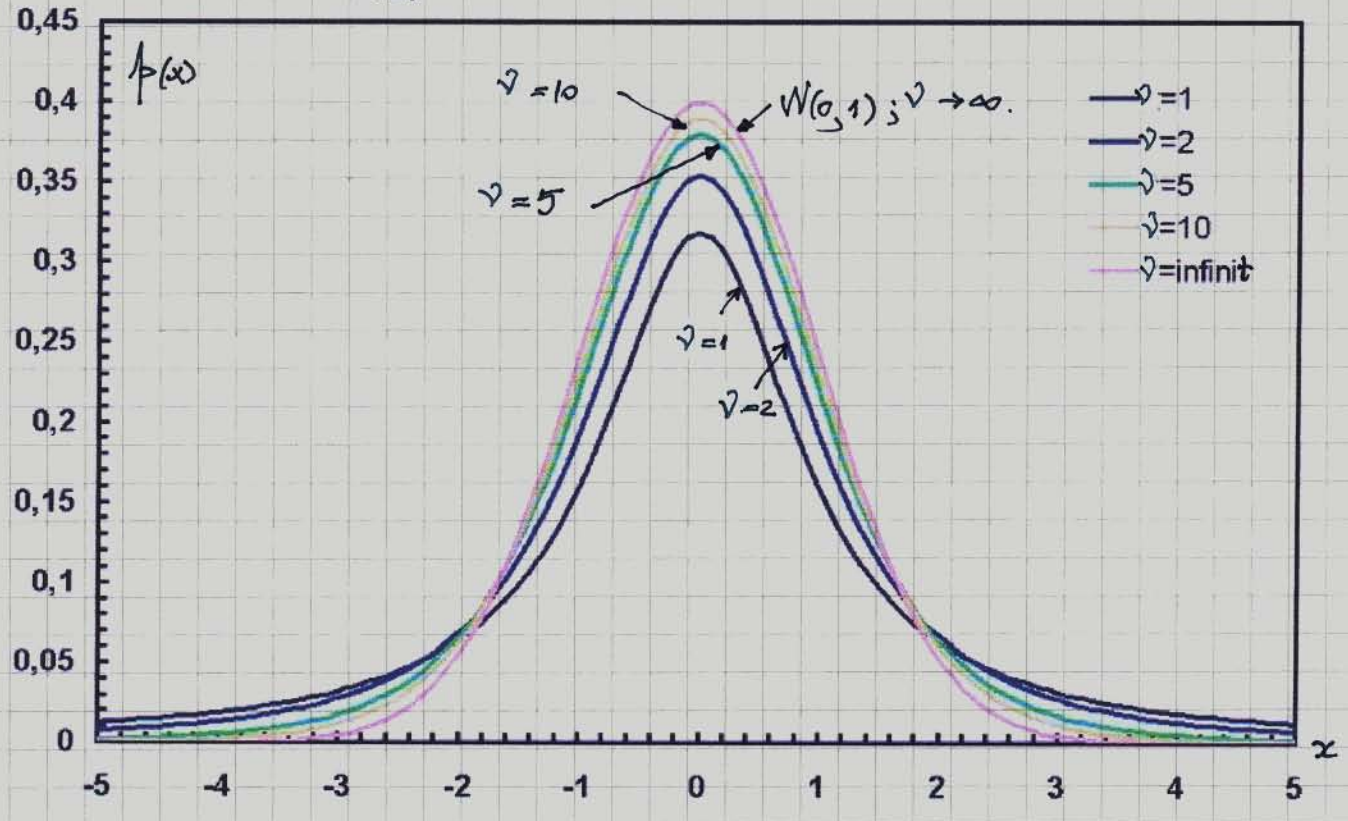


Fig.A6.10 Densitatea de probabilitate pentru distributia "T-Student"

Variabila aleatoare T , definita prin:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_N}{\sqrt{N}}}$$

are o repartiție "Student" sau "T-Student" cu $\nu = N-1$ grade de libertate.

Densitatea de probabilitate a unei v.a. "Student" are expresia

$$p(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\pi\nu} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad ; \nu = N-1 > \quad (A6.68)$$

Pentru $\nu > 1$ media v.a. "Student" este:

$$\mu_T = 0 \quad ; \quad \nu > 1 \quad (A6.69)$$

Dispersia σ_T^2 este definita doar pentru $\nu > 2$:

$$\sigma_T^2 = \frac{\nu}{\nu-2} \quad ; \quad \nu > 2 \quad (A6.70)$$

În figura A6.10 se reprezintă distribuția "Student" pentru grade de libertate din ce în ce mai mari. Pentru $\nu \rightarrow \infty$ se obține distribuția normală, de medie nulă și dispersie unitară, $N(0,1)$. Pentru $N \geq 30$ se poate folosi în locurile $N(0,1)$ în locul distribuției "Student" cu 29 de grade de libertate.

William Sealy Gosset

From Wikipedia, the free encyclopedia

(Redirected from [William Sealey Gosset](#))

Jump to: [navigation](#), [search](#)



William Sealy Gosset, 1876- 1937

William Sealy Gosset ([June 13, 1876](#) – [October 16, 1937](#)) was an [English chemist](#) and [statistician](#), best known by his pen name *Student* and for his work on [Student's t-distribution](#).

Born in [Canterbury, England](#) to Agnes Sealy Vidal and Colonel Frederic Gosset, Gosset attended [Winchester College](#), the famous private school, before reading [chemistry](#) and [mathematics](#) at [New College, Oxford](#). On graduating in [1899](#), he joined the [Dublin](#) brewery of Arthur [Guinness](#) & Son.

[Guinness](#) was a progressive agro-chemical business and Gosset would apply his statistical knowledge both in the brewery and on the farm—to the selection of the best yielding varieties of [barley](#). Gosset acquired that knowledge by study, trial and error and by spending two terms in 1906/7 in the biometric laboratory of [Karl Pearson](#). Gosset and Pearson had a good relationship and Pearson helped Gosset with the mathematics of his papers. Pearson helped with the 1908 papers but he had little appreciation of their importance. The papers addressed the brewer's concern with small samples, while the biometrician typically had hundreds of observations and saw no urgency in developing small-sample methods.

Another researcher at Guinness had previously published a paper containing trade secrets of the Guinness brewery. To prevent further disclosure of confidential information, Guinness prohibited its employees from publishing any papers regardless of the contained information. This meant that Gosset was unable to publish his works under his own name. He therefore used the pseudonym *Student* for his publications to avoid their detection by his employer. Thus his most famous achievement is now referred to as the [Student t-distribution](#), which might otherwise have been the Gosset t-distribution.

Gosset had almost all of his papers including *The probable error of a mean* published in Pearson's journal [Biometrika](#) using the pseudonym *Student*. However, it was [R. A. Fisher](#) who appreciated the importance of Gosset's small-sample work, after Gosset had written to him to say *I am sending you a copy of Student's Tables as you are the only man that's ever likely to use them!*. Fisher believed that Gosset had effected a “logical revolution”. Ironically the *t*-statistic for which Gosset is famous was actually Fisher's creation. Gosset's statistic was $z = t/\sqrt{(n - 1)}$. Fisher introduced the *t*-form because it fitted in with his theory of [degrees of freedom](#). Fisher was also responsible for the applications of the *t*-distribution to regression.

Although introduced by others, [Studentized residuals](#) are named in Student's honor because, like the problem that led to Student's t-distribution, the idea of adjusting for estimated standard deviations is central to that concept.

Gosset's interest in [barley](#) cultivation led him to speculate that [design of experiments](#) should aim, not only at improving the average yield, but also at breeding varieties whose yield was insensitive (robust) to variation in soil and climate. This principle only occurs in the later thought of [Fisher](#) and then in the work of [Genichi Taguchi](#) in the [1950s](#).

In [1935](#), he left [Dublin](#) to take up the position of Head Brewer, in charge of the scientific side of production, at a new [Guinness](#) brewery in London. He died in [Beaconsfield, England](#) of a heart attack^[1].

Gosset was a friend of both [Pearson](#) and [Fisher](#), an achievement, for each had a massive ego and a loathing for the other. Gosset was a modest man who cut short an admirer with the comment that “Fisher would have discovered it all anyway.”

[\[edit\]](#) Bibliography

- *The application of the law of error to the work of the Brewery* ([1904](#), nota interna presso Guinness)
- (February [1907](#)) "On the error of counting with hæmacytometer". [Biometrika](#) **5** (3): 351–360.
- (March [1908](#)) "[The probable error of a mean](#)". [Biometrika](#) **6** (1): 1–25.
- (September [1908](#)) "Probable error of a correlation coefficient". [Biometrika](#) **6** (2/3): 302–310.
- (July–October [1909](#)) "The distribution of the means of samples which are not drawn at random".

Pentru această repartiție, arătată în figura A6.5, media și dispersia nu sunt definite. Nu sunt definite nici cei doi coeficienți, de simetrie și de înclinare.

A7. Bivariabile aleatoare continue

Un cuplu de două v.a. continue $X(\Omega)$ și $Y(\Omega)$ constituie o Bivariabilă ce poate lua valorile x și y , respectiv. Avem, într-o scrisă vectorială:

$$\begin{bmatrix} X(\Omega) \\ Y(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (A7.1)$$

Cele două variabile aleatoare X și Y au o repartiție mutuală. Avem:

$$P\{X \leq x \text{ și } Y \leq y\} = F_{X,Y}(x,y) \quad (A7.2)$$

unde $F_{X,Y}(x,y)$ este funcția de repartiție cumulativă mutuală. Mai avem și:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) du dv \quad (A7.3)$$

în care $f_{X,Y}(x,y)$ este densitatea de repartiție (de probabilitate) mutuală:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad (A7.4)$$

Independența statistică a celor două variabile aleatoare X, Y implică

$$P\{X \in A | Y \in B\} = P\{X \in A\} ; A, B \in \mathbb{R} \text{ mulțuri excluzive} \quad (A7.5)$$

Ținând seama de (A1.13) putem scrie că

$$P\{X \in A | Y \in B\} = \frac{P\{X \in A \text{ și } Y \in B\}}{P\{Y \in B\}} = P\{X \in A\}$$

din care rezultă că:

$$P\{X \in A \text{ și } Y \in B\} = P\{X \in A\} P\{Y \in B\} \quad (A7.6)$$

Din această egalitate se pot deduce două egalități valabile pentru independența statistică a v.a. X și Y :

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (A7.7)$$

și:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y) \quad (A7.8)$$

Relațiile (A7.7) sau (A7.8) sunt condiții necesare și suficiente pentru a angura independența statistică a v.a. X și Y .

A7.1 Valori medii ^{Statistice} pentru variabilele aleatoare continue.

Media unei ^{statistice} variabile aleatoare continue se definește prin:

$$E_{X,Y} \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E_X \{X\} \\ E_Y \{Y\} \end{bmatrix} \quad (A7.9)$$

Dacă $Z = g(X, Y)$

este o altă v.a. continuă, media statistică pentru Z este:

$$E \{Z\} = E \{g(X, Y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (A7.10)$$

Din repartiția mixtă se obțin așa numitele repartiții marginale și anume:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dy; \quad p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x, y) dx \quad (A7.11)$$

Cu aceste două distribuții marginale se determină mediere din membrul drept al relației (A7.9):

$$E_X \{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx; \quad E_Y \{Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy \quad (A7.12)$$

Proprietăți ale mediei statistice variabile.

1. Linearitatea

$$E_{X,Y} \{aX + bY\} = a E_X \{X\} + b E_Y \{Y\} \quad (A7.13)$$

2. În cazul în care X și Y sunt v.a. statistice independente:

$$E_{X,Y} \{XY\} = E_X \{X\} E_Y \{Y\} \quad (A7.14)$$

Covarianța variabilelor aleatoare X și Y .

Momentul mixt de ordinul doi $E_{X,Y} \{XY\}$ este definit prin

$$R_{XY} = E_{X,Y} \{XY\} = \iint_{-\infty}^{\infty} xy p_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (A7.15)$$

și pe numeste corelația v.a. X și Y .

Covarianța celor două v.a., X și Y este momentul ^{central} mixt de ordinul doi:

$$\text{Cov} \{X, Y\} = E_{X,Y} \left\{ (X - E_X \{X\})(Y - E_Y \{Y\}) \right\} \quad (A7.16)$$

Putem transformă (A7.16):

$$\text{Cov} \{X, Y\} = E_{X,Y} \left\{ XY - \underbrace{X E_Y \{Y\}}_{\text{Constantă}} - \underbrace{Y E_X \{X\}}_{\text{Constantă}} + \underbrace{E_X \{X\} E_Y \{Y\}}_{\text{Constantă}} \right\}$$

și deci, în final:

$$= E_{X,Y} \{XY\} - E_X \{X\} E_Y \{Y\} - E_Y \{Y\} E_X \{X\} + E_X \{X\} E_Y \{Y\}$$

$$\text{Cov}\{X, Y\} = E_{X, Y}\{XY\} - E_X\{X\}E_Y\{Y\} \quad (A7.17)$$

Autocovarianța este chiar dispersia unei variabile aleatoare. Pentru oportunitatea de dispersie este ușor de verificat că:

$$\text{Disp}\{X+Y\} = \text{Disp}\{X\} + \text{Disp}\{Y\} + 2\text{Cov}\{X, Y\} \quad (A7.18)$$

Punem $\tilde{X} = X - \mu_X$ și $\tilde{Y} = Y - \mu_Y$ și însumăm de:

$$(\tilde{X} + \tilde{Y})^2 = \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 + 2\tilde{X}\tilde{Y}$$

Cum toți termenii din relație sunt de medie nulă, mediile statistice obținute chiar forma (A7.18).

În legătură cu covarianța se introduce noțiunea de coeficient de corelație între v.a. X și Y , $\rho_{X, Y}$, prin:

$$\rho_{X, Y} = \frac{\text{Cov}\{X, Y\}}{\sqrt{\text{Disp}\{X\} \text{Disp}\{Y\}}} ; \quad -1 \leq \rho_{X, Y} \leq 1 \quad (A7.19)$$

1) Dacă

$$\text{Cov}\{X, Y\} = 0 \Leftrightarrow \rho_{X, Y} = 0$$

se spune că v.a. X și Y sunt necorelate

2) Dacă

$$R_{X, Y} = E_{X, Y}\{XY\} = 0$$

deci corelația este nulă, se spune că v.a. X și Y sunt ortogonale.

3) Se numește matrice de corelație \vec{C} a v.a. X și Y matricea

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \text{Disp}\{X\} & \text{Cov}\{X, Y\} \\ \text{Cov}\{X, Y\} & \text{Disp}\{Y\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \sigma_Y \sigma_X & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} ; \quad \rho_{X, Y} = \rho \quad (A7.20)$$

Valorii principale extrinse din \vec{C} sunt $\sigma_X^2 > 0$ și

$$\begin{vmatrix} \sigma_X^2 & \rho \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \sigma_Y \sigma_X & \sigma_Y^2 \end{vmatrix} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - \rho^2 \sigma_X^2 \sigma_Y^2 = (1 - \rho^2) \sigma_X^2 \sigma_Y^2 \geq 0$$

deoarece $\rho^2 \leq 1$. De consecință \vec{C} este o matrice pozitiv semidefinită, adică, oricare ar fi x_1 și x_2 vede că

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \vec{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0 ; \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Se pot defini și momente mixte de ordin superior lui 2:

$$E_{X, Y}\{X^k Y^l\} = \iint x^k y^l p_{X, Y}(x, y) dx dy \quad (A7.21)$$

sau momente centrate de ordin superior lui 2:

$$E_{X, Y}\{\tilde{X}^k \tilde{Y}^l\} = \iint (x - \mu_X)^k (y - \mu_Y)^l p_{X, Y}(x, y) dx dy \quad (A7.22)$$

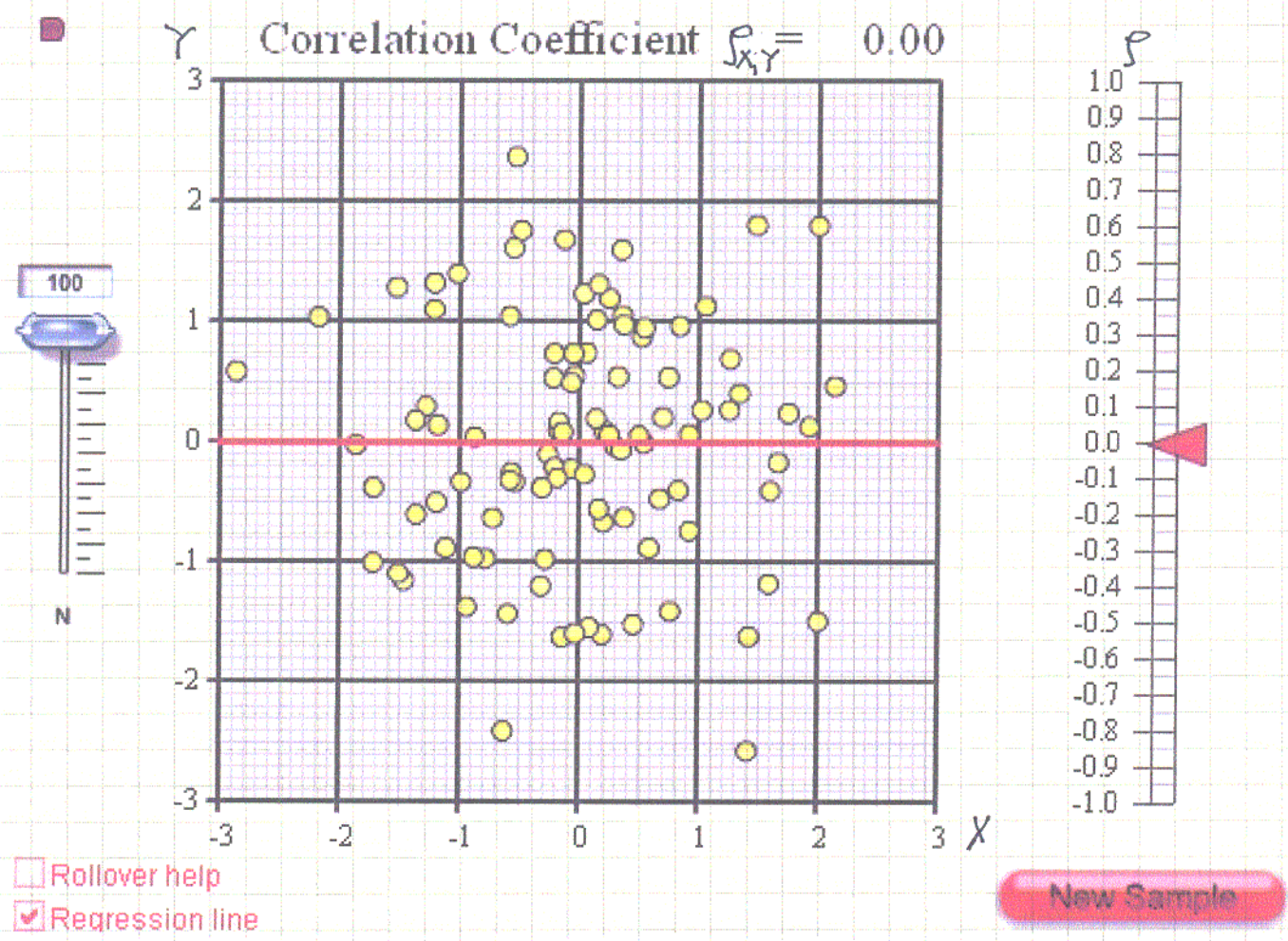


Fig A.7.1 Se arată o diagramă de "împrăștiere", valorile realizărilor a două v.a. X și Y , x_i și y_i constituind coordonatele unui punct în plan, (x, y) . Atunci când nu există corelație între cele două v.a. sau, ceea ce este același lucru, coeficientul de corelație $\rho_{X,Y}$ dintre ele este nul, planul se acoperă ^{comu} de fel în toate direcțiile.

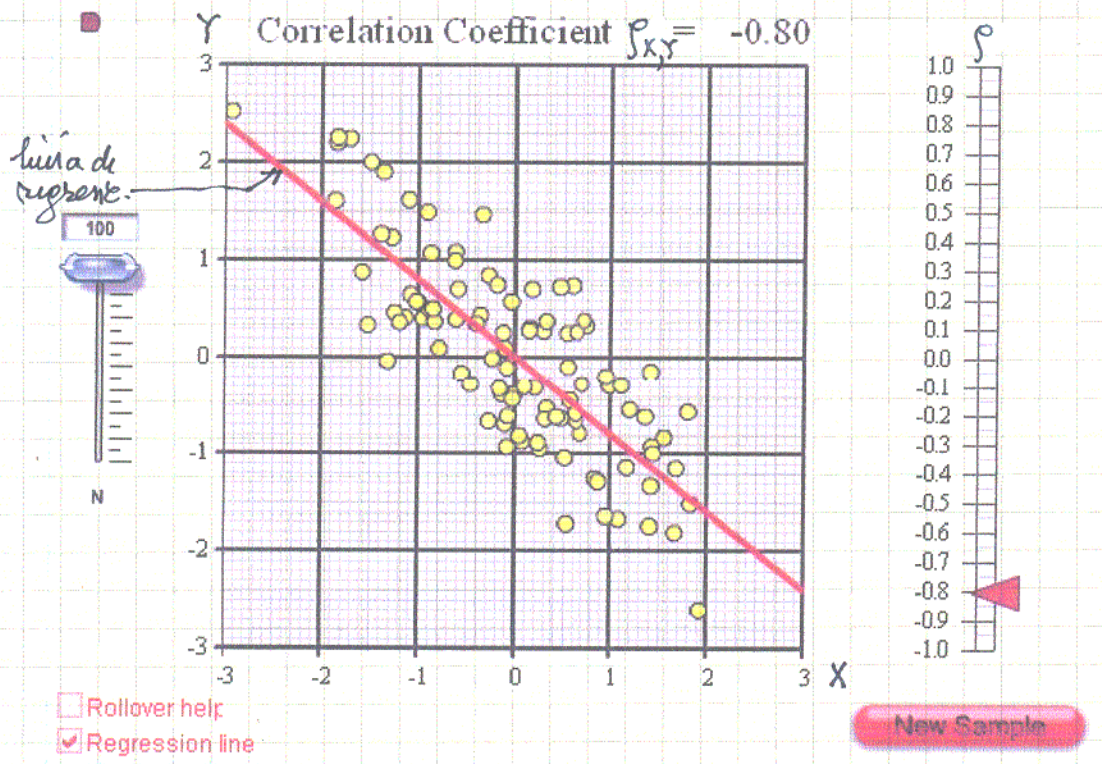
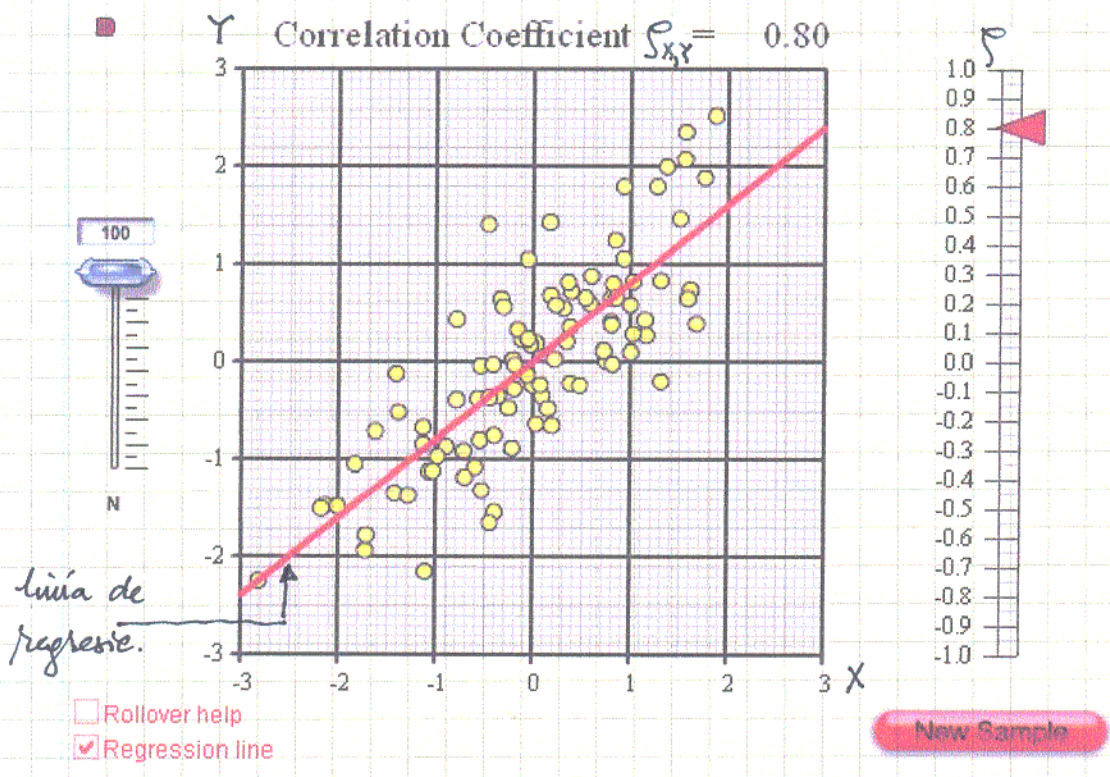


Fig A7.2 Diagrama de "mprăștiere" pentru cazul în care variabilele aleatoare sunt corelate, având $\rho_{XY} = 0,8$ și $\rho_{XY} = -0,8$. Se observă tendința de grupare a punctelor în jurul liniilor de "linia de regresie".

$y = 0,8x$ și $y = -0,8x$, respectiv, care linii poartă numele de "linia de regresie".

A7.2 Transformări ale variabilei aleatoare.

O transformare a variabilei aleatoare $[X, Y]$ în variabila aleatoare $[W, Z]$ este descrisă prin:

$$W = g(X, Y) \quad (A7.23)$$

$$Z = h(X, Y)$$

Vom considera cazul simplu, în care $g(\cdot)$ și $h(\cdot)$ sunt strict monotone deci unice inversabile:

$$x = g^{-1}(w, z) \quad (A7.24)$$

$$y = h^{-1}(w, z)$$

În acest caz:

$$f_{W,Z}(w, z) = f_{X,Y}(g^{-1}(w, z), h^{-1}(w, z)) \left| \det \left\{ \frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} \right\} \right| \quad (A7.25)$$

unde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(w, z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (A7.26)$$

A7.3 Repartiția gaussiană bivariabilă (bidimensională)

Repartiția bivariabilă gaussiană, standard, este cea pentru care densitatea de repartiție mutuală are forma:

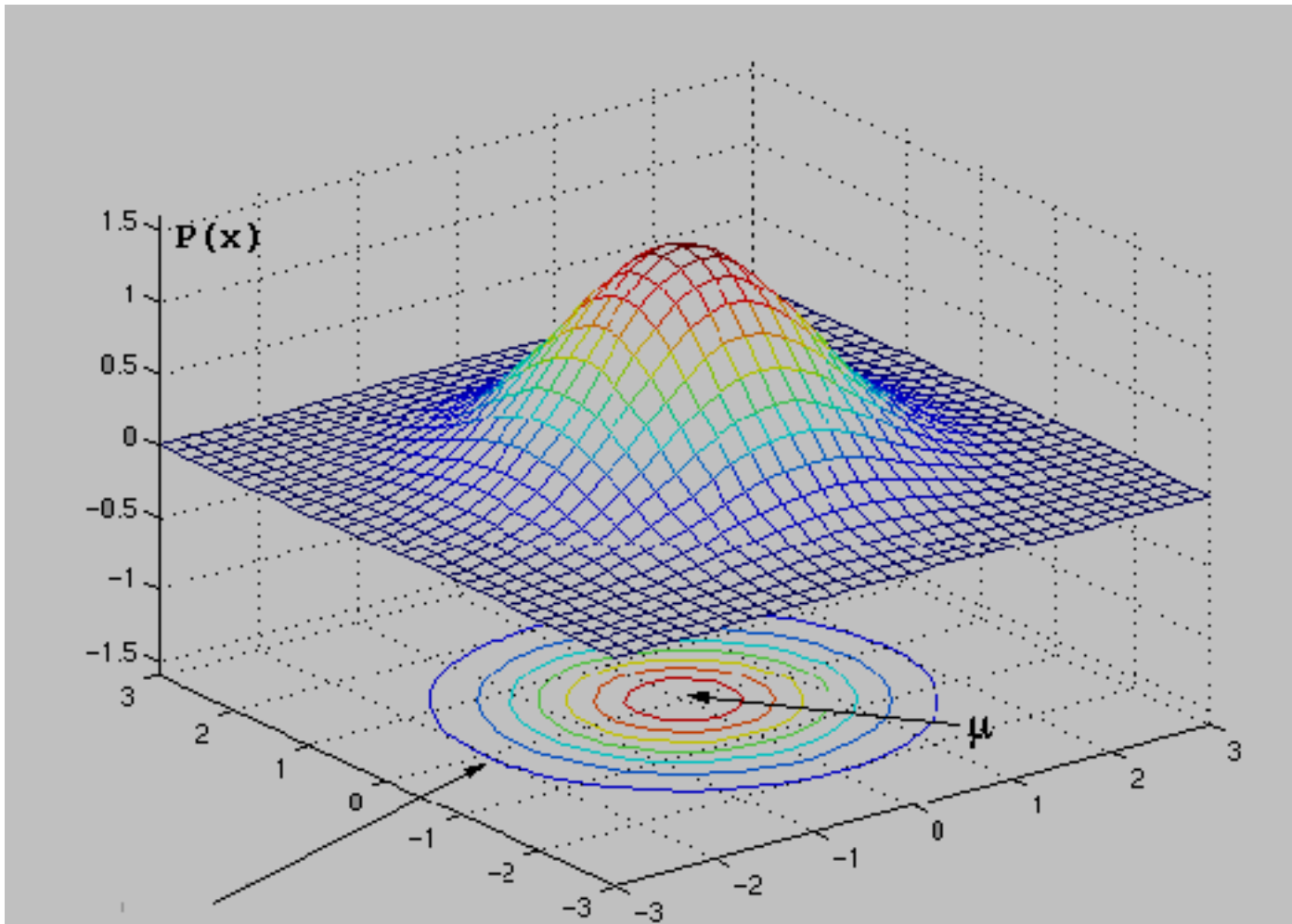
$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right\}; \quad -1 \leq \rho \leq 1. \quad (A7.27)$$

Ecuația $x^2 - 2\rho xy + y^2 = r^2$; $r = \text{const.}$ (A7.28)

definiște contururile de densitate de repartiție constantă, în mod asemănător curbelor de nivel din geografia fizică. Se vede că pentru $\rho = 0$ contururile PDF = const sunt cercuri.

Aplicând (A7.11) se pot determina repartițiile marginale:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{y^2 + 2y\rho x + \rho^2 x^2 + (1-\rho^2)x^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dy \\ &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned} \quad (A7.29)$$



Repartitie gaussiană bivariabilă. Sunt indicate cercurile de valoare p constantă precum și media. Dispersiile pe cele două axe sunt egale.

deoarece notând $\rho x = \mu$ și $1 - \rho^2 = \sigma^2$ integrato se reduce la formula (A6.22) și este egală cu 1. În mod asemănător:

$$f_Y(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (A7.30)$$

Dacă $\rho = 0$ atunci densitatea de repartiție mutuală este factorizabilă:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

adică, pentru o repartiție mutuală bivariată de tip gaussian cu v.a. necorelate:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

ceea ce înseamnă că v.a. X și Y sunt statistice independente.

1. Necorelarea a două v.a. X și Y nu atrage după sine independența statistică. În cazul repartiției mutuale gaussiane însă necorelarea implică independența statistică a v.a. X și Y

2. Independența statistică implică necorelarea v.a. X și Y , oarecum ar fi repartiția lor mutuală

Afirmatia doi se verifică ușor în cazul general deoarece $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ implică $E_{X,Y}\{XY\} = E_X\{X\} E_Y\{Y\}$ și înlocuind în (A7.17) rezultă $Cov\{X,Y\} = 0$.

Vom transforma acum variabilele gaussiane în variabilele $\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_W & 0 \\ 0 & \sigma_Z \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_W} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Z} \end{bmatrix}}_{G^{-1}} \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} \quad (A7.31)$$

Rezultă că

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_W} w \\ \frac{1}{\sigma_Z} z \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x = \frac{w}{\sigma_W} \\ y = \frac{z}{\sigma_Z} \end{matrix} \quad (A7.32)$$

și deci

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_W} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Z} \end{bmatrix} \quad ; \quad \det \left\{ \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)} \right\} = \frac{1}{\sigma_W \sigma_Z} \quad (A7.32)$$

Introducăm rezultatele în (A7.25):

$$f_{W,Z}(w,z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{w}{\sigma_W}\right)^2 - 2\rho \frac{w}{\sigma_W} \frac{z}{\sigma_Z} + \left(\frac{z}{\sigma_Z}\right)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \cdot \frac{1}{\sigma_W \sigma_Z} \quad (A7.33)$$

Vom determina matricea de covarianță pentru variabilele gaussiene transformate:

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & \rho \sigma_w \sigma_z \\ \rho \sigma_w \sigma_z & \sigma_z^2 \end{bmatrix}; \quad \vec{C}^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_w^2} & -\frac{\rho}{\sigma_w \sigma_z} \\ -\frac{\rho}{\sigma_w \sigma_z} & \frac{1}{\sigma_z^2} \end{bmatrix} \quad (A7.34)$$

Avem:

$$\begin{aligned} [w \ z] \vec{C}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} &= \frac{1}{1-\rho^2} [w \ z] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_w^2} & -\frac{\rho}{\sigma_w \sigma_z} \\ -\frac{\rho}{\sigma_w \sigma_z} & \frac{1}{\sigma_z^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2} [w \ z] \begin{bmatrix} \frac{w}{\sigma_w^2} - \frac{\rho z}{\sigma_w \sigma_z} \\ \frac{z}{\sigma_z^2} - \frac{\rho w}{\sigma_w \sigma_z} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\frac{w^2}{\sigma_w^2} - \frac{\rho w z}{\sigma_w \sigma_z} - \frac{\rho w z}{\sigma_w \sigma_z} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right] \end{aligned}$$

În consecință, forma (A7.33) se poate scrie:

$$p_{w,z}(w,z) = \frac{1}{2\pi |\vec{C}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [w \ z] \vec{C}^{-1} \begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix} \right\} \quad (A7.34)$$

Vom face o transformare a părții din $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ în $\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_w & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_w \\ \mu_z \end{bmatrix} \quad (A7.35)$$

și deci

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_w} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W - \mu_w \\ Z - \mu_z \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} x &= \frac{w - \mu_w}{\sigma_w} \\ y &= \frac{z - \mu_z}{\sigma_z} \end{aligned} \quad (A7.36)$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_w} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_z} \end{bmatrix}; \quad \det \left\{ \frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)} \right\} = \frac{1}{\sigma_w \sigma_z} \quad (A7.37)$$

În consecință, tot conform cu (A7.25):

$$p_{w,z}(w,z) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{\left(\frac{w-\mu_w}{\sigma_w}\right)^2 - 2\rho \frac{w-\mu_w}{\sigma_w} \frac{z-\mu_z}{\sigma_z} + \left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \cdot \frac{1}{\sigma_w \sigma_z}$$

Matricea de covarianță pentru W și Z este aceeași, media afectând doar corectura nu și covarianța. În consecință:

$$p_{w,z}(w,z) = \frac{1}{2\pi |\vec{C}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [w - \mu_w \ z - \mu_z] \vec{C}^{-1} \begin{bmatrix} w - \mu_w \\ z - \mu_z \end{bmatrix} \right\} \quad (A7.38)$$

Un caz interesant este cel al modului și al fazei a două v.a. gaussiene necorelate, X și Y

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (A7.39)$$

$$\Theta = \arctg \frac{Y}{X} \quad \Theta \in [-\pi, \pi]$$

Punem

$$x = r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta \quad ; \quad r > 0 \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (A7.40)$$

și deci:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} ; \quad \det \left\{ \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right\} = r \quad (A7.41)$$

Dar, cu $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ și dispersia $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

rezultă

$$p_{R,\theta}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot r = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} ; \quad r > 0 \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (A7.42)$$

Repartitia marginală pentru R este:

$$p_R(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} d\theta = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \cdot 2\pi = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (A7.43)$$

iar pentru θ :

$$p_\theta(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2\sigma^2}=0}^{\infty} e^{-v} dv = \frac{1}{2\pi} e^{-v} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \quad (A7.44)$$

Se vede că:

$$p_{R,\theta}(r,\theta) = p_R(r) p_\theta(\theta) \quad (A7.45)$$

și deci modulul și faza sunt, ca și X și Y , statistice independente și în consecință necorelate.

Comparând (A7.43) cu (A6.47) se observă că modulul R are o repartiție de tip Rayleigh. Comparând (A7.44) cu (A6.46) se vede că argumentul θ are o repartiție uniformă în intervalul $[-\pi, \pi]$.

Transformarea de decorelare a două v.a. gaussiene.

Considerăm o variabilă gaussiană cu densitatea multivariată de repartiție

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi |\vec{C}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x-\mu_x \quad y-\mu_y] \vec{C}^{-1} \begin{bmatrix} x-\mu_x \\ y-\mu_y \end{bmatrix} \right\} \quad (A7.46)$$

Vom transforma variabile $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ în variabilele $\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$ printr-o transformare liniară, defăcând de matricea \vec{C} :

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \vec{G} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (A7.47)$$

Vectrul medie $\vec{\mu}$ înainte de transformare este

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \{X\} \\ E_y \{Y\} \end{bmatrix}$$

(A7.48)

În consecință

$$\begin{bmatrix} E_w \{W\} \\ E_z \{Z\} \end{bmatrix} = \vec{G} \begin{bmatrix} E_x \{X\} \\ E_y \{Y\} \end{bmatrix} = \vec{G} \vec{\mu}$$

(A7.49)

Dar

$$\vec{C} = \vec{C}_{X,Y} = E_{X,Y} \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \right\} = E_{X,Y} \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y} \\ \overset{\circ}{Y}\overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y}\overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \right\}$$

(A7.50)

apa cō matricea de covarianță pentru W și Z se calculează cu:

$$\begin{aligned} \vec{C}_{W,Z} &= E_{W,Z} \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{W} \\ \overset{\circ}{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{W} & \overset{\circ}{Z} \end{bmatrix} \right\} = E_{W,Z} \left\{ \vec{G} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \vec{G}^T \right\} \\ &= \vec{G} E_{X,Y} \left\{ \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} \\ \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \end{bmatrix} \right\} \vec{G}^T \\ &= \vec{G} \vec{C} \vec{G}^T \end{aligned}$$

(A7.51)

Reamintim cō $\overset{\circ}{X} = X - \mu_x$, $\overset{\circ}{Y} = Y - \mu_y$, $\overset{\circ}{W} = W - \mu_w$ și $\overset{\circ}{Z} = Z - \mu_z$.

Rezultă deci:

$$p_{W,Z}(w,z) = \frac{1}{2\pi |\vec{G} \vec{C} \vec{G}^T|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} w - \mu_w \\ z - \mu_z \end{bmatrix} (\vec{G} \vec{C} \vec{G}^T)^{-1} \begin{bmatrix} w - \mu_w \\ z - \mu_z \end{bmatrix} \right\}$$

(A7.52)

$$\text{Dar } \vec{C}_{W,Z} = \begin{bmatrix} \sigma_w^2 & \rho_{W,Z} \sigma_w \sigma_z \\ \rho_{W,Z} \sigma_w \sigma_z & \sigma_z^2 \end{bmatrix}$$

(A7.53)

și dacă $\rho_{W,Z} = 0$ atunci W și Z sunt statistic independente, adică necorelate. În consecință \vec{G} trebuie determinat astfel încât $\vec{G} \vec{C} \vec{G}^T$ să aibă o formă diagonală.

Reamintim cō valorile proprii și vectorii proprii se determină ca în exemplul următor. Fie

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix}$$

variabilele X și Y fiind corelate, matricea neavând forma diagonală.

Valorile proprii λ se determină ca rădăcini ale ecuației

$$\det(\vec{C} - \lambda \vec{I}_n) = 0$$

(A7.54)

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \det \left\{ \begin{bmatrix} 26-\lambda & 6 \\ 6 & 26-\lambda \end{bmatrix} \right\} = (26-\lambda)^2 - 36 = 0$$

sau $26-\lambda = \pm 6$

de unde: $\lambda_1 = 20$ $\lambda_2 = 32$

Acetia sunt cele două valori proprii ale matricei de covarianță de v.a. X și Y .

Vecorii proprii se determină cu

$$(\vec{C} - \lambda_1 \vec{I}_n) \vec{v}_1 = \vec{0}, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = 1 \quad ; \quad (\vec{C} - \lambda_2 \vec{I}_n) \vec{v}_2 = \vec{0}, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = 1 \quad (\text{A7.55})$$

sau:

$$a) \left(\begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix} - 20 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{11} + v_{12} = 0 \quad \text{și} \quad v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1$$

$$v_{11} = -v_{12} \quad 2v_{11}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad v_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad v_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

adică $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$b) \left(\begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix} - 32 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_{21} - v_{22} = 0 \quad \text{și} \quad v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$$

$$v_{21} = v_{22} \quad 2v_{21}^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad v_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad v_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

adică $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

Matricea modală a unei matrice este construită cu vectorii proprii ca și coloane, adică

$$\vec{V} = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A7.56})$$

Se arată că matricea modală satisface relația

$$\vec{V}^T \vec{C} \vec{V} = \vec{\Lambda}$$

(A7.57)

unde $\vec{\Lambda}$ este o matrice diagonală, cu valorile proprii pe diagonala principală. Vom verifica relația (A7.57):

$$\vec{V}^T \vec{C} \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 & 6 \\ 6 & 26 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ -10 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2 \}$$

Comparând (A7.57) cu forma ce trebuie diagonalizată, $\vec{G} \vec{C} \vec{G}^{-1}$ concluzionăm că:

Alegând $\vec{G} = \vec{V}^T$, transpusa matricii modale $\vec{G}_{W,2} = \vec{\Lambda}$, adică $W(n \times 2)$ sunt set gaussiane și mutual gaussiane dar, sunt necorelate și statistic independente. Transformarea liniară definită de transpusa matricii modale a matricii de covarianță conduce la descreșterea celor două mutual v.a. gaussiane.

A8. Densități de probabilitate condiționate pentru variabile aleatoare continue.

Considerăm cazul unei variabile $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ cu repartiția mutuală $f_{X,Y}(x,y)$. Vom defini densitatea de repartiție a variabilei aleatoare Y , condiționată de realitatea $X=x$ a variabilei aleatoare X ca fiind:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \tag{A8.1}$$

În care $f_X(x)$ este repartiția marginală a v.a. X .

Dacă $X \in (x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2})$ și $\Delta x \rightarrow 0$ atunci

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P \{ a \leq Y \leq b \mid x - \frac{\Delta x}{2} < X < x + \frac{\Delta x}{2} \} = \int_a^b f_{Y|X}(y|x) dy \tag{A8.2'}$$

Relație ce se poric prin:

$$P \{ a \leq Y \leq b \mid X=x \} = \int_a^b f_{Y|X}(y|x) dy \tag{A8.2}$$

Pentru o valoare x arem o v.a. Y și deci $f_{Y|X}(y|x)$ este o funcție de y .

Pentru variabilele gaussiane (A7.27) având repartiția marginală $f_X(x)$ dată prin (A7.29), densitatea de repartiție condiționată este:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2 - x^2 + \rho^2 x^2}{2(1-\rho^2)}\right\}$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} \quad (A8.3)$$

Prin urmare atât repartiția marginală cât și repartiția condiționată sunt gaussiene pentru o variabilă gaussiană. Avem:

$$Y|(X=x) \sim N(\rho x, 1-\rho^2) \quad (A8.4)$$

deci variabila este de tip standard.

Se poate stabili o formulă de tip Bayes:

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X|Y}(x|y) p_Y(y)}{p_X(x)} \quad (A8.5)$$

Da

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X}(y|x) p_X(x) = p_{X|Y}(x|y) p_Y(y) \quad (A8.6)$$

și folosind pe ambele (A7.10) deducem că repartițiile marginale se pot exprima și în funcție de probabilitățile condiționate:

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{Y|X}(y|x) p_X(x) dx \quad (A8.7')$$

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X|Y}(x|y) p_Y(y) dy \quad (A8.7'')$$

A8.1 Teorema probabilității totale

Indiferent dacă X și Y sunt statistice dependente sau independente, este recomandabilă utilizarea condiționării pentru calculul unor probabilități.

Fie un eveniment A . Avem:

$$P\{Y \in A\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{Y \in A | X=x\} p_X(x) dx \quad (A8.8)$$

o formulă a probabilității totale. Dar $P\{Y \in A | X=x\}$ poate fi exprimată în funcție de $p_{Y|X}(y|x)$ așa că:

$$P\{Y \in A\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_A p_{Y|X}(y|x) dy \right] p_X(x) dx \quad (A8.9)$$

Vom considera un exemplu. Fie receptorul PSK din figura A8.1

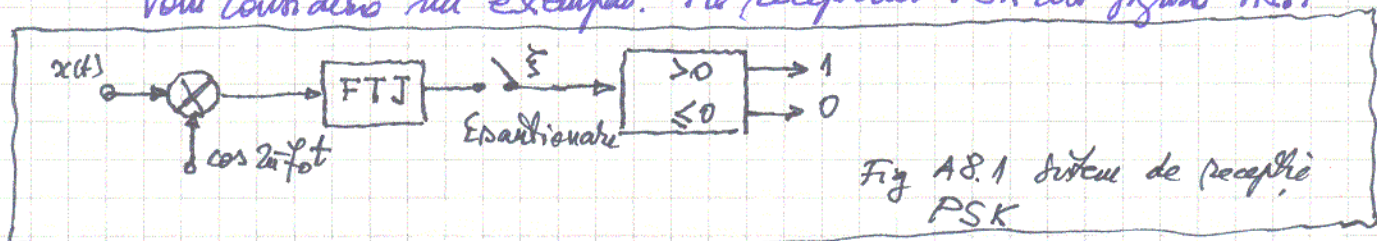


Fig. A8.1 Sistem de recepție PSK

Seamnalul recepționat este $x(t) = s_i(t) + w(t)$, $i=0,1$ unde $w(t)$ este zgomotul din cond. Pentru lipa zgomotului, la recepție multizile ob-
rului apar seamnalele

$$A_0(t) \cos 2\pi f_0 t = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha) \cos 2\pi f_0 t = -A \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4\pi f_0 t}{2} \right)$$

$$A_1(t) \cos 2\pi f_0 t = A \cos 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_0 t = A \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 4\pi f_0 t}{2} \right)$$

După filtrarea trece jos, se culeg esantioanele

$$\xi = \begin{cases} -\frac{A}{2} & \text{pentru simbolul 0} \\ +\frac{A}{2} & \text{pentru simbolul 1} \end{cases}$$

Dacă tinem seama de zgomot, esantioanele sunt

$$\xi = \begin{cases} -\frac{A}{2} + W & \text{pentru simbolul 0} \\ +\frac{A}{2} + W & \text{pentru simbolul 1} \end{cases}$$

unde W este un zgomot gaussian. Când se transmite un "1", eroare apare atunci când $\frac{A}{2} + W \leq 0$, deoarece decizia se ia comparând esantioanele cu pragul "0". Deci un caz de eroare are probabilitatea:

$$P_e = P\left\{ W + \frac{A}{2} \leq 0 \right\} = P\left\{ W \leq -\frac{A}{2} \right\}$$

În transmiterea fără fir fluctuația amplitudinii este guvernată de o repartiție Rayleigh:

$$f_A(a) = \begin{cases} \frac{a}{A^2} e^{-\frac{a^2}{2A^2}} & , a \geq 0 \\ 0 & , a < 0 \end{cases}$$

Vom presupune că A și W sunt statistice independente, ceea ce este normal. Conform cu (A8.8):

$$P_e = P\left\{ W \leq -\frac{A}{2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{ W \leq -\frac{A}{2} \mid A=a \right\} f_A(a) da$$

Dar cum $A=a$ pe produs $W \leq -\frac{A}{2}$ devine $W \leq -\frac{a}{2}$ așa că:

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{ W \leq -\frac{a}{2} \mid A=a \right\} f_A(a) da$$

Dar W și A sunt v.a. statistice independente așa că:

$$P\left\{ W \leq -\frac{a}{2} \mid A=a \right\} = P\left\{ W \leq -\frac{a}{2} \right\}$$

Rezultă că

$$P_e = \int_{-\infty}^{\infty} P\left\{ W \leq -\frac{a}{2} \right\} f_A(a) da \quad \text{etc.}$$

A8.2 Medii condiționate

Pentru o densitate de repartiție condiționată medii se dețin
ca în cazul normal, doar că PDF este funcție de o predicție, $X=x$:

$$E_{Y|X}\{Y|x\} = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy \quad (A8.10)$$

Mai avem, înlocuind x cu v.a. X în (A8.10) și medii după X :

$$E_X\{E_{Y|X}\{Y|X\}\} = E_Y\{Y\} \quad (A8.11)$$

Media $E_{Y|X}\{Y|X\}$ este o funcție de v.a. X și deci se poate media după X .

În cazul repartiției bivariabilei gaussiene (A7.27), am stabilit în (A8.4) că

$$Y(X=x) \sim N(\rho x, 1-\rho^2)$$

adică

$$E_{Y|X}\{Y|x\} = \rho x \quad (A8.12)$$

Prin urmare x ca v.a. X

$$E_{Y|X}\{Y|X\} = \rho X \quad (A8.13)$$

Mediem în funcție de X , ținând seama că repartiția marginală pentru X este - vezi (A7.29) :

$$X \sim N(0, 1) \quad (A8.14)$$

și obținem

$$E_X\{E_{Y|X}\{Y|X\}\} = \rho E_X\{X\} = 0$$

Dar, conform cu (A7.30) și:

$$Y \sim N(0, 1) \quad (A8.15)$$

sau $E_Y\{Y\} = 0$ așa că (A8.11) este verificată.

Se poate arăta că în cazul repartiției bivariabilei gaussiene media condiționată se poate exprima prin felul ă :

$$E_{Y|X}\{Y|x\} = E_Y\{Y\} + \frac{\text{Cov}\{X, Y\}}{\text{Disp}\{X\}}(x - E_X\{X\})$$

$$= \mu_Y + \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X) \quad (A8.16)$$

A9. Variabile aleatoare continue N dimensionale.

A9.1 Vectori aleatori și densități de repartiție (probabilitate)

Un vector aleator N dimensional se notează cu $\vec{X}(N)$ iar o realitate

a sa cu \vec{x}

$$\vec{X}(\Delta) = \begin{bmatrix} X_1(\Delta) \\ X_2(\Delta) \\ \vdots \\ X_N(\Delta) \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

(A9.1); (A9.2)

Vectorul \vec{X} este un punct în spațiul euclidian N dimensional. Fiecare dintre componentele lui $\vec{X}(\Delta)$ este o variabilă aleatoare continuă, $X_k(\Delta)$, $k=1,2,\dots,N$.

Se definește densitatea de conținut probabilitate N dimensională

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (\text{A9.3})$$

pentru care se știe că:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1 \quad (\text{A9.4})$$

Dacă $A \subset \mathbb{R}^N$ este un eveniment, atunci probabilitatea de producere a acestui eveniment se calculează cu:

$$P\{A\} = \int \dots \int_A f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (\text{A9.5})$$

Un exemplu important este cel al multivariatului aleator gaussian pentru care densitatea de probabilitate este:

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\vec{C}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^T \vec{C}^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right\} \quad (\text{A9.6})$$

Se folosesc în locul notației (A9.3) forma $f_{\vec{X}}(\vec{x})$; cu $\vec{\mu}$ notați vectorul medie:

$$E_{\vec{X}} \{ \vec{X} \} = \begin{bmatrix} E_{X_1} \{ X_1 \} \\ E_{X_2} \{ X_2 \} \\ \vdots \\ E_{X_N} \{ X_N \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = \vec{\mu} \quad (\text{A9.7})$$

iar cu \vec{C} matricea de covarianță, o matrice pozitiv definită:

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \text{Disp}\{X_1\} & \text{Cov}\{X_1, X_2\} & \dots & \text{Cov}\{X_1, X_N\} \\ \text{Cov}\{X_2, X_1\} & \text{Disp}\{X_2\} & \dots & \text{Cov}\{X_2, X_N\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}\{X_N, X_1\} & \text{Cov}\{X_N, X_2\} & \dots & \text{Disp}\{X_N\} \end{bmatrix}; |\vec{C}| = \det \vec{C} \quad (\text{A9.8})$$

Pentru determinarea matricii \vec{C} se utilizează, ca și până acum, notația $\{ \cdot \}$.

Dacă X_1, X_2, \dots, X_N formează o multivariată gaussiană ne mai spune că aceste N v.a. sunt mutual gaussiene sau că au o repartiție mutual gaussiană.

Matricea de covarianță \vec{C} este calculată cu relația:

$$\begin{aligned} \vec{C} &= E_{\vec{X}} \{ (\vec{X} - \vec{\mu})(\vec{X} - \vec{\mu})^T \} = E_{\vec{X}} \{ \vec{X}^{\circ} \vec{X}^{\circ T} \} \\ &= E_{\vec{X}} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 & \dot{X}_2 & \dots & \dot{X}_N \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (A9.9)$$

unde $\vec{X}^{\circ} = \vec{X} - \vec{\mu}$ este variabila aleatoare N dimensională centrată iar $\dot{X}_k = X_k - \mu_k$ este variabila aleatoare k centrată.

Repartiția marginală, să zicem a variabilei aleatoare $X_1 = f_{X_1}(x_1)$, se obține conform cu:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_2 dx_3 \dots dx_N \quad (A9.10)$$

Independența statistică a variabilelor aleatoare X_1, X_2, \dots, X_N implică posibilitatea de a exprima densitatea de repartiție (probabilitate) mutuală ca produs al celor N densități de repartiție (probabilitate) marginale:

$$p_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_N}(x_N) \quad (A9.11)$$

Cazul multivariatului aleatoare gaussiane cu componente statistice independente. Vom considera că v.a. componente, X_1, X_2, \dots, X_N sunt necorelate adică $Cov \{ X_k, X_l \} = 0$, pentru $k \neq l$. Pentru acest caz, al necorelării componentelor, matricea de covarianță \vec{C} are o formă diagonală:

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2 \} \quad (A9.12)$$

Inversa ei se determină ușor:

$$\vec{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_N^2 \end{bmatrix} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{\sigma_1^2}, \frac{1}{\sigma_2^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_N^2} \right\} \quad (A9.13)$$

Avem:

$$|\vec{C}| = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{vmatrix} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_N^2 \quad (A9.14)$$

Atunci:

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{\mu})^T \vec{C}^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) &= \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 & \dots & x_N - \mu_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_N^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ x_N - \mu_N \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 - \mu_1 & x_2 - \mu_2 & \dots & x_N - \mu_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} (x_1 - \mu_1) \\ \frac{1}{\sigma_2^2} (x_2 - \mu_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{\sigma_N^2} (x_N - \mu_N) \end{bmatrix} \\ &= \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{(x_N - \mu_N)^2}{\sigma_N^2} \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{(x_m - \mu_m)^2}{\sigma_m^2} \end{aligned} \quad (A9.15)$$

Repartitia multivariata (A9.6) a multivariabilei aleatoare gaussiene cu componentele necorelate devine deci:

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \frac{(x_m - \mu_m)^2}{\sigma_m^2} \right\} \quad (A9.16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_2} \exp \left\{ -\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_N} \exp \left\{ -\frac{(x_N - \mu_N)^2}{2\sigma_N^2} \right\} \\ &= p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2) \dots p_{X_N}(x_N) \end{aligned} \quad (A9.17)$$

sunde

$$X_i \sim W(\mu_i, \sigma_i^2) \quad (A9.18)$$

Se mai poate că, pentru componente necorelate avem

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{m=1}^N p_{X_m}(x_m) \quad (A9.19)$$

În concluzie, dacă un vector aleator are o densitate de repartiție multivariată gaussiană și dacă componentele sunt necorelate atunci:

- 1) matricea de covarianță are o formă diagonală și
- 2) componentele sunt statistic independente.

Reciproc este adevărat. Dacă componentele sunt statistic independente atunci matricea de corelații are o formă diagonală ceea ce înseamnă că aceste componente sunt și necorelate.

Necorelarea implică independența statistică numai dacă repartiția mutuală este gaussiană. Nu este suficient ca repartițiile marginale să fie gaussiene.

A9.2 Transformări ale variabilelor multivariabile.

Considerăm transformarea $\vec{X} \rightarrow \vec{Y}$ definită prin:

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

$$Y_2 = g_2(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

⋮

$$Y_N = g_N(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

(A9.20)

Cu notația

$$\frac{\partial(\vec{y})}{\partial(\vec{x})} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_N)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \frac{\partial x_N}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{bmatrix} \quad (\text{A9.21})$$

avem:

$$P_{Y_1, Y_2, \dots, Y_N}(y_1, y_2, \dots, y_N) = P_{X_1, X_2, \dots, X_N} \left(\overset{x_1}{g_1(\vec{y})}, \overset{x_2}{g_2(\vec{y})}, \dots, \overset{x_N}{g_N(\vec{y})} \right) \left| \det \left(\frac{\partial(\vec{x})}{\partial(\vec{y})} \right) \right| \quad (\text{A9.22})$$

Vom considera cazul unei transformări liniare aplicate unei multivariabile aleatoare gaussiene \vec{X} , transformare definită de matricea \vec{G} :

$$\vec{Y} = \vec{G} \vec{X} \quad (\text{A9.23})$$

avem:

$$\vec{x} = \vec{G}^{-1} \vec{y} \quad (\text{A9.24})$$

și deci:

$$\frac{\partial(\vec{x})}{\partial(\vec{y})} = \vec{G}^{-1} \quad (\text{A9.25})$$

Matricea de corelație \vec{C}_Y se poate determina în funcție de matricea de corelație \vec{C}_X :

$$\begin{aligned} \vec{C}_Y &= E_Y \{ \vec{Y} \vec{Y}^T \} = E_Y \{ (\vec{G} \vec{X}) (\vec{G} \vec{X})^T \} \\ &= E_Y \{ \vec{G} \vec{X} \vec{X}^T \vec{G}^T \} = \vec{G} E_X \{ \vec{X} \vec{X}^T \} \vec{G}^T \\ &= \vec{G} \vec{C}_X \vec{G}^T \end{aligned} \quad (\text{A9.26})$$

și $\vec{\mu}_Y$ în funcție de $\vec{\mu}_X$

$$\vec{\mu}_Y = \vec{G} \vec{\mu}_X \quad (\text{A9.27})$$

Putem obține aceleași rezultate pornind de la repartiția multivariată $f_{\vec{X}}(\vec{x})$

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\vec{C}_X|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu}_X)^T \vec{C}_X^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}_X) \right\}$$

și apoi:

$$\begin{aligned} f_{\vec{Y}}(\vec{y}) &= f_{\vec{X}}(\vec{G}^{-1}\vec{y}) |\det(\vec{G}^{-1})| = f_{\vec{X}}(\vec{G}^{-1}\vec{y}) \frac{1}{|\det(\vec{G})|} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\vec{C}_X|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{G}^{-1}\vec{y} - \vec{\mu}_X)^T \vec{C}_X^{-1} (\vec{G}^{-1}\vec{y} - \vec{\mu}_X) \right\} \frac{1}{|\vec{G}|} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\vec{C}_X|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{G}\vec{\mu}_X)^T \vec{G}^{-1T} \vec{C}_X^{-1} \vec{G}^{-1} (\vec{y} - \vec{G}\vec{\mu}_X) \right\} \frac{1}{\sqrt{|\vec{G}| |\vec{G}^T|}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\vec{G} \vec{C}_X \vec{G}^T|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{G}\vec{\mu}_X)^T (\vec{G} \vec{C}_X \vec{G}^T)^{-1} (\vec{y} - \vec{G}\vec{\mu}_X) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} |\vec{C}_Y|} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{\mu}_Y)^T \vec{C}_Y^{-1} (\vec{y} - \vec{\mu}_Y) \right\} \quad (A9.28) \end{aligned}$$

Rezultă (A9.26) și (A9.27).

A9.3 Medii statistice pentru variabile aleatoare multidimensionale.

Media statistică a unui vector aleator se definește prin:

$$E_{\vec{X}}\{\vec{X}\} = E_{X_1, X_2, \dots, X_N} \left\{ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E_{X_1}\{X_1\} \\ E_{X_2}\{X_2\} \\ \vdots \\ E_{X_N}\{X_N\} \end{bmatrix}; \quad E_{X_1, X_2, \dots, X_N}\{X_i\} = E_{X_i}\{X_i\} \quad (A9.29)$$

Pentru cazul în care se mediato o funcție $g(X_1, X_2, \dots, X_N)$:

$$\begin{aligned} E_{X_1, X_2, \dots, X_N}\{g(X_1, X_2, \dots, X_N)\} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_N) f_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (A9.30) \end{aligned}$$

Vom da și câteva rezultate utile

$$1) \quad E_{X_1, X_2, \dots, X_N} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i X_i \right\} = \sum_{i=1}^N a_i E_{X_i}\{X_i\} \quad (A9.31)$$

$$2) \quad \text{Dispo} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i X_i \right\} = E_{X_1, X_2, \dots, X_N} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i \hat{X}_i \sum_{j=1}^N a_j \hat{X}_j \right\}$$

$$= E_{X_1, X_2, \dots, X_N} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \tilde{X}_i \tilde{X}_j \right\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j E_{X_i, X_j} \{ \tilde{X}_i \tilde{X}_j \}$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \text{Cov} \{ X_i, X_j \}$$

$$= [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N] \begin{bmatrix} \text{Cov} \{ X_1, X_1 \} & \text{Cov} \{ X_1, X_2 \} & \dots & \text{Cov} \{ X_1, X_N \} \\ \text{Cov} \{ X_2, X_1 \} & \text{Cov} \{ X_2, X_2 \} & \dots & \text{Cov} \{ X_2, X_N \} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov} \{ X_N, X_1 \} & \text{Cov} \{ X_N, X_2 \} & \dots & \text{Cov} \{ X_N, X_N \} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

$$= \vec{a}^T \vec{C}_X \vec{a}$$

$$\text{Disp} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i X_i \right\} = \vec{a}^T \vec{C}_X \vec{a} \quad (\text{A9.32})$$

3) Pentru cazul variabilelor X_i necorelate, matricea de covarianță ia o formă diagonală:

$$\vec{C}_X = \text{diag} \{ \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2 \} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A9.33})$$

În acest caz, particularizând (A9.32) obținem:

$$\text{Disp} \left\{ \sum_{i=1}^N a_i X_i \right\} = \sum_{i=1}^N a_i^2 \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2 \text{Disp} \{ X_i \} \quad (\text{A9.34})$$

aleatoare

Un caz particular referitor la variabilele necorelate, pentru $a_i = 1$ este

$$\text{Disp} \left\{ \sum_{i=1}^N X_i \right\} = \sum_{i=1}^N \text{Disp} \{ X_i \} ; \text{Cov} \{ X_i, X_j \} = 0 \text{ pentru } i \neq j \quad (\text{A9.35})$$

4) Media eșantion a N variabile aleatoare statistice independente și cu aceeași distribuție (identic distribuite), variabile IID. Dacă sunt statistice independente sunt și necorelate.

Media eșantion se definește prin

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N \underbrace{\left(\frac{1}{N} \right)}_{a_i} X_i ; \quad (\text{A9.36})$$

Fiindcă X_i sunt IID, $E_{X_i} \{ X_i \} = \mu$ și $\text{Disp} \{ X_i \} = \sigma^2$. Aplicând (A9.31) și (A9.34) obținem:

$$E_{X_1, X_2, \dots, X_N} \{ \bar{X} \} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu = \mu \quad (\text{A9.37})$$

$$\text{Disp} \{ \bar{X} \} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{A9.38})$$

A10. Legea numerelor mari.

Legea numerelor mari are aplicații în estimarea probabilităților pornind de la frecvențele de apariție.

Dacă X_1, X_2, \dots, X_N sunt variabile aleatoare statistice independente și identic distribuite, I.I.D., cu media $\mu = E_X\{X\}$ și dispersia $\text{Disp}\{X\} = \sigma^2$ atunci

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = E_X\{X\} \quad (\text{A10.1})$$

Demonstratia se face făcând uz de inegalitatea lui Cebășev (A4.1). Notăm media eșantion realizată pentru N v.a. cu

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad ; \quad E_X\{\bar{X}_N\} = \mu \quad (\text{A10.2})$$

și avem:

$$P\{|\bar{X}_N - \mu| > \varepsilon\} = P\{|\bar{X}_N - E_X\{\bar{X}_N\}|\} \leq \frac{\text{Disp}\{\bar{X}_N\}}{\varepsilon^2}$$

sau

$$P\{|\bar{X}_N - \mu|\} \leq \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2}$$

Trecem la limită pentru $N \rightarrow \infty$ și avem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\bar{X}_N - \mu|\} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2} = 0$$

În consecință \bar{X} converge, în probabilitate, spre $\mu = E_X\{X\}$

A11. Teorema limitei centrale.

Această teoremă subliniază importanța distribuției gaussiene. Considerăm N variabile aleatoare continue, X_1, X_2, \dots, X_N , statistice independente și identic distribuite (I.I.D.) de medie μ și dispersie σ^2 . Construim v.a. Y_1, Y_2, \dots, Y_N

$$Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A11.1})$$

Avem:

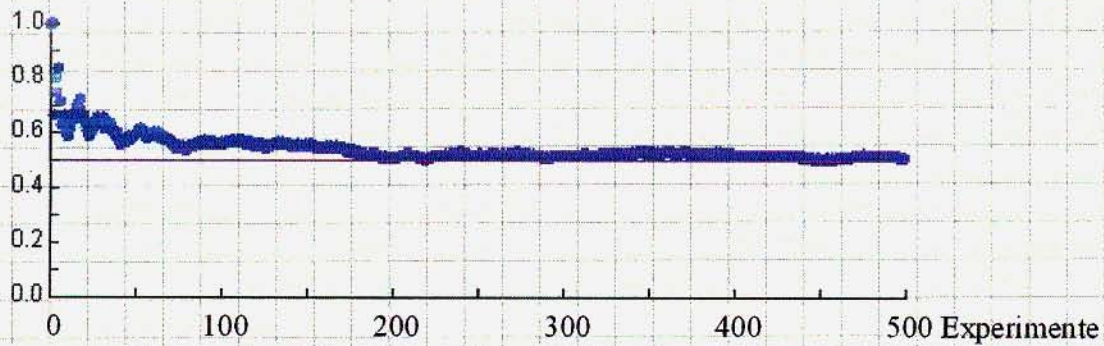
$$E_{Y_i}\{Y_i\} = \frac{1}{\sigma} E_{X_i}\{X_i\} - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0 \quad (\text{A11.2})$$

$$\text{Disp}\{Y_i\} = \frac{1}{\sigma^2} \text{Disp}\{X_i\} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1 \quad (\text{A11.3})$$

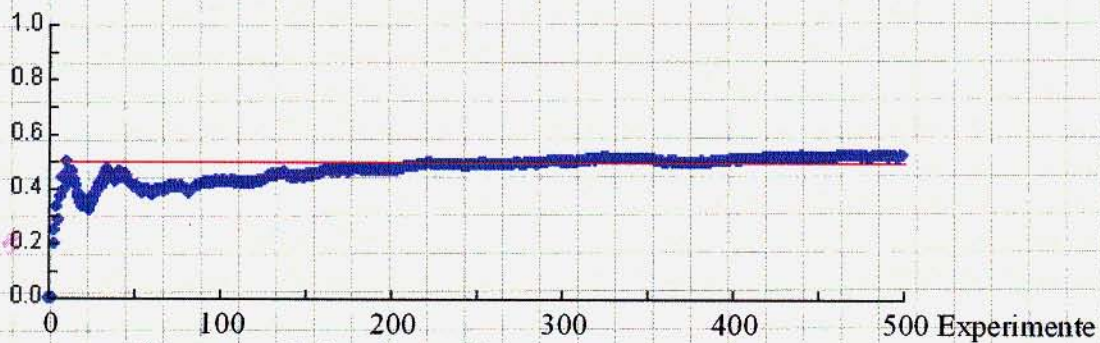
Variabilele aleatoare Y_i sunt și ele statistice independente și identic distribuite (I.I.D.) dar cu media nulă și dispersie unitară. Construim acum

variabila aleatoare Z_N ,

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Y_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad (\text{A11.4})$$



Frecvența relativă de apariție a feței "cap" a unei monede în setul I de 500 de experimente.



Frecvența relativă de apariție a feței "cap" a unei monede în setul II de 500 de experimente.

Fig 10.1 Ilustrată convergența mediei, o frecvență de apariție spre media statistică, aici o probabilitate. Este ilustrarea a două succesiuni de experimente de "aruncare a banului". Se vede că media apariției feței "cap" tinde spre 0,5, probabilitatea de apariție dar relativ mică. Convergența în probabilitate este uneori numită "slabă".

Media statistică a v.a. Z_N este

$$E\{Z_N\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N E\{Y_i\} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N 0 = 0 \quad (A11.5)$$

iar dispersia:

$$\text{Disp}\{Z_N\} = \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{i=1}^N \text{Disp}\{X_i\} = \frac{1}{N\sigma^2} \sum_{i=1}^N \sigma^2 = \frac{N\sigma^2}{N\sigma^2} = 1 \quad (A11.6)$$

În consecință despre Z_N se știe că are media nulă și dispersie unitară dar nu se știe ce densitate de probabilitate are deoarece nu este specificată densitatea de probabilitate a variabilelor X_i .

Teorema limitei centrale Dacă X_1, X_2, \dots, X_N sunt variabile aleatoare continue, statistic independente și identic distribuite (IID), cu media μ și dispersia σ^2 dar densitate de probabilitate oarecare, variabile aleatoare:

$$Z_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad (A11.4)$$

cu media nulă și dispersie unitară, tinde spre o variabilă aleatoare cu distribuție normală, de medie nulă și dispersie una:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_N = Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (A11.7)$$

Observație 1. Teorema limitei centrale se aplică și dacă X_1, X_2, \dots, X_N sunt variabile aleatoare discrete.

Observație 2. Într-un rezistor electronii liberi aflați în mișcare pot fi asimilați cu curenți elementari ce dau naștere unor tensiuni de cădere la bornele acestui rezistor. Tensiunile în cauză, în fiecare moment, sunt valori aleatoare statistic independente cu aproximativ aceeași densitate de probabilitate. Cău numărul de electroni este foarte mare, conform teoremei limitei centrale, la bornele rezistorului apare o tensiune cu repartiția gaussiană.

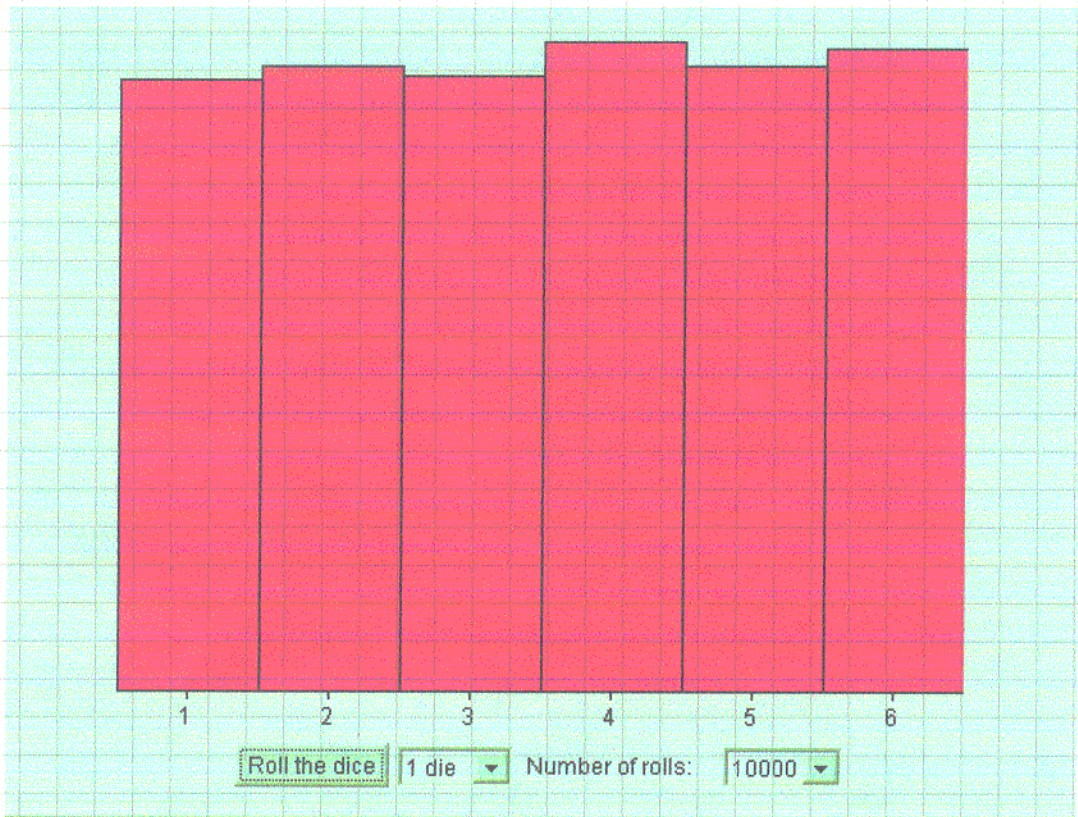


Fig A11.1 Histograma efectuată pentru experiența de aruncare a unui zar. Se vede că cele șase fețe au cam aceeași frecvență de apariție. Variabila aleatoare în cauză este născută cu repartiție uniformă.

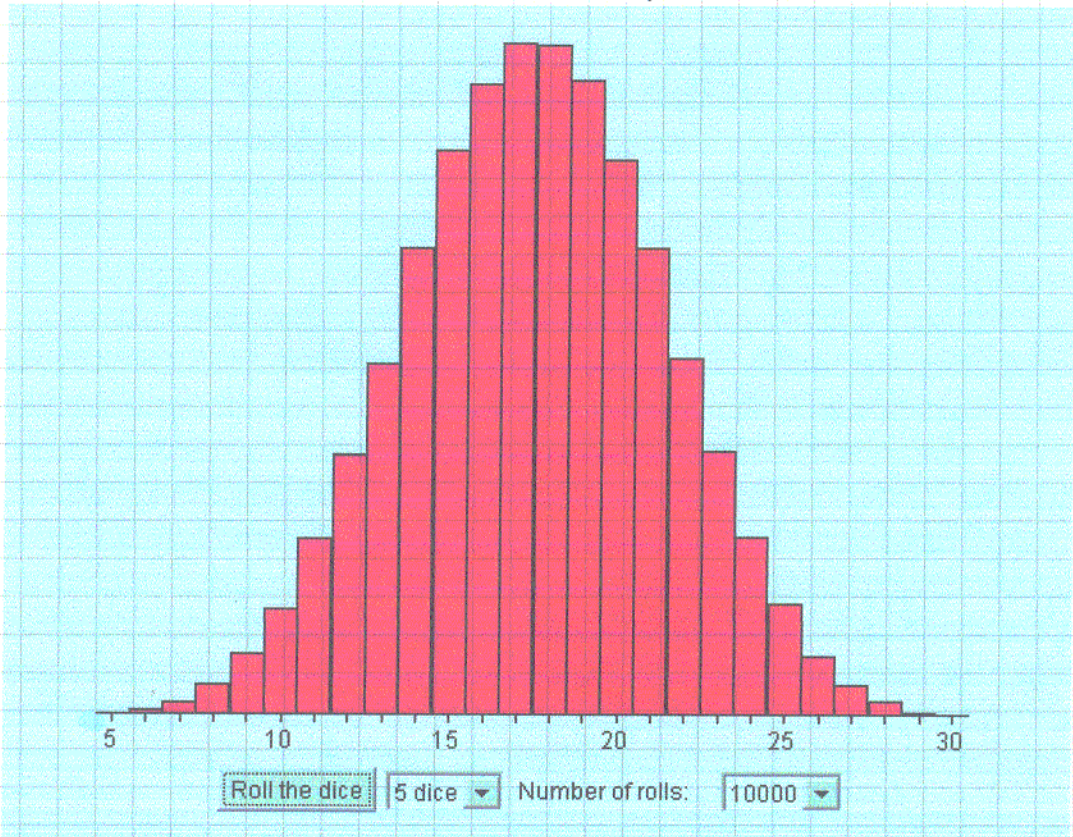


Fig A11.2. Dacă aruncăm cu o dată în nișumăru punctele obținute și punem între 5 și 30. Cele cinci zaruri, mai precis rezultatele experimentelor cu fiecare, generează cinci variabile aleatoare statistice independente. Suma lor este o v.a. a cărei histogramă e dată în figură. Se vede alina gaussiană a histogramei, dar în jurul punctului doar 5 decimetri, cu repartiție uniformă. Se vede valoarea născută a teoremei limitei centrale.

A.12. Procese aleatoare în timp continuu.

Dacă spațiul de selecție este compus din funcții de timp sau fiecărui eveniment elementar ω_i se asociază o funcție de timp, se spune că avem un proces aleator sau un proces stohastic $X(t, \omega)$. Procesul se poate imagina ca o colecție - de câte ori s'împuintă - de funcții de timp posibile. Dacă $\omega = \omega_i$ atunci

$$X(t, \omega_i) = x(t) \tag{A12.1}$$

este o realizare a procesului aleator sau un exemplu.

Dacă fixăm timpul, $t = t_k$ obținem o v.a. $X(t_k, \omega)$ de care noi realizări sunt, așa cum se vede și din figura A12.1, valorile $x_i(t_k) = X(t_k, \omega_i)$. Vom reține deci că:

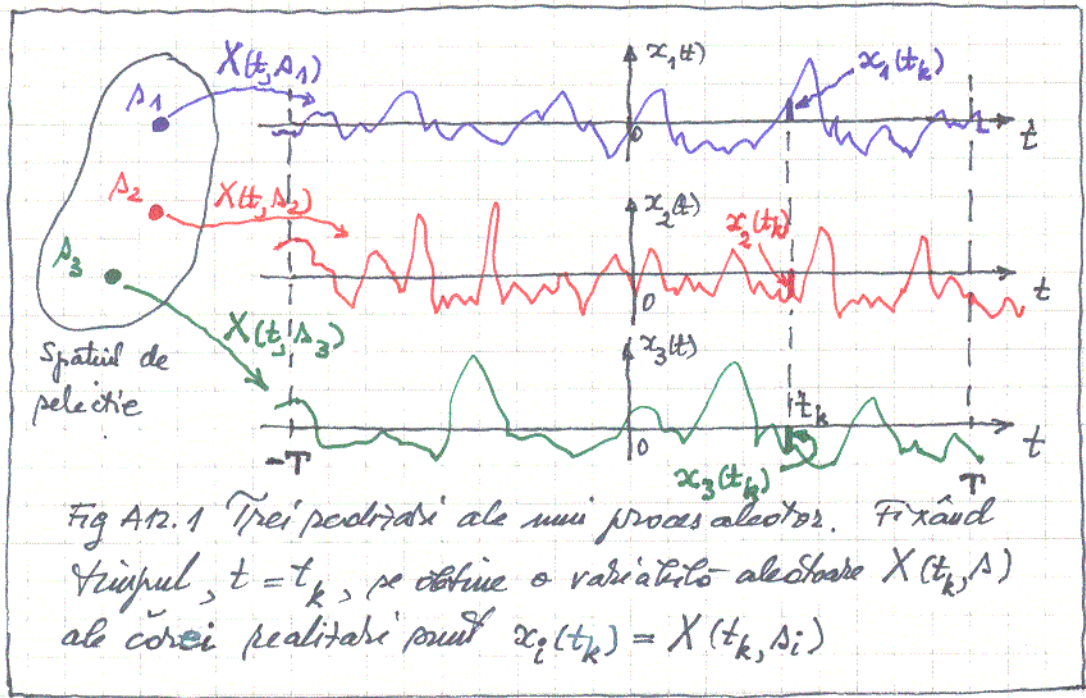


Fig A12.1 Trei realizări ale unui proces aleator. Fixând timpul, $t = t_k$, se obține o variabilă aleatoare $X(t_k, \omega)$ ale cărei realizări sunt $x_i(t_k) = X(t_k, \omega_i)$

1. În cazul unei variabile aleatoare, realizării unui experiment i se asociază un număr real.
2. În cazul unui proces aleator, realizării unui experiment i se asociază o funcție de undă, adică o funcție de timp.

A12.1 Procese staționare.

Considerăm momentele de timp t_1, t_2, \dots, t_k alese după voie și procesul $X(t)$, observat de la $-\infty$ la ∞ ; variabilele aleatoare $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ au o densitate de probabilitate mutuală

$$f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

Fi acum un timp z oarecare. Dacă

$$f_{X(t_1+z), X(t_2+z), \dots, X(t_k+z)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = f_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{A12.2}$$

oricare ar fi momentele t_1, t_2, \dots, t_k și oricare ar fi deplasamentul temporar τ , se spune că procesul aleator $X(t)$ este stationar în sens strict sau strict stationar. Alegerea originii timpului pentru procesele aleatoare stationare este neimportantă.

Există două situații speciale, cu implicații în practica inginerescă:

1. Pentru $k=1$

$$f_{X(t)}(x) = f_{X(t+\tau)}(x), \quad \forall t, \tau \quad (A12.3)$$

Distribuția de ordinul întâi a unui proces aleator stationar nu depinde de timp.

2. Pentru $k=2$ și $\tau = -t_1$:

$$f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1), X(t_2-t_1)}(x_1, x_2), \quad \forall t_1, t_2. \quad (A12.4)$$

Distribuția multivariată de ordinul doi a unui proces aleator stationar depinde doar de diferența de timp între momentele considerate, nu și de valorile lor.

A12.2 Medii statistice pentru procese aleatoare

Fie $X(t)$ un proces aleator cu densitatea de probabilitate de ordinul unu $f_{X(t)}(x)$. Media statistică a procesului este media statistică a variabilei aleatoare ce se obține considerând timpul fixat:

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx = E\{X(t)\} \quad (A12.5)$$

Dacă $X(t)$ este un proces stationar, $f_{X(t)}(x) = f_{X(t_0)}(x)$ și nu depinde de timp.

Concluzie e că media statistică pentru un proces aleator stationar nu depinde de timp.

$$\mu_X(t) = \mu_X, \quad \forall t \quad (A12.6)$$

Funcția de autocorelație $R_X(t_1, t_2)$ a unui proces aleator $X(t)$ se definește prin corelația variabilelor aleatoare obținute fixând timpul:

$$R_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (A12.7)$$

de probabilitate

Dacă procesul $X(t)$ este stationar, densitatea multivariată de ordinul doi nu depinde de t_1 și t_2 în mod independent ci numai de diferența $t_2 - t_1$, așa

cum rezultă din (A12.4). În consecință dacă $X(t)$ este un proces aleator sta-
 tionar,

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = E\{X(t_1)X(t_2 - t_1)\}; \forall t_1, t_2. \quad (A12.8)$$

Prii convenții, pentru funcția de autocorelație se folosește formula:

$$R_X(\tau) = E\{X(t+\tau)X(t)\}; \forall t \quad (A12.9)$$

care se obține din (A12.8) punând $t_1 = t$ și $t_2 = t + \tau$.

Funcția de autocovarianță sau pur și simplu, funcția de covarianță, a unui
 proces aleator $X(t)$, se obține ca și funcția de autocorelație doar centralizând
 cele două variabile aleatoare obținute considerând cele două momente de
 timp, t_1 și t_2 fixate:

$$C_X(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\} \quad (A12.10)$$

$$= E\{X(t_1)X(t_2)\} - \mu_X(t_1)E\{X(t_2)\} - \mu_X(t_2)E\{X(t_1)\} + \mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

$$= R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2) \quad (A12.10)$$

Dacă $X(t)$ este un proces staționar, $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$ și deci
 și $C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2 - t_1)$. Cum $\mu_X(t_1) = \mu_X(t_2) = \mu_X$, rezultă că pentru
 un proces aleator staționar:

$$C_X(t_1, t_2) = C_X(t_2 - t_1) = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2 \quad (A12.11)$$

sau:

$$C_X(\tau) = R_X(\tau) - \mu_X^2 \quad (A12.12)$$

Dacă un proces aleator satisface relațiile (A12.6) și (A12.8) sau (A12.11)
 pe spune că este staționar în sens larg sau "slab staționar".

Câteva proprietăți ale funcției de autocorelație pentru procese staționare.

1. Valoarea medie pătratică a v.a. $X(t)$, considerând t fixat, se obține
 punând în (A12.9) $\tau = 0$. Valoarea în origine a funcției de autocorela-
 ție este chiar valoarea medie pătratică:

$$R_X(0) = E\{X^2(t)\} \quad (A12.13)$$

2. Funcția de autocorelație $R_X(\tau)$ este o funcție pară:

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau) \quad (A12.14)$$

ceea ce se obține direct din relația de definiție. Mai areu deci și

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t-\tau)\} \quad (A12.15)$$

ca definiție alternativă la (A12.9).

3. Funcția de autocorelație are un maxim în origine, la $\tau=0$.

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = E\{X^2(t)\} \quad (A12.16)$$

Avem:

$$E\{[X(t+\tau) \pm X(t)]^2\} \geq 0$$

ce o medie a unui pătrat, ponderat cu o densitate de probabilitate nenegativă. Dezvoltăm:

$$E\{X^2(t+\tau)\} \pm 2E\{X(t+\tau)X(t)\} + E\{X^2(t)\} \geq 0$$

Cele două valori medii pătratice sunt egale, procesul $X(t)$ fiind staționar. Prin urmare:

$$2E\{X^2(t)\} \geq \pm 2R_x(\tau) \Leftrightarrow R_x(0) \geq \pm R_x(\tau)$$

în rezultat (A12.16).

4. Pentru $\tau \rightarrow \pm \infty$ $R_x(\tau) \rightarrow \mu_x^2$. Dacă $\mu_x = 0$ atunci $R_x(\tau) \rightarrow 0$ atunci când $\tau \rightarrow \pm \infty$. Autocorelația descrie interdependența a două v.a.

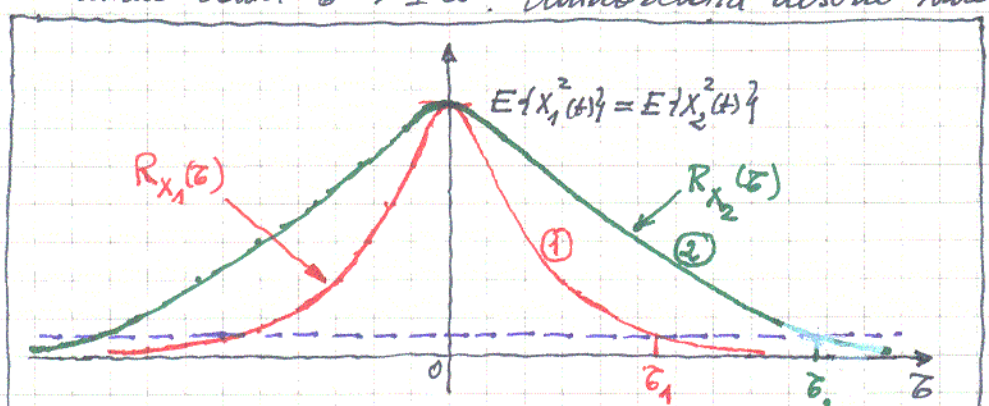


Fig A12.2 Funcțiile de autocorelație pentru două procese de medii nule, $X_1(t)$ și $X_2(t)$. Procesul $X_1(t)$ are fluctuații mai rapide decât procesul $X_2(t)$. τ_1 și τ_2 sunt "timpuri de corelare" ai celor două procese.

obținute din procesul $X(t)$, fixând timpul la t și $t+\tau$. Cu cât τ este mai mare $X(t+\tau)$ va prezenta o interdependență tot mai slabă față de $X(t)$.

În figura A12.2 se prezintă cazul a două procese, $X_1(t)$ și $X_2(t)$,

aceor valori medii pătratice sau $R_{X_1}(0) = R_{X_2}(0)$. Dacă procesul ① are fluctuații mai rapide decât procesul ②, gradul de interdependență va scădea mai repede pentru procesul ① decât pentru procesul ②, odată cu creșterea lui τ . Se introduce noțiunea de "timp de corelare" ca fiind timpul după care $R_x(\tau)$ poate sub un nivel minim considerat semnificativ într-o aplicație. Pentru τ peste timpul de corelare se poate considera că nu există interdependență între v.a. $X(t)$ și $X(t+\tau)$.

A12.3 Două exemple.

1). Vom lucra în discuție un caz aparte, în care procesul este descris de relația:

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta) \quad (\text{A12.17})$$

Variabila aleatoare Θ este uniform distribuită în intervalul $[-\pi, \pi]$ având

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{A12.18})$$

Odată ce v.a. Θ ia o valoare, Θ , $X(t)$ este un semnal determinat. Pe măsură de trecerea pe, în timp, Θ nu se schimbă. În alt experiment însă, v.a. Θ ia o altă valoare, p.a.m.d. În figura A12.3 se reprezintă patru realizări ale pro-

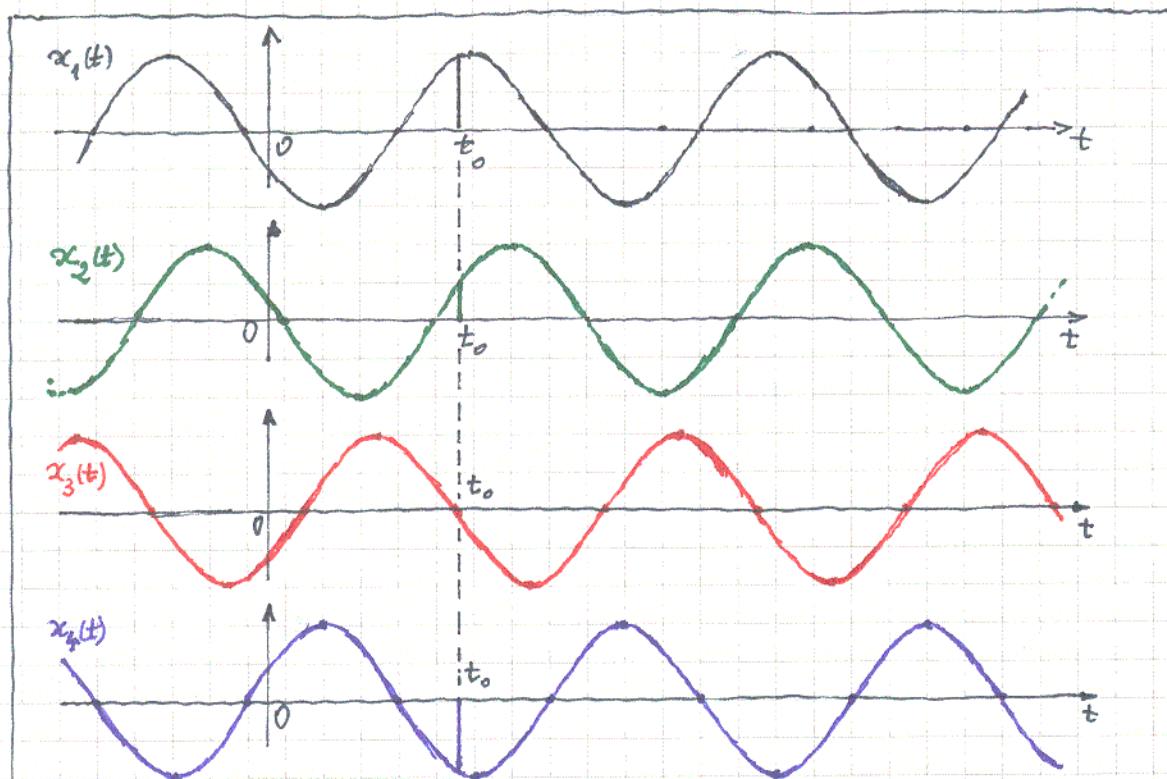


Fig. A12.3 Patru realizări $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ și $x_4(t)$ ale procesului $X(t)$ din relația (A12.17). Considerând timpul fixat, $t = t_0$, valorile $x_1(t_0) \div x_4(t_0)$ sunt realizări ale unei v.a. Această din urmă poate fi considerată funcție de v.a. Θ și mediată statistic conform cu (A3.5)

celului (aleator) $X(t)$ din relația (A12.17), $x_1(t) \div x_4(t)$. Media statistică a procesului se calculează aplicând (A3.5), cu $f_{\Theta}(\theta)$ dat de (A12.18):

$$\begin{aligned} E\{X(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} A \cos(2\pi f_c t + \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(2\pi f_c t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\ &= \frac{A}{2\pi} \left[\sin(2\pi f_c t + \theta) \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{A}{2\pi} \left[\sin(2\pi f_c t + \pi) - \sin(2\pi f_c t - \pi) \right] \\ &= \frac{A}{2\pi} \left[\sin(2\pi f_c t + \pi) - \sin(2\pi f_c t - \pi + 2\pi) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A12.19})$$

Media procesului aleator $X(t)$ considerat este nulă (nă deci nă constantă în timp).

Autocorelația, identică în acest caz cu covarianța deoarece media este nulă, se calculează cu :

$$\begin{aligned}
R_X(t_1, t_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} A \cos(2\pi f_c t_1 + \theta) A \cos(2\pi f_c t_2 + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\
&= \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos[2\pi f_c (t_2 - t_1)] + \cos[2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\theta] \right\} d\theta \\
&= \frac{A^2}{4\pi} \cos[2\pi f_c (t_2 - t_1)] \cdot \int_{-\pi}^{\pi} d\theta + \frac{A^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\theta] d\theta \\
&= \frac{A^2}{4\pi} \cos[2\pi f_c (t_2 - t_1)] 2\pi + \frac{A^2}{4\pi} \frac{1}{2} \sin[2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\theta] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{A^2}{2} \cos[2\pi f_c (t_2 - t_1)] + \frac{A^2}{8\pi} \underbrace{\left\{ \sin[2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\pi] - \sin[2\pi f_c (t_2 + t_1) - 2\pi] \right\}}_{=0} \\
&= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_c (t_2 - t_1) \tag{A12.20}
\end{aligned}$$

Se observă că funcția de autocorelație nu depinde de valorile t_1 și t_2 ci numai de diferența $\tau = t_2 - t_1$ așa că putem scrie:

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_c \tau.$$

Funcția de autocorelație este, ca și procesul, periodic așa că la un interval nu se amestecă. Procesul se repetă peste el însuși la o deplasare cu multiplii întregi de $T_c = 1/f_c$.

Având în vedere (A12.19) și (A12.20) procesul (A12.17) poate fi declarat măcar staționar în sens larg.

2) Procesul aleator undă binară NRZ Bipolară. Procesul $X(t)$ constă dintr-o colecție de secvențe binare. În figura A12.4 se arată o realizare a sa,

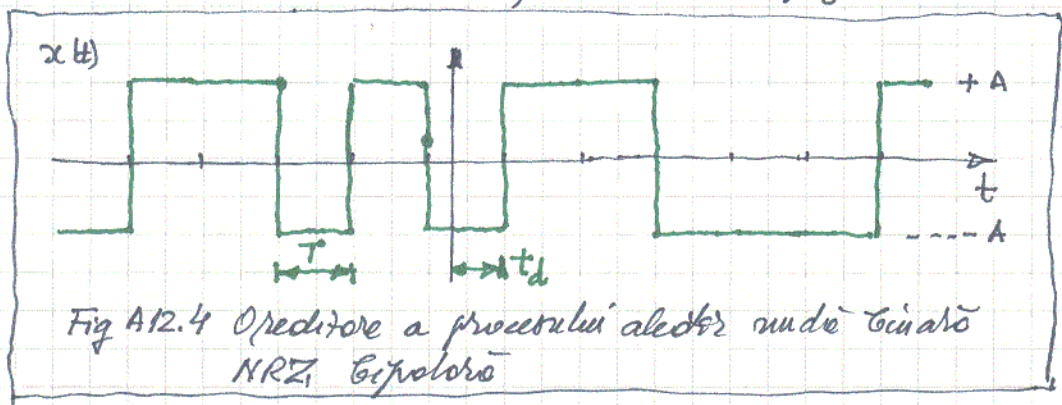


Fig A12.4 O realizare a procesului aleator undă binară NRZ Bipolară

$x(t)$. Vom face câteva precizări:

1. Simbolurile 1 și 0 pot fi reprezentate prin impulsuri de durată T și de amplitudine $+A$

și $-A$, respectiv.

2) Fata de un moment de referinta, $t=0$, prima variabila (daca are loc) se petrece la un moment de timp t_d situat undeva intre 0 si T , cu o probabilitate uniforma. Putem privi t_d pentru o perioada $x(t)$ ca fiind, la randul sau, o predictie a unei variabile aleatoare, T_d cu densitatea de probabilitate

$$p_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T} & ; 0 \leq t_d \leq T \\ 0 & ; \text{in rest} \end{cases} \quad (A12.21)$$

3) In oricare interval de timp, $[t_d + (n-1)T, t_d + nT]$ cele doua simboluri apar cu aceasi probabilitate, $\frac{1}{2}$:

$$P\{A\} = P\{-A\} = \frac{1}{2} \quad (A12.22)$$

Simbolurile sunt statistice independente, chiar daca sunt "vecine"

a) Asem deci:

$$E\{X(t)\} = AP\{A\} + (-A)P\{-A\} = 0. \quad (A12.23)$$

procesul fiind de medie ^{statistica} nulla.

b) Pentru a evalua functia de autocorelatie trebuie sa calculam media statistica $E\{X(t_k)X(t_i)\}$.

Daca $|t_k - t_i| > T$, variabilele aleatoare $X(t_k)$ si $X(t_i)$ sunt din intervale de impuls diferite si ca atare sunt statistice independente. In consecinta:

$$R_X(t_k, t_i) = E\{X(t_k)X(t_i)\} = E\{X(t_k)\}E\{X(t_i)\} = 0$$

sau:

$$R_X(t_k, t_i) = 0 \text{ pentru } |t_k - t_i| > T \quad (A12.24)$$

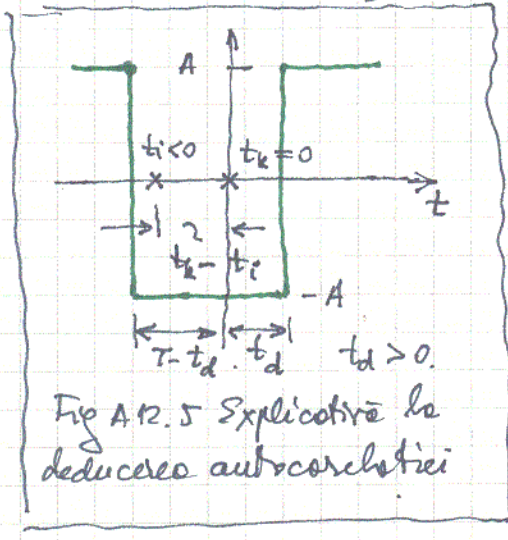


Fig A12.5 Explicative la deducerea autocorelatiei

Fi acum t_d predictat si, pentru precizarea ideilor $t_k = 0$ si $t_i < 0$. Conditiia ca t_k si t_i sa cada in acelasi interval de impuls, adica ce t_d este fixat, este

$$|t_k - t_i| < T - t_d$$

sau $t_d < T - |t_k - t_i|$ - vezi in figura A12.5

Media statistica a produsului $X(t_k)X(t_i)$ conditionata de $T_d = t_d$ este

$$E\{X(t_k)X(t_i) | T_d = t_d\} = A^2 ; \text{ pentru } t_d < T - |t_k - t_i|$$

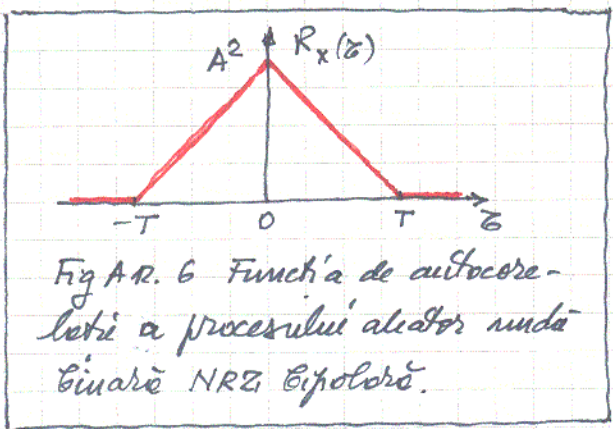
Pentru $t_d > T - |t_k - t_i|$ media conditionata este evident nulla deoarece $X(t_k)$ si $X(t_i)$ sunt prelevate din intervale de impuls diferite.

Autocorelăția se obține efectuând medierea statistică pentru toate valorile T_d posibile:

$$\begin{aligned}
 R_x(t_k, t_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} E\{X(t_k)X(t_i) | T_d = t_d\} p_{T_d}(t_d) dt_d \\
 &= \int_0^{T-|t_k-t_i|} A^2 \frac{1}{T} dt_d = \frac{A^2 t_d}{T} \Big|_0^{T-|t_k-t_i|} \\
 &= A^2 \left(1 - \frac{|t_k-t_i|}{T}\right) \text{ cu } T > |t_k-t_i| \quad (A12.25)
 \end{aligned}$$

Procedând în mod asemănător pentru toate valorile t_k posibile se deduce aceeași relație, (A12.25), ceea ce înseamnă că $R_x(t_k, t_i) = R_x(|t_k-t_i|)$, sau, ținând seama și de (A12.24):

$$R_x(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & ; |\tau| < T \\ 0 & ; |\tau| \geq T \end{cases} \quad (A12.26)$$



În figura A12.6 se prezintă funcția de autocorelație (A12.26). Căci media procesului este nulă, autocorelația este egală cu covarianța procesului.

Având în vedere relațiile (A12.23) și (A12.26) rezultă că procesul aleator în cauză este staționar cel puțin în sens larg.

A12.4 Intercorelația proceselor aleatoare.

Vom discuta cazul determinării interdependenței a două procese aleatoare, $X(t)$ și $Y(t)$. Măsură interdependenței este dată de funcția de intercorelație a variabilelor aleatoare $X(t_1)$ și $Y(t_2)$ considerând momentele de timp t_1 și t_2 fixate:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)Y(t_2)\} \quad (A12.27)$$

Putem defini și intercorelația între procesul $Y(t)$ și procesul $X(t)$ prin:

$$R_{YX}(t_1, t_2) = E\{Y(t_1)X(t_2)\} \quad (A12.28)$$

Se observă că

$$R_{YX}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_2, t_1) \quad (A12.29)$$

În mod asemănător se definește covarianța proceselor aleatoare $X(t)$ și $Y(t)$ prin:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E \{ [X(t_1) - \mu_X(t_1)] [Y(t_2) - \mu_Y(t_2)] \}$$

$$= R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2) \quad (A12.30)$$

$$C_{YX}(t_1, t_2) = E \{ [Y(t_1) - \mu_Y(t_1)] [X(t_2) - \mu_X(t_2)] \}$$

$$= R_{YX}(t_1, t_2) - \mu_Y(t_1) \mu_X(t_2) \quad (A12.31)$$

Dacă procesele aleatoare sunt staționare $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1)$ și
 $R_Y(t_1, t_2) = R_Y(t_2 - t_1)$. Dacă și :

$$R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_2 - t_1) = R_{XY}(\tau) \quad ; \quad \tau = t_2 - t_1 \quad (A12.32)$$

$$R_{YX}(t_1, t_2) = R_{YX}(t_2 - t_1) = R_{YX}(\tau) \quad ; \quad \tau = t_2 - t_1$$

Procesele sunt "mutual staționare", cel puțin din punctul de vedere al corelației.

Proprietățile a două procese ^{aleatoare} în legătură cu corelația, se exprimă sub forma unei matrice de corelație sau a unei matrice de covarianță

$$\vec{R}_{XY}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} R_X(t_1, t_2) & R_{XY}(t_1, t_2) \\ R_{YX}(t_1, t_2) & R_Y(t_1, t_2) \end{bmatrix} ; \quad \vec{C}_{XY}(t_1, t_2) = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_2) & C_{XY}(t_1, t_2) \\ C_{YX}(t_1, t_2) & C_Y(t_1, t_2) \end{bmatrix} \quad (A12.33)$$

Dacă cele două procese sunt staționare și sunt și mutual staționare avem

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (A12.33)$$

iar matricele \vec{R}_{XY} și \vec{C}_{XY} depind și ele numai de $t_2 - t_1 = \tau$, adică :

$$\vec{R}_{XY}(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix} ; \quad \vec{C}_{XY}(\tau) = \begin{bmatrix} C_X(\tau) & C_{XY}(\tau) \\ C_{YX}(\tau) & C_Y(\tau) \end{bmatrix} \quad (A12.34)$$

Pentru exemplificare vom considera două procese aleatoare $X_1(t)$ și $X_2(t)$ care provin dintr-un proces aleator staționar $X(t)$ ce modulează două purtătoare în cuadratură și cu fază inițială Θ variabilă aleatoare uniform distribuită, $f_{\Theta}(\theta)$ fiind dată în relația (A12.18) :

$$X_1(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$X_2(t) = X(t) \sin(2\pi f_c t + \Theta) \quad \text{și fixat}$$

Se acceptă întotdeauna ipoteza că $X(t)$ și Θ sunt staționare independente.

Avem deci

$$\mu_{X_1}(t) = E \{ X_1(t) \} = E \{ X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta) \} = E \{ X(t) \} \underbrace{E \{ \cos(2\pi f_c t + \Theta) \}}_{=0} = 0$$

La fel rezultă și $\mu_2(t) = 0$. Pentru calculul autocorelației procesului $X_1(t)$ vom aplica formula A12.7, ținând seama de independența dintre $X(t)$ și Θ :

$$\begin{aligned} R_{X_1}(t_1, t_2) &= E \{ X(t_1) \cos[2\pi f_c t_1 + \Theta] X(t_2) \cos[2\pi f_c t_2 + \Theta] \} \\ &= E \{ X(t_1) X(t_2) \} E \{ \cos[2\pi f_c t_1 + \Theta] \cos[2\pi f_c t_2 + \Theta] \} \\ &= R_X(t_2 - t_1) \frac{1}{2} \cos 2\pi f_c (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

Prin urmare, punând $t_2 - t_1 = \tau$ rezultă:

$$\text{Apoi: } R_{X_1}(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_c \tau \quad (\text{A12.35})$$

$$\begin{aligned} R_{X_2}(t_1, t_2) &= E \{ X(t_1) \sin[2\pi f_c t_1 + \Theta] X(t_2) \sin[2\pi f_c t_2 + \Theta] \} \\ &= E \{ X(t_1) X(t_2) \} \frac{1}{2} E \{ \cos[2\pi f_c (t_2 - t_1)] - \cos[2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\Theta] \} \\ &= R_X(\tau) \frac{1}{2} \cos 2\pi f_c \tau \end{aligned} \quad (\text{A12.36})$$

Prin urmare $R_{X_2}(\tau) = R_X(\tau)$.

Intercorelația celor două procese se calculează după cum urmează:

$$\begin{aligned} R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) &= E \{ X(t_1) \cos[2\pi f_c t_1 + \Theta] X(t_2) \sin[2\pi f_c t_2 + \Theta] \} \\ &= E \{ X(t_1) X(t_2) \} \frac{1}{2} E \{ -\sin[2\pi f_c (t_2 - t_1)] + \sin[2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\Theta] \} \\ &= -R_X(t_1, t_2) \frac{1}{2} \sin 2\pi f_c (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

deoarece

$$E \{ \sin[2\pi f_c (t_2 - t_1) + 2\Theta] \} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin[2\pi f_c (t_2 - t_1) + 2\theta] \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

Rezultă că procesele $X_1(t)$ și $X_2(t)$ sunt și mutual staționare, cel puțin în sens larg, adică

$$R_{X_1 X_2}(\tau) = -\frac{1}{2} R_X(\tau) \sin 2\pi f_c \tau \quad (\text{A12.37})$$

Asem, ținând seama de (A12.33)

$$R_{X_2 X_1}(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \sin 2\pi f_c \tau \quad (\text{A12.38})$$

Cum medii sunt nule matricea de covarianță este identică cu matricea de corelație:

$$\vec{C}_{X_1 X_2}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_c \tau & -\frac{1}{2} R_X(\tau) \sin 2\pi f_c \tau \\ \frac{1}{2} R_X(\tau) \sin 2\pi f_c \tau & \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_c \tau \end{bmatrix} = \frac{1}{2} R_X(\tau) \begin{bmatrix} \cos 2\pi f_c \tau & -\sin 2\pi f_c \tau \\ \sin 2\pi f_c \tau & \cos 2\pi f_c \tau \end{bmatrix} \quad (\text{A12.39})$$

A12.5 Procese aleatoare ergodice

Mediile statistice ale unui proces se obțin fixând timpul și calculând media statistică a variabilei aleatoare rezultate. Medierea se face "transversal" pe axa timpului, fiind vorba de o mediere pe o colecție de procese, la un moment de timp dat, dar arbitrar ales.

Puteți însă realiza și medieri "în lungul" axei timpului, considerând o singură realitate a procesului, $x(t)$. Se pune întrebarea dacă medind în timp un singur esantion al procesului (o singură realitate) nu am putea găsi mediile statistice ale unui proces aleator staționar?

Medind în timp o singură realitate se obține un număr și nu o funcție de timp; în consecință întrebarea nu are sens decât pentru procesele staționare.

Fie deci $X(t)$ un proces staționar și $x(t)$ o singură realitate a sa. Componenta continuă sau media esantion a lui $x(t)$ pe intervalul $[-T, T]$ se calculează cu:

$$\text{această literă este mică} \rightarrow \mu_x(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (A12.10)$$

Această medie temporală $\mu_x(T)$ este o variabilă aleatoare. Ea depinde atât de lungimea $2T$ a intervalului considerat cât și de realitatea particulară $x(t)$ considerată. Repetând experimentul de mediere nu vom obține aceeași valoare. Ca variabilă aleatoare $\mu_x(T)$ are o medie statistică

$$E\{\mu_x(T)\} = E\left\{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt\right\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{x(t)\} dt$$

Dar

$$E\{x(t)\} = E\{X(t)\} = \mu_x = \text{const.}$$

are ca

$$E\{\mu_x(T)\} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \mu_x dt = \mu_x$$

Am ajuns la concluzia că:

$$\text{literă mică mică} \rightarrow E\{\mu_x(T)\} = \mu_x \leftarrow \text{literă mică indicând o medie statistică} \quad (A12.11)$$

Se spune că $\mu_x(T)$ este o estimare nedefalșită (fără eroare sistematică) pentru media statistică μ_x .

Se spune despre procesul aleator și staționar $X(t)$ că este ergodic în medie dacă:

$$1. \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mu_x(T) = \mu_x \quad (A12.42)$$

2. Diferența variabilei aleatoare $\mu_x(T)$ este, după cum se va vedea, un indicator al calității estimatorului. Cu cât valoarea ei este mai mică (valorile obținute sunt mai puțin "împrăștiate" în jurul valorii "adevărate") cu atât calitatea estimatorului este mai bună. Prin urmare se cere ca:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Disp} \{ \mu_x(T) \} = 0$$

(A12.43)
efectuate pe toată colecția de realități

Ergodicitatea în medie înseamnă că medile statistice pot fi bune aproximare medimă ^{în timp} suficient de lung a singurei realizări a procesului. În loc de a lucra cu o colecție de înregistrări (realități) este suficientă una singură.

Se poate defini și o funcție de autocorelație în timp, prin medierea produsului $x(t+\tau)x(t)$, pentru o singură realizare a procesului staționar $X(t)$:

$$\text{literă mică} \quad R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau)x(t) dt \quad (A12.44)$$

Evident că $R_x(\tau, T)$ este o variabilă aleatoare ce depinde de T și de realizarea $x(t)$ aleasă. Media ei statistică se calculează cu:

$$\begin{aligned} \text{literă mică indicând} & \rightarrow \text{când o medie temporală.} \\ E \{ R_x(\tau, T) \} &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E \{ x(t+\tau)x(t) \} dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T R_x(\tau) dt \\ &= R_x(\tau) \quad \text{literă mare indicând o medie statistică} \end{aligned} \quad (A12.45)$$

și este chiar funcția de autocorelație $R_x(\tau)$, deoarece au fost acum luate în considerare toate realizările posibile. Relația (A12.44) arată că $R_x(\tau, T)$ este un estimator nedegradat pentru autocorelația $R_x(\tau)$.

Se spune despre procesul aleator staționar $X(t)$ că este ergodic în autocorelație dacă:

$$1. \quad \lim_{T \rightarrow \infty} R_x(\tau, T) = R_x(\tau) \quad (A12.46)$$

$$2. \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Disp} \{ R_x(\tau, T) \} = 0 \quad (A12.47)$$

În mod evident, noțiunea de ergodicitate poate fi extinsă și la momente de ordin superior.

Vom considera ca exemplu core procesul aleator staționar sinusoidal, dat prin relația (A12.17). Vom calcula $\mu_x(T)$:

$$\begin{aligned}\mu_x(T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(2\pi f_c t + \theta) dt = \frac{A}{2T} \left. \frac{\sin(2\pi f_c t + \theta)}{2\pi f_c} \right|_{-T}^T \\ &= \frac{A}{4\pi f_c T} \left[\sin(2\pi f_c T + \theta) + \sin(2\pi f_c T - \theta) \right]\end{aligned}$$

Aveam:

$$0 \leq |\mu_x(T)| = \frac{A}{4\pi f_c T} \left| \sin(2\pi f_c T + \theta) + \sin(2\pi f_c T - \theta) \right| \leq \frac{A}{2\pi f_c T}$$

de unde

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow 0} |\mu_x(T)| \leq \lim_{T \rightarrow 0} \frac{A}{2\pi f_c T} = 0$$

adică:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \mu_x(T) = 0$$

Pentru calculul dispersiei ținem seama de faptul că $E\{\mu_x(T)\} = 0$ și deci

$$\begin{aligned}\text{Disp}\{\mu_x(T)\} &= E\{\mu_x^2(T)\} = E\left\{ \frac{A^2}{16\pi^2 f_c^2 T^2} \left[\sin^2(2\pi f_c T + \theta) + 2\sin(2\pi f_c T + \theta)\sin(2\pi f_c T - \theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2(2\pi f_c T - \theta) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{A^2}{16\pi^2 f_c^2 T^2} \left\{ E\left\{ \frac{1 - \cos(4\pi f_c T + \theta)}{2} \right\} + E\left\{ \cos 2\theta \right\} - E\left\{ \cos 4\pi f_c T \right\} \right. \\ \left. + E\left\{ \frac{1 - \cos(4\pi f_c T - \theta)}{2} \right\} \right\}$$

$$= \frac{A^2}{16\pi^2 f_c^2 T^2} \left[\frac{1}{2} - \cos 4\pi f_c T + \frac{1}{2} \right] = \frac{A^2}{8\pi^2 f_c^2 T^2} (1 - \cos 4\pi f_c T)$$

$$= \frac{A^2}{8\pi^2 f_c^2 T^2} \sin^2 2\pi f_c T \leq \frac{A^2}{8\pi^2 f_c^2 T^2}$$

sau din

$$0 \leq \text{Disp}\{\mu_x(T)\} \leq \frac{A^2}{8\pi^2 f_c^2 T^2}$$

rezultă

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Disp}\{\mu_x(T)\} \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{8\pi^2 f_c^2 T^2} = 0$$

sau:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Disp}\{\mu_x(T)\} = 0$$

Rezultă că procesul sinusoidal analizat este ergodic în medie.

Vom calcula acum $R_x(\tau, T)$:

$$\begin{aligned}
 R_{xx}(\tau, T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos[2\pi f_c(t+\tau) + \theta] A \cos(2\pi f_c t + \theta) dt \\
 &= \frac{A^2}{4T} \int_{-T}^T \left\{ \cos 2\pi f_c \tau + \cos [2\pi f_c(2t+\tau) + 2\theta] \right\} dt \\
 &= \frac{A^2}{4T} \cos 2\pi f_c \tau \cdot 2T + \frac{A^2}{4T} \frac{\sin [2\pi f_c(2t+\tau) + 2\theta]}{4\pi f_c} \Big|_{-T}^T \\
 &= \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_c \tau + \frac{A^2}{16\pi f_c T} \left\{ \sin [2\pi f_c(\tau+2T) + 2\theta] - \sin [2\pi f_c(\tau-2T) + 2\theta] \right\}
 \end{aligned}$$

Al doilea termen tinde la zero atunci când $T \rightarrow \infty$ și deci:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau, T) = \frac{A^2}{2} \cos 2\pi f_c \tau = R_x(\tau)$$

Se poate arăta și că dispersia estimatorului, adică a lui $R_{xx}(\tau, T)$ tinde la zero atunci când $T \rightarrow \infty$ și deci procesul aleator pur sinusoidal este ergodic și în corelație.

A12.6 Trăcerea unui proces aleator printr-un sistem liniar și invariant în timp.

Vom presupune că procesul aleator $X(t)$, conceput ca o colecție de realități ce sunt permise care evoluează în timp, se aplică la intrarea unui sistem liniar și invariant în timp. Se obține la ieșire sa o colecție de permise ce evoluează în timp, realități ale unui proces aleator $Y(t)$. Dacă

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

unde $x(t)$ și $y(t)$ sunt realități ale proceselor $X(t)$ și $Y(t)$, atunci se poate afirma că

$$Y(t) = h(t) * X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du \quad (A12.48)$$

Cunoscând $\mu_X(t)$ și $R_X(t_1, t_2)$, ne propunem să determinăm $\mu_Y(t)$ și $R_Y(t_1, t_2)$. Avem:

$$\begin{aligned}
 \mu_Y(t) &= E\{Y(t)\} = E\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) E\{X(t-u)\} du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \mu_X(t-u) du
 \end{aligned}$$

sau

$$\mu_Y(t) = h(t) * \mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \mu_X(t-u) du \quad (A12.49)$$

Dacă procesul aleator $X(t)$ este staționar media sa este constantă și deci (A12.49) conduce la

$$\mu_Y(t) = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du \quad (A12.50)$$

Se vede scema de expresia raspunsului in frecventa a sistemului $H(\omega)$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \tag{A12.51}$$

in care punem $\omega=0$. Obtinem ca :

$$\mu_Y = \mu_X H(0) \tag{A12.52}$$

unde $H(0)$ este raspunsul sistemului la componenta continua. Se vede ca pentru $\mu_X = \text{ct}$ si $\mu_Y = \text{ct}$, ceea ce inseamna ca procesul de intrare este stationar in medie, deci procesul de intrare este stationar in medie.

Determinam acum $R_Y(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} R_Y(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t_1-u)du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)X(t_2-v)dv\right\} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)E\{X(t_1-u)X(t_2-v)\}dudv \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)R_X(t_1-u, t_2-v)dudv \end{aligned} \tag{A12.53}$$

Daca procesul de intrare $X(t)$ este stationar :

$$\begin{aligned} R_X(t_1-u, t_2-v) &= R_X(t_2-v-t_1+u) \\ &= R_X(\tau-v+u) ; \tau = t_2-t_1 \end{aligned} \tag{A12.54}$$

rezulta ca :

$$R_Y(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)R_X(\tau-v+u)dudv = R_Y(\tau) ; \tau = t_2-t_1 \tag{A12.55}$$

ceea ce inseamna ca daca procesul de intrare este stationar in sens larg, si procesul de iesire este si el stationar in sens larg.

Trecerea unui proces stationar printr-un sistem linear si invariant in timp conduce la iesire tot la un proces stationar.

Daca punem $\tau=0$ in (A12.55) obtinem $R_Y(0) = E\{Y^2\} = \text{ct}$, procesul fiind stationar :

$$E\{Y^2(t)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)R_X(u-v)dudv \tag{A12.56}$$

A12.7 Densitatea spectrului de putere a unui proces aleator stationar.

Relatia (A12.56) permite calculul puterii semnalilor de la iesire $E\{Y^2(t)\}$ in functii de $R_X(\tau)$, o functie de timp. Ne putem pune intrebarea daca nu exista cumva o relatie, similara cu (A12.56), dar care sa calculeze

puterea semnalului de ieșire $E\{Y^2(t)\}$ în domeniul frecvență? Pentru a răspunde la această întrebare ne servim de relația:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega ; h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \quad (A12.57)$$

pe care o înlocuim în (A12.56)

$$\begin{aligned}
E\{Y^2(t)\} &= \iint_{-\infty}^{\infty} h(u) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega v} d\omega \right] R_x(u-v) du dv \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(u-v) e^{j\omega v} dv \right] du \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{j\omega u} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(u-v) e^{-j(u-v)\omega} dv \right] du \right] d\omega
\end{aligned}$$

Punem $u-v = z$ și obținem, cu $dv = -dz$ și redreptând limitele de integrare

$$\begin{aligned}
E\{Y^2(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{j\omega u} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) e^{-j\omega z} dz \right] du \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{j\omega u} S_x(\omega) du \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) H(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right]^* d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) H^*(\omega) S_x(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (A12.58)
\end{aligned}$$

Am notat transformata Fourier a funcției de autocorelație cu $S_x(\omega)$

$$R_x(z) \xleftrightarrow{F} S_x(\omega)$$

adică, explicit:

$$\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(z) e^{-j\omega z} dz ; R_x(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega z} d\omega \quad (A12.59) \\
&\quad (A12.60)
\end{aligned}$$

Am știut numai de faptul că $h(t)$ este o funcție reală, adică $h^*(t) = h(t)$.

Am obținut, ca să vedem, rezultatul:

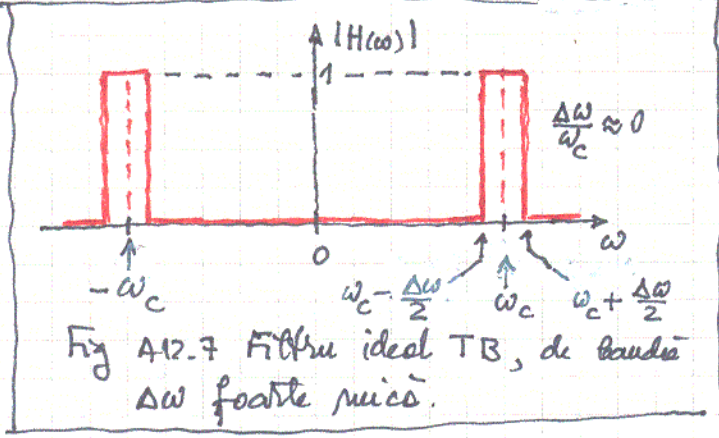
$$E\{Y^2(t)\} = \text{Puterea la ieșire} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad (A12.61)$$

care afirmă că puterea de la ieșire mediei se obține integrând

În domeniul frecvență funcția $|H(\omega)|^2 S_X(\omega)$ care este deci densitatea spectrală de putere a semnalului de la ieșirea sistemului, procesul de intrare fiind considerat, reamintim, staționar.

Relația (A12.61) este echivalentă în domeniul frecvență a relației din domeniul timp, (A12.56).

Fie că sistemul are răspunsul în frecvență ca $|H(\omega)|$ dat în figura A12.7.



filtru trece banda ideal dar cu banda $\Delta\omega \ll \omega_c$, filtru de banda îngustă. În banda filtrului, deoarece $\Delta\omega$ este suficient de mică se poate considera că

$$|H(\omega)|^2 S_X(\omega) \approx 1 \cdot S_X(\omega_c) \quad (A12.62)$$

Filtrând procesul aleator staționar $X(t)$ cu acest filtru, de bandă $\Delta\omega$ foarte îngustă, puterea procesului aleator de la ieșire, $Y(t)$, și el staționar, se poate aproxima cu

$$E\{Y^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_X(\omega) d\omega = 2 \int_{\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}} |H(\omega)|^2 S_X(\omega) d\omega \approx 2 \int_{\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}} S_X(\omega_c) d\omega = 2\Delta\omega S_X(\omega_c) \quad (A12.63)$$

Filtrul permite trecerea doar a componentelor spectrale aflate într-o bandă îngustă centrată pe ω_c și cum, în total, $2\Delta\omega$ reprezintă proporția în frecvență al componentelor trecute, rezultă că $S_X(\omega_c)$ este densitatea, în domeniul frecvenței, corespunzătoare puterii medii a procesului aleator $X(t)$, densitate evaluată la frecvența ω_c . Ca direcțiune $S_X(\omega_c)$ se măsoară în Watt/pad/sec. sau, pentru $S_X(f_c)$ în W/Hz și are direcțiune punit de energie : $W/Hz = W \cdot s = J$

Dacă utilizăm frecvența f , în Hz avem :

$$R_X(\tau) \xleftrightarrow{f} S_X(f)$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad ; \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (12.59') \quad (12.60')$$

$$E\{Y^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \quad (12.61')$$

Câteva proprietăți ale densității spectrale de putere a unui proces aleator staționar.

Baza analizei spectrale a proceselor aleatoare staționare o constituie **Teorema Einstein-Wiener-Hincin**: Funcția de autocorelație a unui proces aleator staționar și densitatea spectrală de putere a procesului formează o pereche Fourier

$$R_X(\tau) \xleftrightarrow{F} S_X(\omega) \text{ sau } R_X(\tau) \xleftrightarrow{F} S_X(f) \quad (A12.64)$$

Din această teoremă și arând în vedere proprietățile perechilor Fourier se pot stabili câteva proprietăți importante ale densității spectrale de putere, $S_X(\omega)$.

1) Dacă punem în (A12.59) $\omega = 0$ obținem

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau = S_X(0) \quad (A12.65)$$

Aria de sub curba $R_X(\tau)$ este valoarea densității spectrale de putere evaluată la frecvența nulă.

2) Dacă punem în (A12.61) $\tau = 0$ și ținem seama de faptul că $R_X(0) = E\{X^2(t)\}$ obținem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = 2\pi E\{X^2(t)\} \text{ sau } \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = E\{X^2(t)\} \quad (A12.66)$$

Aria de sub curba $S_X(\omega)$ este $2\pi \times$ puterea procesului aleator iar aria de sub curba $S_X(f)$ este chiar puterea procesului aleator.

3) Dacă ne referim la relația (A12.63) și ținem seama de faptul că $E\{Y^2(t)\} \geq 0$ rezultă că $S_X(\omega) \geq 0$ pentru orice valoare ω_c . În concluzie:

$$S_X(\omega) \geq 0 \text{ sau } S_X(f) \geq 0 \quad (A12.67)$$

4) Dacă $X(t)$ este un proces aleator staționar, real, atunci, conform cu (A12.14) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$. Dar

$$\begin{aligned} S_X(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \stackrel{\tau \rightarrow -\tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{R_X(-\tau)}_{R_X(\tau)} e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = S_X(\omega) \end{aligned}$$

Acest fapt ne cunoaște: Transformata Fourier a unui semnal real și par, $R_X(\tau)$, este o funcție, $S_X(\omega)$, reală și pară:

Norbert Wiener

From Wikipedia, the free encyclopedia

This article or section **is not written in the formal tone expected of an encyclopedia article**. Please improve it or discuss changes on the talk page. See Wikipedia's guide to writing better articles for suggestions.

Norbert Wiener (November 26, 1894 Columbia, Missouri – March 18, 1964 Stockholm Sweden) was an American theoretical and applied mathematician. He was a pioneer in the study of stochastic and noise processes, contributing work relevant to electronic engineering, electronic communication and control systems. Wiener is



Norbert Wiener

perhaps best known as the founder of cybernetics, a field that formalizes the notion of feedback and has implications for engineering, systems control, computer science, biology, philosophy, and the organization of society.

Contents

- 1 Biography
- 2 Anecdotes
- 3 Awards and honors
- 4 See also
- 5 Writings
- 6 References
- 7 External links

Biography

Norbert Wiener was the first child of Leo Wiener, a Polish-Jewish immigrant, and Bertha Kahn, of German-Jewish descent. Employing high pressure methods of his own invention, Leo educated Norbert

at home until 1903, except for a brief interlude when Norbert was 7 years of age. Thanks to his father's tutelage and his own abilities, Wiener became a child prodigy. The first volume of Wiener's autobiography dwells on this period in considerable detail. Although Leo earned his living teaching German and Slavic languages, he read widely and accumulated a personal library from which the young Norbert benefited much. Leo also had ample ability in mathematics, and tutored his son in the subject until he left home.

After graduating from Ayer High School in 1906 at 11 years of age, Wiener entered Tufts College. He was awarded a BA in mathematics in 1909 at the age of 14, whereupon he began graduate studies in zoology at Harvard. In 1910 he transferred to Cornell to study philosophy. The next year he returned to Harvard, while still continuing his philosophical studies.

Back at Harvard, Wiener came under the influence of Edward Vermilye Huntington, whose mathematical interests ranged from axiomatic foundations to problems posed by engineering. Harvard awarded Wiener a Ph.D. in 1912, when he was a mere 18, for a dissertation on mathematical logic, supervised by Karl Schmidt, whose essential results were published as Wiener (1914). In that dissertation, he was the first to see that the ordered pair can be defined in terms of elementary set theory. Hence relations can be wholly grounded in set theory, so that the theory of relations does not require any axioms or primitive notions distinct from those of set theory. In 1921, Kuratowski proposed a simplification of Wiener's definition of the ordered pair, and that simplification has been in common use ever since.

In 1914, Wiener travelled to Europe, to study under Bertrand Russell and G. H. Hardy at Cambridge University, and under David Hilbert and Edmund Landau at the University of Göttingen. In 1915-16, he taught philosophy at Harvard, then worked for General Electric and wrote for the *Encyclopedia Americana*. When World War I broke out, Oswald Veblen invited him to work on ballistics at the Aberdeen Proving Ground in Maryland. Thus Wiener the eventual pacifist wore a uniform 1917-18. Living and working with other mathematicians strengthened and deepened his interest in mathematics.

After the war, Wiener was unable to secure a position at Harvard because he was Jewish (despite his father being the first tenured Jew at Harvard), and was rejected for a position at the University of

Melbourne. At W. F. Osgood's invitation, Wiener became an instructor in mathematics at MIT, where he spent the remainder of his career, rising to Professor.

In 1926, Wiener returned to Europe as a Guggenheim scholar. He spent most of his time at Göttingen and with Hardy at Cambridge, working on Brownian motion, the Fourier integral, Dirichlet's problem, harmonic analysis, and the Tauberian theorems.

In 1926, Wiener's his parents arranged his marriage to a German immigrant, Margaret Engemann, who was not Jewish; they had two daughters.

During World War II, his work on the automatic aiming and firing of anti-aircraft guns led Wiener to communication theory and eventually to formulate cybernetics. After the war, his prominence helped MIT to recruit what was perhaps the world's first research team in cognitive science, made up of some of the brightest researchers in neuropsychology and the mathematics and biophysics of the nervous system, including Warren Sturgis McCulloch and Walter Pitts. These men went on to make pioneering contributions to computer science and artificial intelligence. Shortly after this painstakingly assembled research group was formed, Wiener suddenly and inexplicably broke off all contact with its members. Speculation still flourishes as to why this split occurred; were the reasons professional, was his hypersensitive personality to blame, or did the split result from intrigues by his spouse Margaret? Whatever the reason, the split led to the premature end of one of the most promising scientific research teams of the era.

Nevertheless, Wiener went on to break new ground in cybernetics, robotics, computer control, and automation. He freely shared his theories and findings, and generously credited the contributions of others. This stance resulted in his being well-disposed towards Soviet researchers and their findings, which placed him under regrettable suspicion during the Cold War. He was a strong advocate of automation to improve the standard of living, and to overcome economic underdevelopment. His ideas became influential in India, whose government he advised during the 1950s.

Wiener declined an invitation to join the Manhattan Project, and was arguably the most distinguished scientist to do so. After the war, he became increasingly concerned with what he saw as political

interference in scientific research, and the militarization of science. His article "A Scientist Rebels" in the January 1947 issue of *The Atlantic Monthly* urged scientists to consider the ethical implications of their work. After the war, he refused to accept any government funding or to work on military projects. The way Wiener's stance towards nuclear weapons and the Cold War contrasted with that of John von Neumann is the central theme of Heims (1980).

Anecdotes

At MIT, Wiener was notorious for his poor lecturing style, his jokes, and his absent-mindedness. He was known to be hypersensitive to criticism, and subject to fits of depression. He also became the butt of many comical anecdotes, a few of which follow:

1. Wiener was quite short; five foot even, in fact. He was also given to the kind of absent-mindedness for which academics are known. MIT corridors have, or at least used to have, wainscoting, that is, a strip of wood with a molded groove in it running along a wall about three and a half feet off the ground. The nominal purpose of this is to prevent chair backs from scratching the paint on walls and to provide a boundary between the darker shade which the lower part of walls are usually painted and the lighter shade above. It was Wiener's custom to stick his finger in this groove, close his eyes, lower his head in thought and walk down a corridor, guided by the wainscoting. Professors were told to close their classroom doors or Wiener would be apt to follow the corridor wainscoting to the door jamb of the classroom and pick up the trail of the wainscoting on the inside of the classroom, following it around the room until it led him back to the corridor.
2. During one of these trips down the hallway, Wiener was interrupted by several of his students who talked to him for several minutes about what they were working on. After the conversation had ended, Wiener asked one of them "Could you please tell me, in which direction was I travelling when you stopped me?" One of them replied, somewhat confusedly, "You were coming from over there [gesturing] this way [gesturing]." Wiener replied, "Ah, then it is likely that I have already had lunch. Thank you." and continued down the hallway to his office. [A very similar anecdote has been attributed to Albert Einstein.]
3. Being at a total loss, and having exhausted all other sources of resolution, a young graduate student came to Full Professor Doctor Norbert Wiener's office one day with a seemingly intractable differential equation, No. 27 from a textbook. The student asked Wiener if he could help him with it. Wiener looked at the equation for a moment, sat back in his chair, and tilted his head to point it at the ceiling. He silently stayed that way for perhaps twenty or thirty seconds. He then leaned forward and wrote down the longish solution on a legal pad, and looked at the student expectantly. After an awkward moment the student said "Dr. Wiener, I'm sorry, but I still can't see how you've derived this." Wiener looked confused for a moment, and then relaxed. He looked at the equation for a moment, sat back in his chair, and tilted his head to point it at the ceiling. He

silently stayed that way for perhaps forty or fifty seconds. He then leaned forward and wrote down the longish solution on a legal pad, and looked at the student expectantly. After an even more awkward moment, the student said "Dr. Wiener, I'm very sorry, but I still don't see it." Wiener replied in as annoyed a voice as he ever expressed, "What do you want? I've just done it two different ways!" (A similar incident, with the solution as e^x , is attributed to John Von Neumann)

4. After several years teaching at MIT, the Wieners moved to a larger house. Knowing her husband was likely to forget where he now lived, Mrs. Wiener wrote down the address of the new house on a piece of paper and made him put it in his shirt pocket. At lunchtime, an inspiring idea came to the professor, who proceeded to pull out the paper and scribble down calculations, and to subsequently proceed to find a flaw and throw the paper away in disgust. At the end of the day, it occurred to Wiener that he had thrown away his address. He now had no idea where his home was. Putting his mind to work, he concocted a plan: go to his old home and wait to be rescued. Surely Margaret would realize he was lost and come to pick him up. When he arrived at the house, there was a little girl standing out front. "Excuse me, little girl," he asked, "would you happen to know where the people who used to live here moved to?" "It's okay, Daddy," the girl replied, "Mommy sent me to get you." (Decades later, Norbert Wiener's daughter was tracked down by a mathematics newsletter. She said the story was essentially correct, except that Wiener had not forgotten who she was.)
5. In 1945, in the closing stages of the Pacific campaign of World War II, Norbert Wiener was hard at work in perfecting the anti-aircraft gun's fire control system used in the Pacific theater.
 1. At that time, computers were analog, using gears, cams, and motors. The chain of events for shooting at enemy aircraft includes: (a) detection and location of enemy aircraft by radar, (b) from the measured speed and direction, estimate the future aircraft location, (c) feed that direction and elevation data to the guns, and most important (d) set the altitude at which the shell is to explode. Field performance data were constantly fed back to Dr. Wiener and he in turn kept refining his equations to be sent to all American ships.
 2. Japan, in the meantime, was perfecting their **Kamikaze** tactics. They replaced single plane attacks, which were vulnerable to anti-aircraft guns, by coordinated mass attacks, insuring that at least one or more planes would get past the defenses.
 3. A few days before Japan surrendered, one American destroyer happened to be the target of such a mass Kamikaze attack consisting about two dozen suicide bombers. All hands on the American ship performed flawlessly and, having just received Dr. Wiener's latest equations, managed to shoot down every one of the attacking Japanese planes. Noting that if just one enemy plane got through, all hands could be lost, they could not help but to worship Dr. Wiener. After the war, the entire crew paid a visit to him in grateful tribute.

Awards and honors

- Wiener won the Bôcher Prize in 1933 and the National Medal of Science in 1964, shortly before his death.

- The Norbert Wiener Prize in Applied Mathematics was endowed in 1967 in honor of Norbert Wiener by MIT's mathematics department and is provided jointly by the American Mathematical Society and Society for Industrial and Applied Mathematics.
- The Norbert Wiener Award for Social and Professional Responsibility awarded annually by CPSR, was established in 1987 in honor of Norbert Wiener to recognize contributions by computer professionals to socially responsible use of computers.
- The Wiener crater on the far side of the Moon was named for him.

See also



Wikiquote has a collection of quotations related to:

Norbert Wiener

- Wiener equation
- Wiener filter
- Wiener process
- Wiener's tauberian theorem
- Paley–Wiener theorem
- Shannon–Wiener index
- Wiener-Khinchin theorem
- Abstract Wiener space
- Polynomial chaos

Writings

- 1914. "A simplification in the logic of relations" in Jean van Heijenoort, 1967. *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard Univ. Press: 224-27.
- 1965 (1948). *Cybernetics*. MIT Press.
- 1964 (1930). *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications* (known during the war as the *yellow peril*). MIT Press.
- 1988 (1950). *The Human Use of Human Beings*. Da Capo Press.
- 1966. *Nonlinear Problems in Random Theory*. MIT Press.
- 1966. *Generalized Harmonic Analysis and Tauberian Theorems*. MIT Press.
- 1966. *God & Golem, Inc.: A Comment on Certain Points Where Cybernetics Impinges on Religion*. MIT Press.
- 1988. *The Fourier Integral and Certain of its Applications* (Cambridge Mathematical Library). Cambridge Univ. Press.
- 1994. *Invention: The Care and Feeding of Ideas*. MIT Press.

Aleksandr Khinchin

From Wikipedia, the free encyclopedia

Aleksandr Yakovlevich Khinchin (Russian

)

(July 19, 1894 – November 18, 1959) was a Russian mathematician and one of the most significant people in the Soviet school of probability theory. He was born in the village of Kondrovo, Kaluga Governorate, Russia. While studying at Moscow State University, he became one of the first followers of the famous Luzin school. Khinchin graduated from the university in 1916 and six years later he became a full professor there, retaining that position until his death.



Aleksandr Ya. Khinchin

Khinchin's early works focused on real analysis. Later he applied methods from the metric theory of functions to problems in probability theory and number theory. He became one of the founders of modern probability theory, discovering the law of the iterated logarithm in 1924, achieving important results in the field of limit theorems, giving a definition of a stationary process and laying a foundation for the theory of such processes. Khinchin made significant contributions to the metric theory of Diophantine approximations and established an important result for simple real continued fractions, discovering the property now known as Khinchin's constant. He also published several important works on statistical physics, where he used the methods of probability theory, and on information theory, queuing theory and mathematical analysis.

In 1939 Khinchin was elected as a Correspondent Member of the Academy of Sciences of the USSR. He was awarded the USSR State Prize (1941), the Order of Lenin, three other orders, and medals.

He died in Moscow, USSR.

See also

- Khinchin's theorem
- Wiener–Khinchin theorem
- Khinchin's constant
- Khinchin inequality
- Khinchin–Lévy constant
- Equidistribution theorem
- Continued fraction

Bibliography

- *Sur la Loi des Grandes Nombres*, in *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, Paris, 1929
- *Continued Fractions*, Mineola, N.Y. : Dover Publications, 1997, ISBN 0-486-69630-8 (first published in Moscow, 1935)
- *Three Pearls of Number Theory*, Mineola, NY : Dover Publications, 1998, ISBN 0-486-40026-3 (first published in Moscow and Leningrad, 1947)
- *Mathematical Foundations of Quantum Statistics*, Mineola, N.Y. : Dover Publications, 1998, ISBN 0-486-40025-5 (first published in Moscow and Leningrad, 1951)

External links

- Aleksandr Khinchin at the Mathematics Genealogy Project
- O'Connor, John J.; Edmund F. Robertson "Aleksandr Khinchin". *MacTutor History of Mathematics archive*.

Retrieved from "http://en.wikipedia.org/wiki/Aleksandr_Khinchin"

Categories: 1894 births | 1959 deaths | 20th century mathematicians | Russian mathematicians | Soviet mathematicians | Number theorists | Probability theorists | Stalin Prize winners | Alumni and faculty of Moscow State University

-
- This page was last modified 15:21, 2 April 2007.
 - All text is available under the terms of the GNU Free Documentation License. (See **Copyrights** for details.)
Wikipedia® is a registered trademark of the Wikimedia Foundation, Inc., a US-registered 501(c)(3) tax-deductible nonprofit charity.

$$S_X(-\omega) = S_X(\omega) \text{ sau } S_X(-f) = S_X(f) \quad (A12.68)$$

5. Densitatea spectrală de putere nefiind negativă, dacă se normalizează corespunzător, poate avea forma unei densități de probabilitate. Astfel, dacă luăm:

$$f_X(\omega) = \frac{S_X(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega} \text{ sau } f_X(f) = \frac{S_X(f)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df} \quad (A12.69)$$

avem: $f_X(\omega) \geq 0$ și

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_X(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega} d\omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega} = 1$$

Prin analogie cu formulele stabilite în teoria probabilităților, considerând formula (A12.69) putem scrie imediat formule în domeniul repartiției puterii proceselor aleatoare staționare în domeniul frecvenței.

trei exemple.

1) Densitatea spectrală de putere a procesului sinusoidal cu fază aleatoare uniform distribuită, $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$, proces staționar se determină pornind de la $R_X(\tau)$, stabilită în relația (A12.20)

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau \quad ; \quad \omega_c = 2\pi f_c$$

Se știe că avem:

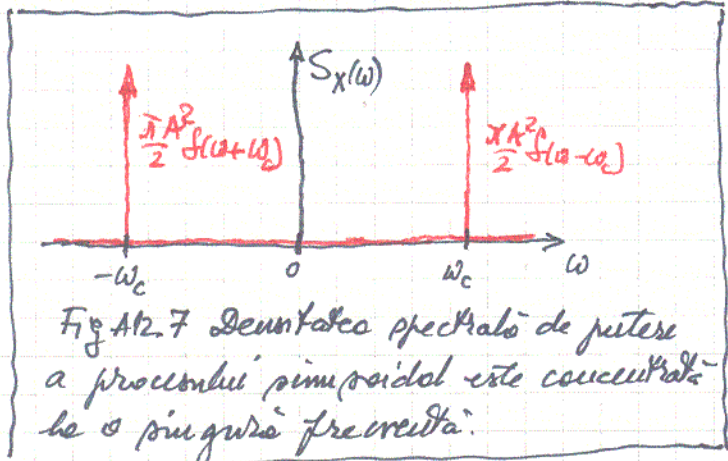
$$\cos \omega_c \tau \xleftrightarrow{F} \pi [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

are că:

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau \xleftrightarrow{F} \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \quad (A12.70)$$

sau:

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_c \tau \xleftrightarrow{F} \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \quad (A12.70')$$



Prin urmare procesul aleator sinusoidal cu fază (inițială) aleatoare, uniform distribuită are densitatea spectrală de putere

$$S_X(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \quad (A12.71)$$

sau

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \quad (A12.71')$$

Densitatea spectrală $S_X(\omega)$ este reprezentată în figura A12.7. Toată puterea

procesului este concentrată la o singură frecvență, ω_c . Vom verifica faptul că integrând densitatea spectrală de putere obținem puterea, cu factorul 2π :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega - \omega_c) d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi A^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega + \omega_c) d\omega = \frac{A^2}{2}$$

2) Densitatea spectrală de putere a procesului aleator undă binară NRZ bipolară: Funcția de autocorelație $R_X(\tau)$ este stabilită în relația (A12.26):

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & ; |\tau| < T \\ 0 & ; |\tau| \geq T \end{cases}$$

Pentru perechea transformărilor cu stabilitate deja transformata Fourier în cap 5. Conform relației (5.48), adaptată notațiilor de acum:

$$T \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) p_T(\tau) \xleftrightarrow{F} T^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2$$

Împărțind cu T și înmulțind cu A^2 obținem perechea

$$R_X(\tau) = A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) p_T(\tau) \xleftrightarrow{F} A^2 T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2$$

adică

$$S_X(\omega) = A^2 T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 \tag{A12.7d}$$

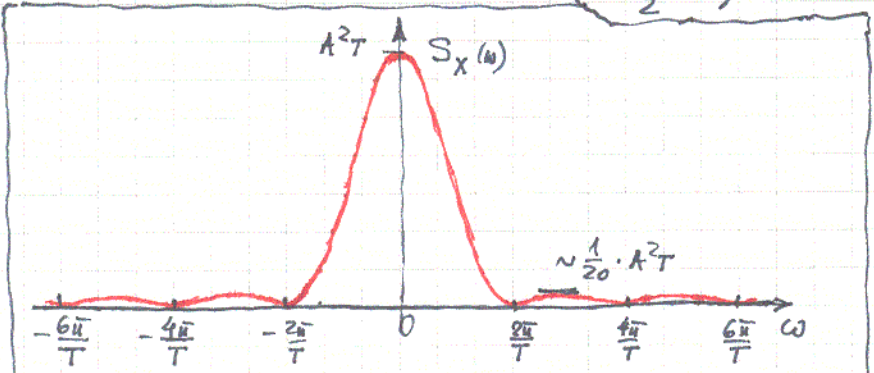


Fig A12.8 Densitatea spectrală de putere pentru procesul undă binară NRZ bipolară. Practic toată puterea este concentrată în banda $[0, \frac{2\pi}{T}]$.

În figura A12.8 este reprezentată densitatea spectrală de putere. Se vede că practic toată puterea procesului este concentrată într-o bandă $B_\omega = \frac{2\pi}{T}$ sau $B_f = \frac{1}{T}$.

Puterea procesului $X(t)$ este dată de $E\{X^2(t)\} = R_X(0) = A^2$

Arem și

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A^2 T \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 d\omega = \frac{A^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2 d\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{A^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{A^2}{\pi} \cdot \pi = A^2$$

Vom face o observație. Pentru formarea undei $X(t)$ sunt utilizate impulsuri rectangulare de durată T și amplitudine $\pm A$. Fie

$$g(t) = \pm A p_{\frac{T}{2}}(t) \xleftrightarrow{F} G(\omega) = \pm A T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

Privit ca un impuls aperiodic, deunitatea sa spectrala de energie este $|G(\omega)|^2$,

$$|G(\omega)|^2 = A^2 T^2 \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right) = \mathcal{E}(\omega)$$

Se vede ca deunitatea spectrala de putere a undei, $S_x(\omega)$ se obtine in practica deunitatea spectrala de energie a impulsului ce formeaza simbolul, $g(t)$, la durata sa, T , adica:

$$S_x(\omega) = \frac{\mathcal{E}(\omega)}{T} = \frac{|G(\omega)|^2}{T} \tag{A12.73}$$

Relatia (A12.73) este valabila in toate cazurile, indiferent de forma simbolului atasat simbolurilor.

3) Mixarea unui proces aleator cu un proces sinusoidal cu faza aleatorie.

Modulatia de produs.

Asa cum am mai afirmat, in procesul

$$Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \theta) \tag{A12.74}$$

$X(t)$ si $\cos(2\pi f_c t + \theta)$ provin de la surse fizice distincte si ca atare sunt statistic independente. Am stabilit, in relatia (A12.36), ca

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos 2\pi f_c \tau \tag{A12.75}$$

Pentru a determina deunitatea spectrala de putere, $S_Y(\omega)$, pornim de la $R_Y(\tau)$. Am aratat deja ca $Y(t)$ este un proces stationar (in sens larg) daca $X(t)$ este un proces stationar, asa ca $S_Y(\omega)$ are sens.

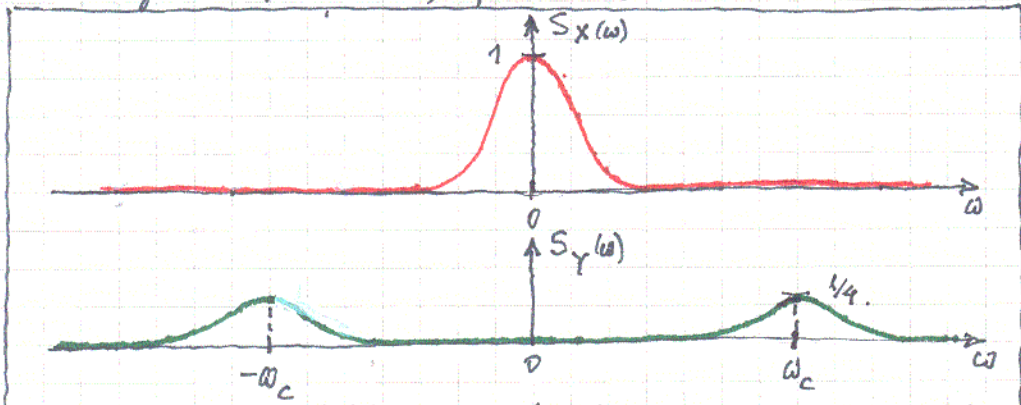


Fig A12.9 Deunitatea spectrala de putere a simbolului modulati, $S_Y(\omega)$.

Arenu deci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos \omega_c \tau &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} S_X(\omega) * \delta[\mathcal{S}(\omega - \omega_c) + \mathcal{S}(\omega + \omega_c)] \\ &= \frac{1}{4} [S_X(\omega - \omega_c) + S_X(\omega + \omega_c)] \end{aligned}$$

adica, pentru o modulatie de produs:

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{4} [S_X(\omega - \omega_c) + S_X(\omega + \omega_c)] \text{ sau } S_Y(f) = \frac{1}{4} [S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)] \quad (A12.76)$$

Relația între densitățile spectrale de putere ale proceselor stocastice de la intrare și ieșirea unui sistem liniar și invariant în timp.

Avem, conform cu (A12.61)

$$E\{Y^2\} = \text{Puterea la ieșire} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_X(\omega) d\omega \quad (A12.77)$$

deci core rezultă că densitatea spectrală de putere $S_Y(\omega)$ se determină cu relația:

$$S_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_X(\omega) \text{ sau } S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \quad (A12.78)$$

Se vede din această relație că pentru determinarea densității spectrale de putere de la ieșirea sistemului contează doar caracteristica de modul a sistemului, $|H(\omega)|$, nu și caracteristica sa de fază.

A12.8 Un estimator pentru densitatea spectrală de putere a unui proces aleator stocastic și ergodic.

Vom considera un proces stocastic și ergodic $X(t)$ și o realizare a sa, $x(t)$. În măsura în care $x(t)$ este absolut integrabilă (clasa L^1) esențial specificul său $X(\omega)$:

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (A12.79)$$

Pentru a estima $X(\omega)$ vom trunchia semnalul $x(t)$ la intervalul $[-T, T]$ și vom considera transformata Fourier trunchiată ca fiind

$$X(\omega, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt \text{ sau } X(f, T) = \int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (A12.80)$$

Evident că $X(\omega, T)$ este un estimator pentru spectrul $X(\omega)$. Cum procesul $X(t)$ este ergodic, $x(t)$, realizarea procesului, are toate proprietățile statistice ale procesului. Conform cu relația (A12.46) avem:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t+\tau) x(t) dt = R_X(\tau) \quad (A12.81)$$

↳ literă mare (medie statistică).

Notăm cu $x_T(t)$ versiunea trunchiată a semnalului $x(t)$

$$x_T(t) = x(t) p_T(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega, T) \quad (A12.82)$$

și observăm că

$$\int_{-T}^T x(t+\tau) x(t) dt = \int_{-T}^T x_T(t+\tau) x_T(t) dt = x_T(\tau) * x_T(-\tau) \quad (A12.82)$$

Prin urmare:

$$x_T(\tau) * x_T(-\tau) = \int_{-T}^T x(t+\tau) x(t) dt \xleftrightarrow{F} X(\omega, T) X(-\omega, T) \quad (A12.83)$$

Dacă $x_T(t)$ este un semnal real, atunci $X(-\omega, T) = X^*(\omega, T)$ adică:

$$\int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} |X(\omega, T)|^2 \quad (A12.84)$$

și în final:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2T} |X(\omega, T)|^2$$

sau

$$R_x(\tau, T) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2T} |X(\omega, T)|^2 \quad (A12.85)$$

*literele mici →
(mediere în timp)*

Estimatorului funcției de autocorelație a procesului staționar și ergodic îi corespunde ca spectru, probabil, un estimator al densității spectrale de putere. Funcția de frecvență $\frac{1}{2T} |X(\omega, T)|^2$ se numește "periodogramă" deoarece a fost și înainte utilizată în evidențierea unor comportamente periodice în diferite domenii (economice, astronomice, sociologice).

Formula de reconstrucție a funcției $R_x(\tau, T)$ din spectrul său, scrisă explicit este:

$$R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega, T)|^2}{2T} e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega, T)|^2}{2T} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (A12.86)$$

Cum $R_x(\tau, T)$ este un estimator pentru $R_x(\tau)$ și cum $R_x(\tau)$ se exprimă

prin:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

pe vede că:

$$\frac{|X(\omega, T)|^2}{2T}$$

este un estimator pentru $S_x(\omega)$. În mod natural ne putem aștepta ca trecând la limită, cu $T \rightarrow \infty$, să obținem chiar $S_x(\omega)$. Dacă trecem la limită în (A12.86) obținem:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_x(\tau, T) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X(\omega, T)|^2}{2T} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X(\omega, T)|^2}{2T} e^{j\omega\tau} d\omega \quad (A12.86)$$

Dacă se fixează frecvența ω , $X(\omega, T)$ depinde de realizarea $x(t)$, fiind o variabilă aleatoare. Nu există nădejdea că $\frac{|X(\omega, T)|^2}{2T}$ converge, pentru $T \rightarrow \infty$ spre o valoare anumită, chiar dacă ω este fixată. De aceea inter schimbarea limitei cu integrala în (A12.86) nu este întotdeauna posibilă.

Dacă mediul statistic în (A12.86), $R_X(z)$ nu este afectată de mediere așa că :

$$R_X(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E\{|X(\omega, T)|^2\} e^{j\omega z} d\omega$$

și deci :

$$R_X(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X(\omega, T)|^2\}}{2T} e^{j\omega z} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X(\gamma, T)|^2\}}{2T} e^{j2\pi\gamma z} d\gamma \quad (A12.87)$$

Rezultă deci :

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X(\omega, T)|^2\}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{\left|\int_{-T}^T x(t) e^{-j\omega t} dt\right|^2\right\} \quad (A12.88)$$

sau

$$S_X(\gamma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E\{|X(\gamma, T)|^2\}}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left\{\left|\int_{-T}^T x(t) e^{-j2\pi\gamma t} dt\right|^2\right\} \quad (A12.88')$$

Reținem deci :

1. Dacă dispunem o singură realizare $x(t)$ a unui proces aleator staționar și ^{ni ergodic} pe un interval $[-T, T]$, se determină $X(\omega)$ și apoi se estimează $S_X(\omega)$ cu relația :

$$S_X(\omega) = \frac{|X(\omega, T)|^2}{2T} \quad (A12.89)$$

2. Dacă dispunem de N realizări, $x_k(t)$, ale procesului aleator staționar și ergodic pe intervalul $[-T, T]$, se determină $|X_k(\omega, T)|^2$ și se mediază :

$$|X(\omega, T)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k(\omega, T)|^2 \quad (A12.90)$$

și apoi se aplică relația (A12.89) pentru estimarea densității spectrale de putere. Mediarea se efectuează la toate frecvențele ω din spectru.

12.9 Densitatea interspectrelor de putere.

O măsură a interdependenței a două procese aleatoare staționare, $X(t)$ și $Y(t)$ în domeniul frecvenței este dată de densitatea interspectrelor de putere, $S_{X,Y}(\omega)$ sau $S_{Y,X}(\omega)$, definite ca perechi Fourier ale interspectrelor $R_{X,Y}(z)$ sau $R_{Y,X}(z)$, respectiv:

$$R_{X,Y}(z) \xleftrightarrow{F} S_{X,Y}(\omega) \quad ; \quad R_{Y,X}(z) \xleftrightarrow{F} S_{Y,X}(\omega) \quad (A12.91)$$

$$S_{X,Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad ; \quad S_{Y,X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Y,X}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (A12.92)$$

sau

$$S_{X,Y}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X,Y}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad ; \quad S_{Y,X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{Y,X}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (A12.92')$$

Atunci ni:

$$R_{X,Y}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{X,Y}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad ; \quad R_{Y,X}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{Y,X}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (A12.93)$$

$$R_{X,Y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{X,Y}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad ; \quad R_{Y,X}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{Y,X}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (A12.93')$$

Se pot verifica unele proprietăți, adevărate pentru procese aleatoare ^{stacionare} reale, punând interscorectia ni densitatea interspectrală de putere:

$$R_{X,Y}(\tau) = R_{Y,X}(-\tau) \quad (A12.94)$$

$$S_{X,Y}(\omega) = S_{Y,X}(-\omega) = S_{Y,X}^*(\omega) \quad ; \quad S_{X,Y}(f) = S_{Y,X}(-f) = S_{Y,X}^*(f) \quad (A12.95)$$

Pentru exemplificare fie procesele stacionare $X(t)$ ni $Y(t)$ ni procesul sumă:

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \quad (A12.96)$$

Vom determina densitatea spectrală de putere $S_Z(\omega)$ a procesului stacionar $Z(t)$. Pentru aceasta determinăm mai întâi funcția de (auto)corelație:

$$\begin{aligned} R_Z(t_1, t_2) &= E\{Z(t_1)Z(t_2)\} = E\{[X(t_1) + Y(t_1)][X(t_2) + Y(t_2)]\} \\ &= E\{X(t_1)X(t_2)\} + E\{X(t_1)Y(t_2)\} + E\{Y(t_1)X(t_2)\} + E\{Y(t_1)Y(t_2)\} \\ &= R_X(t_1, t_2) + R_{X,Y}(t_1, t_2) + R_{Y,X}(t_1, t_2) + R_Y(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (A12.97)$$

Punem $t_2 = t_2 + \tau$ ni considerăm că procesele sunt nu numai stacionare ci și mutual stacionare, adică $R_{X,Y}(t_1, t_2) = R_{X,Y}(\tau)$ ni $R_{Y,X}(t_1, t_2) = R_{Y,X}(\tau)$.

Obținem:

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_{X,Y}(\tau) + R_{Y,X}(\tau) + R_Y(\tau) \quad (A12.98)$$

Dacă procesele $X(t)$ ni $Y(t)$ nu sunt corelate atunci $R_{X,Y}(\tau) \equiv 0$ ni

$R_{Y,X}(\tau) \equiv 0$ ni deci:

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) + R_Y(\tau) \quad (A12.99)$$

Aplicând redobitii (A12.98) ni (A12.99) Transformarea Fourier obținem, pentru procesele $X(t)$ ni $Y(t)$ stacionare ni mutual stacionare

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_{X,Y}(\omega) + S_{Y,X}(\omega) + S_Y(\omega) \quad ; \quad S_Z(f) = S_X(f) + S_{X,Y}(f) + S_{Y,X}(f) + S_Y(f) \quad (A12.100)$$

Dacă procesele $X(t)$ și $Y(t)$ sunt, în plus, necorelate atunci $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 0$ și deci, conform cu (A12.99):

$$S_Z(\omega) = S_X(\omega) + S_Y(\omega) ; S_Z(\gamma) = S_X(\gamma) + S_Y(\gamma) \quad (A12.101)$$

Evident că (A12.101) poate fi extinsă la cazul unui a N procese aleatoare staționare, mutual staționare și necorelate.

Vom considera acum cazul proceselor staționare și mutual staționare

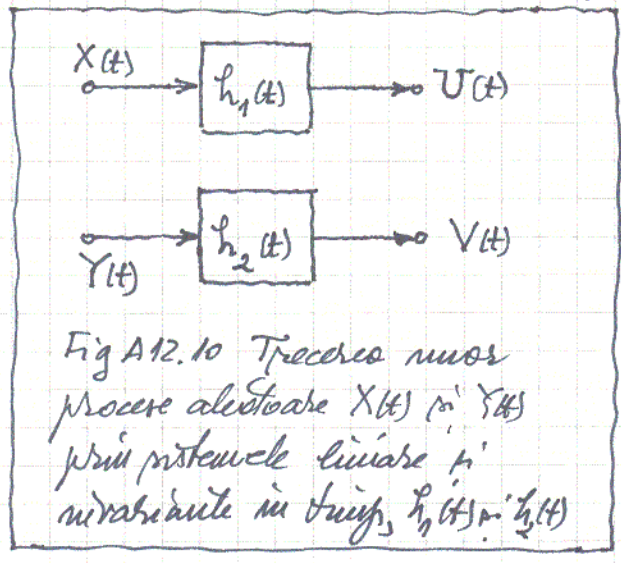


Fig A12.10 Treccare unor procese aleatoare $X(t)$ și $Y(t)$ prin sistemele liniare și invariabile în timp, $h_1(t)$ și $h_2(t)$

$X(t)$ și $Y(t)$ aplicate la intrarea unor sisteme liniare și invariabile în timp, caracterizate de funcțiile pondere $h_1(t)$ și $h_2(t)$ - figura A12.10. La ieșirea sistemelor apar procese staționare $U(t)$ și $V(t)$, respectiv.

Pentru a determina $R_U(\tau)$ și $R_V(\tau)$ pe aplică relația (A12.55).

Vom căuta acum $R_{UV}(t, t-\tau)$ presupunând că $R_{XY}(\tau)$ pe cunoscut. Avem:

$$\begin{aligned} R_{UV}(t, t-\tau) &= E\{U(t)V(t-\tau)\} = E\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)X(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2)Y(t-\tau-\tau_2)d\tau_2\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)h_2(\tau_2) E\{X(t-\tau_1)Y(t-\tau-\tau_2)\} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)h_2(\tau_2) \underbrace{R_{XY}(\tau+\tau_2-\tau_1)}_{R_{XY}(\tau+\tau_2-\tau_1)} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (A12.102)$$

Se observă că R_{UV} este funcție numai de τ deoarece R_{XY} este o funcție numai de τ . Prin urmare:

$$R_{UV}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1)h_2(\tau_2) R_{XY}(\tau+\tau_2-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \quad (A12.103)$$

Vom determina acum $S_{UV}(\omega)$:

$$\begin{aligned} S_{UV}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{UV}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h_1(\tau_1)h_2(\tau_2) R_{XY}(\tau+\tau_2-\tau_1) e^{-j\omega\tau} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau h_1(\tau_1)h_2(\tau_2) R_{XY}(\tau+\tau_2-\tau_1) e^{-j\omega(\tau+\tau_2-\tau_1)} e^{+j\omega\tau_2} e^{-j\omega\tau_1} \end{aligned}$$

Punem $\tau_3 = \tau + \tau_2 - \tau_1$; $d\tau_3 = d\tau$ și obținem din relația anterioară:

$$S_{u,v}(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1}_{H_1(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_2) e^{j\omega\tau_2} d\tau_2}_{H_2(-\omega) = H_2^*(\omega)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau_3) e^{-j\omega\tau_3} d\tau_3}_{S_{XY}(\omega)}$$

adică :

$$S_{u,v}(\omega) = H_1(\omega) H_2(-\omega) S_{XY}(\omega) = H_1(\omega) H_2^*(\omega) S_{XY}(\omega) \quad (A12.104)$$

sau:

$$S_{u,v}(f) = H_1(f) H_2(-f) S_{XY}(f) = H_1(f) H_2^*(f) S_{XY}(f) \quad (A12.104')$$

A12.10 Procese aleatoare gaussiene.

Vom observa procesul aleator $X(t)$ în intervalul de timp $[0, T]$. Dacă $g(t)$ este o funcție determinată oarecare ea poate da, procesului $X(t)$ o variabilă aleatoare Y prin relația :

$$Y = \int_0^T g(t) X(t) dt \quad (A12.105)$$

Se vede că Y este o funcțională (nu funcție!) liniară de procesul $X(t)$. Domeniul de existență al unei funcționale este constituit din mulțimea de funcții (și nu numere!) admisibile. În ce privește alegerea funcției $g(t)$ vom impune doar condiția ca $E\{Y^2\}$ să fie finită. Dacă schimbăm $g(t)$ pe schimbul funcționalei (liniare) (A12.105).

Procesul $X(t)$ este un "proces gaussian" dacă orice funcțională liniară a sa are ca rezultat o variabilă aleatoare cu repartiție gaussiană.

Câteva proprietăți ale proceselor aleatoare gaussiene

1). Dacă la intrarea unui sistem liniar și invariant în timp (caracterizat prin funcția pondere $h(t)$) se aplică un proces aleator gaussian $X(t)$, procesul aleator generat la ieșirea sistemului este și el gaussian.

Cum $X(t)$ este observat doar pe intervalul $[0, T]$ rezultatul $Y(t)$ se calculează cu relația :

$$Y(t) = \int_0^T h(t-\tau) X(\tau) d\tau \quad ; \quad 0 \leq t < \infty \quad (A12.106)$$

Aplicăm procesului $Y(t)$ o funcțională liniară caracterizată de funcția $g_Y(t)$ și care conduce la variabila aleatoare Z :

$$\begin{aligned}
 Z &= \int_0^T g_Y(t) Y(t) dt = \int_0^T g_Y(t) \left[\int_0^T h(t-\tau) X(\tau) d\tau \right] dt \\
 &= \int_0^T \left[\int_0^T g_Y(t) h(t-\tau) dt \right] X(\tau) d\tau \\
 &= \int_0^T g_X(\tau) X(\tau) d\tau. \quad (A12.107)
 \end{aligned}$$

Dar $X(\tau)$ este un proces gaussian așa că oricare funcțională liniară a sa (în particular și cea definită de $g_X(\tau)$) produce o variabilă aleatoare gaussiană; prin urmare Z este o variabilă aleatoare gaussiană. Acest lucru aștrage după sine observația că și $Y(t)$ este un proces gaussian.

În concluzie filtrând un proces aleator gaussian, se obține tot un proces aleator gaussian. O transformare afiină aplicată unui proces aleator gaussian conduce tot la un proces aleator gaussian.

2). Se observă un proces aleator $X(t)$ la momentele de timp t_1, t_2, \dots, t_n , obținându-se variabilele aleatoare $\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$. Dacă procesul $X(t)$ este unul gaussian, atunci variabilele aleatoare $\{X(t_k) | k=1, 2, \dots, n\}$ sunt mutual gaussiene, oricare ar fi n și oricare ar fi cele n momente de timp alese. Densitatea de probabilitate mutuală a celor n variabile aleatoare este complet determinată de mulțimea mediilor:

$$\mu_{X(t_i)} = E\{X(t_i)\} ; i=1, 2, \dots, n \quad (A12.108)$$

și de mulțimea funcțiilor de covarianță

$$C_X(t_k, t_i) = E\{[X(t_k) - \mu_{X(t_k)}][X(t_i) - \mu_{X(t_i)}]\} \quad \forall k, i=1, 2, \dots, n \quad (A12.109)$$

Acestea din urmă sunt reunite sub forma unei matrice de covarianță a procesului $X(t)$:

$$\vec{C}_X = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & C_X(t_1, t_3) & \dots & C_X(t_1, t_n) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & C_X(t_2, t_3) & \dots & C_X(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X(t_m, t_1) & C_X(t_m, t_2) & C_X(t_m, t_3) & \dots & C_X(t_m, t_n) \end{bmatrix} \quad (A12.109)$$

Fie vectorul mediilor $\vec{\mu}_X = [\mu_{X(t_1)} \mu_{X(t_2)} \dots \mu_{X(t_n)}]^T$, și $|\vec{C}_X|$ determinantul matricei de covarianță. Densitatea de repartiție (probabilitate)

mutuală, n dimensională a celor n variabile aleatoare este

$$p_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\vec{C}_X|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{\mu}_X)^T \vec{C}_X^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}_X)\right\} \quad (A12.110)$$

în care am notat $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T$.

Vom menționa că, de multe ori, proprietatea 2) se folosește la definierea unui proces gaussian. Ea este mai greu de interpretat într-o operație de filtrare, curentă în telecomunicații, motiv pentru care preferăm forma (A12.105).

Putem extinde proprietatea 2) la două sau mai multe procese aleatoare, după cum urmează. Fie procesele $X(t)$ și $Y(t)$ ni mulțimes de variabile aleatoare obținută observând cele două procese la momentele de timp $t_1, t_2, \dots, t_m, u_1, u_2, \dots, u_m$ alese după voie:

$$\{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m), Y(u_1), Y(u_2), \dots, Y(u_m)\} \quad (A12.111)$$

Spunem că procesele aleatoare $X(t)$ și $Y(t)$ sunt mutual gaussiene dacă mulțimes de variabile aleatoare compuse, (A12.111), este mutual gaussiană, oricare ar fi m și m și oricare ar fi cele $n+m$ momente de timp alese. Matricea de covarianță va avea o formă mai complicată:

$$\vec{C}_{(m+n) \times (m+n)} = \begin{array}{c} \text{BLOC } n \times n \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} C_X(t_1, t_1) & C_X(t_1, t_2) & \dots & C_X(t_1, t_m) & C_{XY}(t_1, u_1) & C_{XY}(t_1, u_2) & \dots & C_{XY}(t_1, u_m) \\ C_X(t_2, t_1) & C_X(t_2, t_2) & \dots & C_X(t_2, t_m) & C_{XY}(t_2, u_1) & C_{XY}(t_2, u_2) & \dots & C_{XY}(t_2, u_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X(t_m, t_1) & C_X(t_m, t_2) & \dots & C_X(t_m, t_m) & C_{XY}(t_m, u_1) & C_{XY}(t_m, u_2) & \dots & C_{XY}(t_m, u_m) \\ \hline C_{YX}(u_1, t_1) & C_{YX}(u_1, t_2) & \dots & C_{YX}(u_1, t_m) & C_Y(u_1, u_1) & C_Y(u_1, u_2) & \dots & C_Y(u_1, u_m) \\ C_{YX}(u_2, t_1) & C_{YX}(u_2, t_2) & \dots & C_{YX}(u_2, t_m) & C_Y(u_2, u_1) & C_Y(u_2, u_2) & \dots & C_Y(u_2, u_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{YX}(u_m, t_1) & C_{YX}(u_m, t_2) & \dots & C_{YX}(u_m, t_m) & C_Y(u_m, u_1) & C_Y(u_m, u_2) & \dots & C_Y(u_m, u_m) \end{array} \right] \\ \text{BLOC } m \times n & & & & \text{BLOC } m \times m \end{array} \quad (A12.112)$$

în care, de exemplu:

$$C_{XY}(t_k, u_i) = E\left\{[X(t_k) - \mu_{X(t_k)}][Y(u_i) - \mu_{Y(u_i)}]\right\} = R_{XY}(t_k, u_i) - \mu_{X(t_k)}\mu_{Y(u_i)}$$

$k = 1, 2, \dots, n$ și $i = 1, 2, \dots, m$ (A12.113)

3) Dacă un proces gaussian este staționar în sens larg, atunci el este și strict staționar. Această proprietate rezultă din aplicarea directă a proprietății 2).

4). Dacă $X(t)$ este un proces aleator gaussian din core, prin observare la momentele t_1, t_2, \dots, t_m alese după voie, pe câștig variabilele aleatoare $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_m)$ necorelate, adică

$$C_X(t_k, t_i) = E\{[X(t_k) - \mu_{X(t_k)}][X(t_i) - \mu_{X(t_i)}]\} = 0$$

atunci aceste m variabile aleatoare sunt m statistice independente.

În acest caz, al variabilelor aleatoare necorelate, matricea de covarianță (A12.109) devine diagonală

$$\vec{C}_X = \begin{bmatrix} C_X(t_1, t_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_X(t_2, t_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_X(t_m, t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_m^2 \end{bmatrix} \quad (A12.114)$$

cu $C_X(t_k, t_k) = E\{[X(t_k) - \mu_{X(t_k)}]^2\} = \text{Disp}\{X(t_k)\} = \sigma_k^2; k=1, 2, \dots, m$ (A12.115)

Inversa matricei de covarianță este, în acest caz:

$$\vec{C}_X^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_m^2} \end{bmatrix}; |\vec{C}_X| = \sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_m^2 \quad (A12.116)$$

Densitatea de probabilitate pentru variabilele ^{aleatoare} multidimensionale sau "multivariabile" aleatoare este, notând $X(t_k) = X_k$ și $\mu_{X(t_k)} = \mu_k$:

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \prod_{k=1}^m p_{X_k}(x_k) = \prod_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_k} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_k^2} (x_k - \mu_k)^2\right\} \quad (A12.117)$$

A 12.11 Zgomotul în timp continuu.

Terminul de zgomot se aplică pentru semnalele nedrept în core perturbă transmiterea sau prelucrarea semnalelor. Sursele de zgomot pot fi externe sistemelor de comunicații sau prelucrare (de exemplu zgomotul atmosferic, zgomotul galactic, zgomotul produs prin activitatea umană) sau interne lor. Aici se includ acele zgomote ce apar ca urmare a fluctuațiilor spontane ale curentului și tensiunii în circuitele electrice. Acest tip de zgomot limitează performanțele de detecție și prelucrare a semnalelor prin intermediul circuitelor electrice (electronice). Două tipuri de fluctuații ^{mai nu portante} conduc la zgomote de tip impulsiv (shot noise) și la zgomote de tip termic (thermal noise). Vom aborda, în cele ce urmează, pe rând, cele două tipuri de zgomote.

Zgomotul impulsiv. Apare în dispozitivele electronice cum ar fi diodele și tranzistoarele, ca urmare a naturii discrete a curentului prin aceste dispozitive. Vom lua ca exemplu un fotodetector. Acesta generează câte un impuls de curent ca urmare a eliberării câte unui electron de către catodul bombardat de către un foton. Momentul nicidecării fotonilor este aleator și deci are o lege și momentul emiterii electronilor, $\tau_k, k \in \mathbb{Z}$. Dacă impulsul de curent generat de emisia unui electron de către catod este $h(t)$ atunci curentul total ce trece prin fotodetector poate fi modelat ca o sumă a acestor impulsuri, plasate la momente de timp τ_k :

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - \tau_k) \tag{A12.18}$$

Procesul aleator definit prin relația (A12.18) este staționar și este numit zgomot impulsiv (shot noise). Numărul de electroni, $N(t)$, emiși de către catod în intervalul t , crește cu câte o unitate la

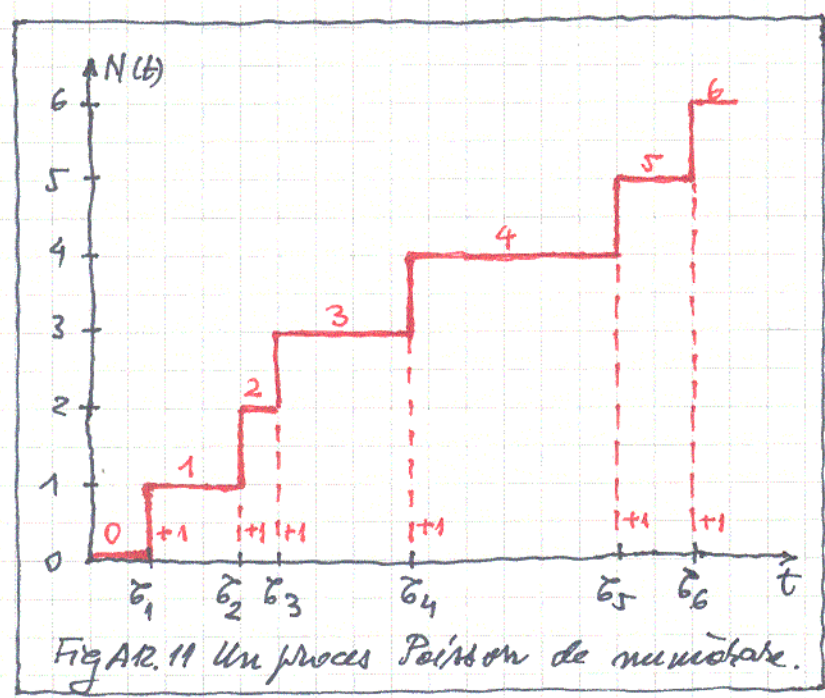


Fig. A12.11 Un proces Poisson de numărare.

momentele de timp $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ așa cum se arată în figura A12.11. Numărul de electroni emiși în intervalul $[0, t]$ este un proces discret (cu valori) $N(t)$. În intervalul de timp $(t, t+t_0)$ catodul emite un număr ν de electroni, astfel că

$$N(t+t_0) - N(t) = \nu \tag{A12.119}$$

în care ν este o variabilă aleatoare. Dacă valoarea sa medie $E\{\nu\}$ este proporțională cu lungimea intervalului de timp considerat, adică t_0 :

$$E\{\nu\} = \lambda t_0 \tag{A12.120}$$

λ fiind o constantă numită și rata procesului, atunci ν are o distribuție Poisson în numărul de electroni emiși în unitatea de timp și fie $\nu = k$, un număr fixat, este dată de relația (A6.12). Dacă dorim ca

să evaluăm probabilitatea ca în intervalul de timp de durată t_0 numărul de electroni emiși să fie $\nu = k$, k întreg, relația se modifică înlocuind λ (rata pe unitate de timp) cu λt_0 astfel că

$$P\{\nu = k\} = \frac{(\lambda t_0)^k}{k!} e^{-\lambda t_0} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (A12.121)$$

Tratarea procesului $X(t)$ este relativ dificilă, motiv pentru care vom da doar media și covarianța sa.

1. Media procesului staționar zgomot impulsiv, $X(t)$, este

$$\mu_x = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt \quad (A12.122)$$

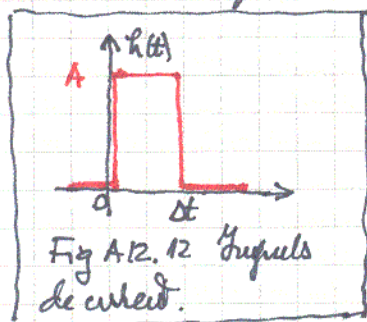
unde λ este rata procesului iar $h(t)$ este unda corespunzătoare impulsului de curent generat de către emisiile unui electron

2. Funcția de covarianță a procesului staționar zgomot impulsiv, $X(t)$ este:

$$C_x(\tau) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t+\tau) dt \quad (A12.123)$$

Acest rezultat este cunoscut și sub denumirea de teorema lui Campbell.

Un caz particular este cel în care impulsurile de curent se pot asimila cu impulsuri rectangulare de durată Δt și amplitudine A , așa cum se arată în figura A12.12.



În acest caz:

$$\mu_x = \lambda A \Delta t \quad (A12.122')$$

$$C_x = \begin{cases} \lambda A^2 \Delta t (1 - \frac{|\tau|}{\Delta t}) & ; |\tau| \leq \Delta t \\ 0 & ; |\tau| > \Delta t \end{cases} \quad (A12.123')$$

Zgomotul termic. Este un zgomot provocat de mișcarea electronilor în conductoare. Tensiunea U_{th} ce apare la bornele unui rezistor R , aflat la temperatură absolută T [°K] și măsurată în banda Δf [Hz] are valoarea efectivă egală cu diferența:

$$E\{U_{th}^2\} = 4kTR\Delta f \quad [\text{Volt}^2] \quad ; \quad k = 1,38 \cdot 10^{-23} \left[\frac{\text{Joule}}{^\circ\text{K}} \right] \quad (A12.124)$$

media tensiunii fiind nulă, $E\{U_{th}\} = 0$. Dacă $R = 10 \text{ M}\Omega$ și banda este de $\Delta f = 10 \text{ MHz}$, temperatura fiind cea a camerei, $T \approx 290^\circ\text{K}$ atunci $\sqrt{E\{U_{th}^2\}} \approx 1,26 \text{ [mV]}$.

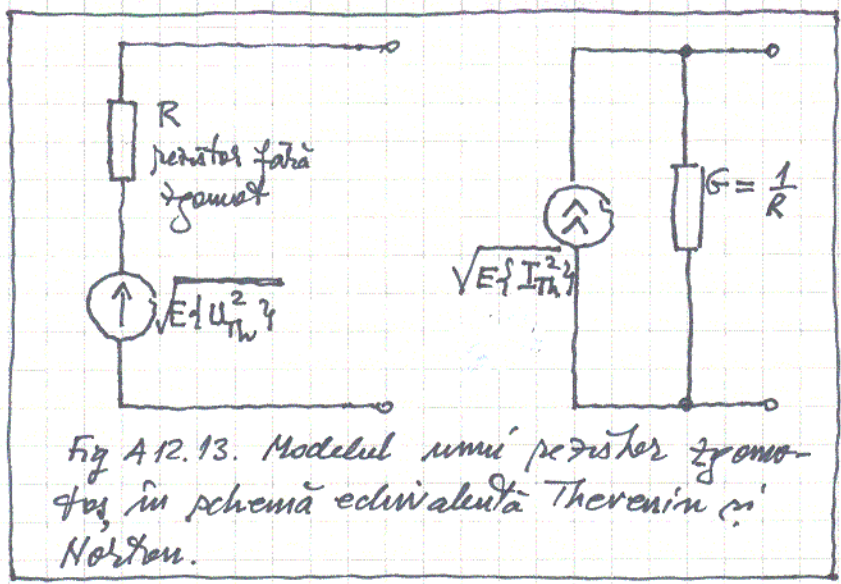


Fig A12.13. Modelul unui rezistor zgomotos, în schemă echivalență Thevenin și Norton.

Rezistorul fizic poate fi echivalat cu o sursă de tensiune și o rezistență nezero, măsurată în serie cu sursa - figura A12.13.

Se poate fi transformată într-o schemă echivalență Norton - prezentată tot în

figura A12.13 - formată dintr-o sursă de curent conectată în paralel cu o conductanță G , nezero, măsurată. Avem:

$$E \cdot I_{Tn}^2 = 4kT G \Delta f ; G = \frac{1}{R} \tag{A12.125}$$

Transferul maxim de putere se obține dacă $R = R_L$, ^{R_L fiind sarcina,} și atunci puterea maximă transferată este $kT \Delta f$ [Watt].

Zgomotul alb

În sistemele de telecomunicații, dar nu numai, se utilizează un concept de zgomot, numit alb, a cărui densitate spectrală de putere este o constantă, independentă de frecvență. Dacă considerăm numai pe

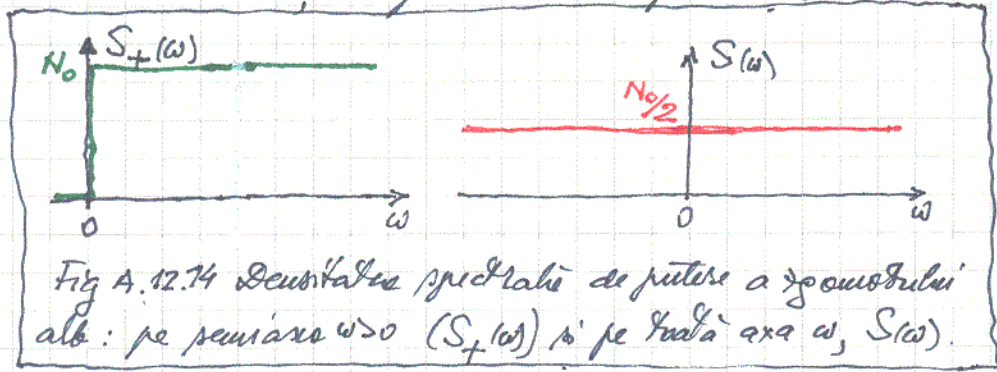


Fig A.12.14 Densitatea spectrală de putere a zgomotului alb: pe semiaxa $\omega > 0$ ($S_+(\omega)$) și pe toată axa ω , $S(\omega)$.

axa $\omega > 0$ atunci: $(A12.126)$

$$S_+(\omega) = kT_e = N_0$$

iar dacă considerăm toată axa $\omega \in \mathbb{R}$

$$S(\omega) = \frac{N_0}{2} = \frac{kT_e}{2} \tag{A12.127}$$

reținuți în care T_e este o temperatură absolută echivalentă (pe exemplu a receptorului). **Temperatura echivalentă de zgomot, T_e , este definită ca fiind temperatura la care trebuie menținut un rezistor zgomotos, conectat la intrarea sistemului (receptorului) considerat nezero, astfel încât puterea de zgomot de la ieșirea sistemului să fie aceeași cu cea din cazul real.** Temperatura echivalentă de zgomot este dependentă doar de parametrii sistemului.

Caracteristica zgomotului alb este aceea că densitatea sa spectrală de putere fiind o constantă, autocorelația sa este un impuls Dirac:

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} S(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad (A12.128)$$

asa cum se arata si in figura A12.15. Cum raportul autocorelatiei se reduce la un punct rezultă că timpul de corelare al zgomotului alb este nul. Dintr-o eroare de zgomot alb, oricât de apropiate,

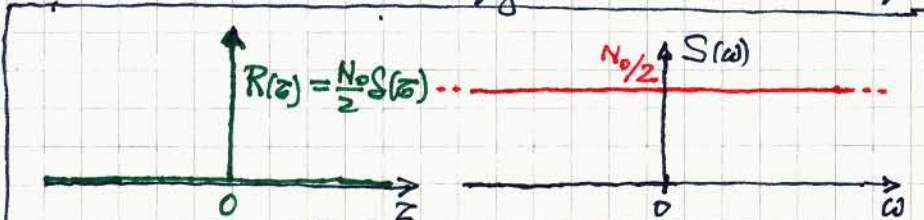


Fig A12.15 Funcția de autocorelație și densitatea spectrală de putere a zgomotului alb. Dintr-o eroare prelevată dintr-un zgomot alb sunt recorelate,

nu sunt, în consecință, recorelate. În mod incorect se presupune că un zgomot alb este, în mod obișnuit și gaussian. Formula "alb" se referă la autocorelație sau densitatea spectrală de putere, care sunt așa ca

nu sunt, în consecință, recorelate. În mod incorect se presupune că un zgomot alb este, în mod obișnuit și gaussian. Formula "alb" se referă la autocorelație sau densitatea spectrală de putere, care sunt așa ca

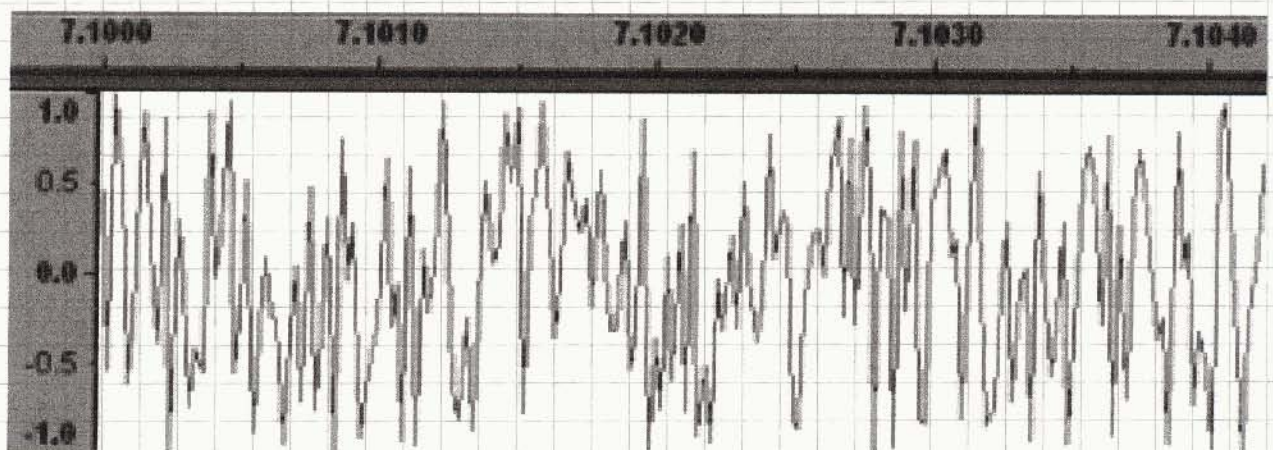


Fig A12.16 O realizare a unui proces aleator alb și gaussian

în figura A12.15. Formula de "gaussian" se referă la repartiția valorilor pe care un proces le poate lua. Putem avea un zgomot alb gaussian sau un zgomot alb și cu repartiție Poisson etc. Modelul de zgomot alb și gaussian este unul larg răspândit, ca urmare a consecințelor teoremei limită centrală. Pentru desemnarea zgomotului alb, gaussian se folosesc adesea termenul WGN (white gaussian noise). Media zgomotului este nulă iar dispersia sa este $\sigma^2 = N_0/2$. Repartiția valorilor are loc deci conform cu $N(0, N_0/2)$. În figura A12.16 este reprezentată o singură realizare a unui proces aleator de tip alb, gaussian, WGN.

În realitate un zgomot alb nu există deoarece puterea sa ar fi infinită, ceea ce, în mod evident, nu se poate. În realitate formulele densității spectrale de putere pentru zgomotul generat de un rezistor de rezistență R, aflat la temperatura absolută T, ca o funcție de frecvență f este:

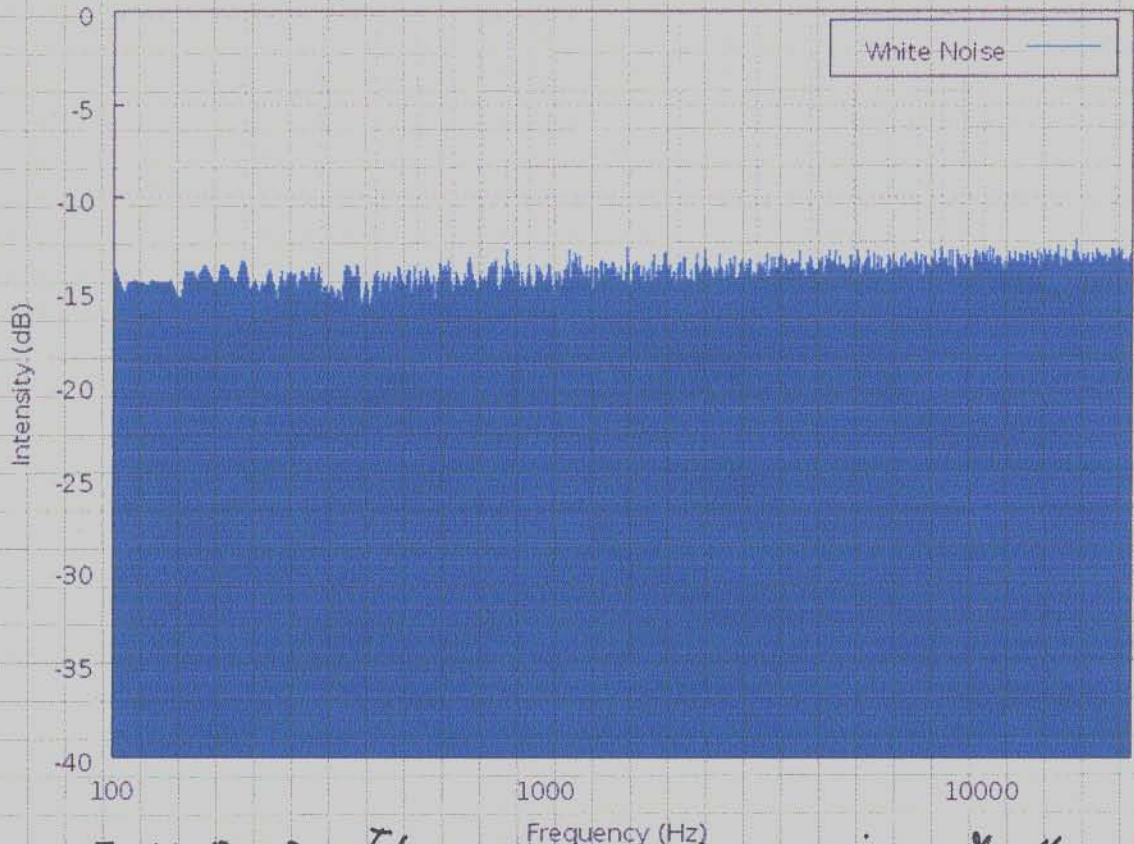


Fig A12. 17a. Deun'tateo spectralo de putere a unui zgomot alb.

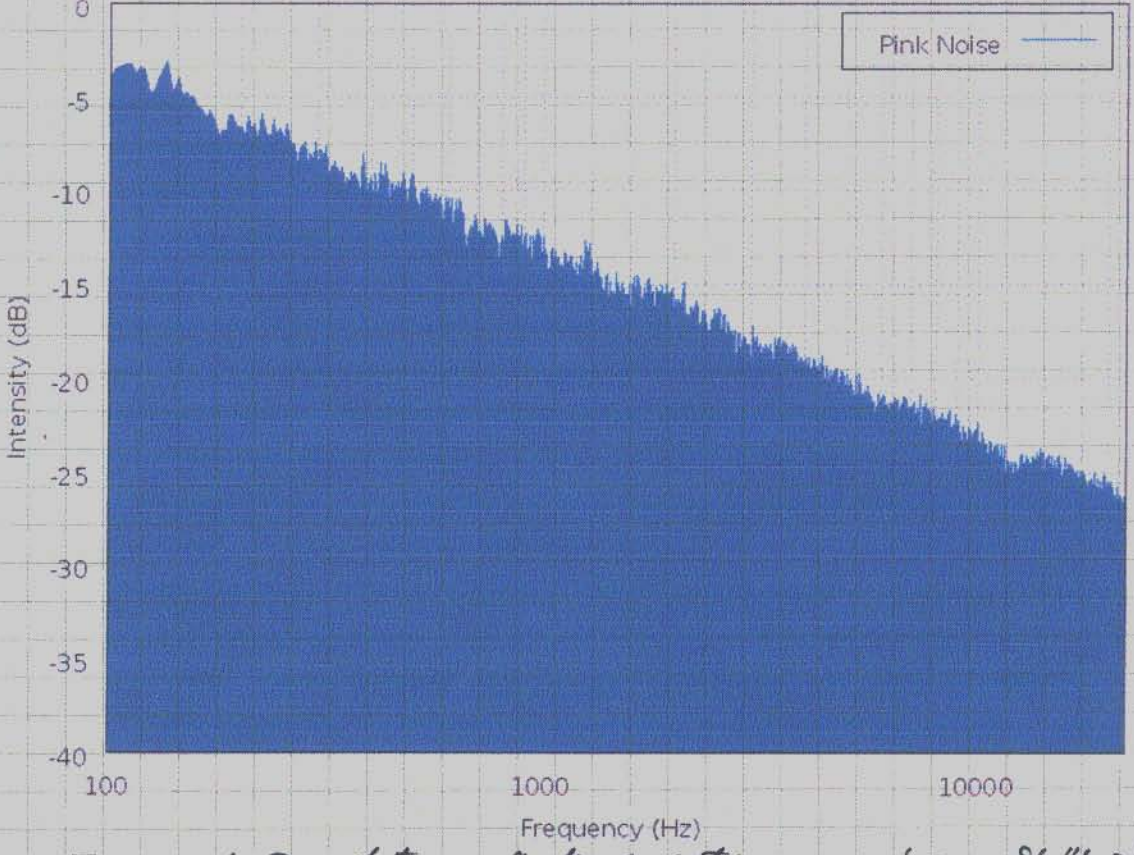


Fig A12. 17b Deun'tateo spectralo de putere a unui zgomot "roz"

$$S(f) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{|f|/f_0}{e^{|f|/f_0} - 1} ; f_0 = \frac{kT}{h} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 290}{6,63 \cdot 10^{-34}} \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ Hz} = 6000 \text{ GHz} \quad (A12.129) \quad 76.$$

Timpuul de corelare al expunțiilor este, prin urmare, $\tau_c = \frac{1}{f_0} = 0,167 \cdot 10^{-12} \text{ sec} = 0,167 \text{ psec}$. De aceea ipoteza necorelării expunțiilor prelucrate din punctul analogic de zgomot generat de un rezistor este plauzibilă. Pentru frecvențe mici, pentru care $|f|/f_0 \ll 1$, avem:

$$e^{\frac{|f|}{f_0}} \approx 1 + \frac{|f|}{f_0}$$

și, prin urmare:

$$S(f) \approx \frac{N_0}{2}$$

Pentru $R_L = R$, densitatea de putere maximă transferată ^{parțialii} devine

$$S(f) = kT$$

Până la frecvențe $f \approx 1000 \text{ GHz}$, $S(f) \approx \frac{N_0}{2}$ e constantă, motiv pentru care modelul de zgomot alb este utilizabil, cel puțin în domeniul electricității clasice, cu frecvențe maxime ce nu trec de $1000 \text{ GHz} = 10^{12} \text{ Hz}$ (sau $\lambda_0 = c/f = 3 \cdot 10^8 \text{ cm/sec} / 10^{12} \text{ Hz} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 300 \text{ nm}$).

În figura A12.17a se prezintă o determinare experimentală a unei densități spectrale de putere pentru un zgomot alb.

Pe lângă zgomotul alb se utilizează și zgomotul "colorat", în care corespunderea densității spectrale de putere nu mai este constantă. O "culoare" perpendiculară în vestalele riturilor audio este "rozul". Densitatea spectrală de putere a unui zgomot roz cade cu 10 dB/decadă. În figura A12.17b se poate vedea o determinare experimentală a densității spectrale de putere pentru un zgomot roz (pink-noise).

Zgomot alb filtrat trece jos. Vom considera un zgomot, $W(t)$, filtrat trece

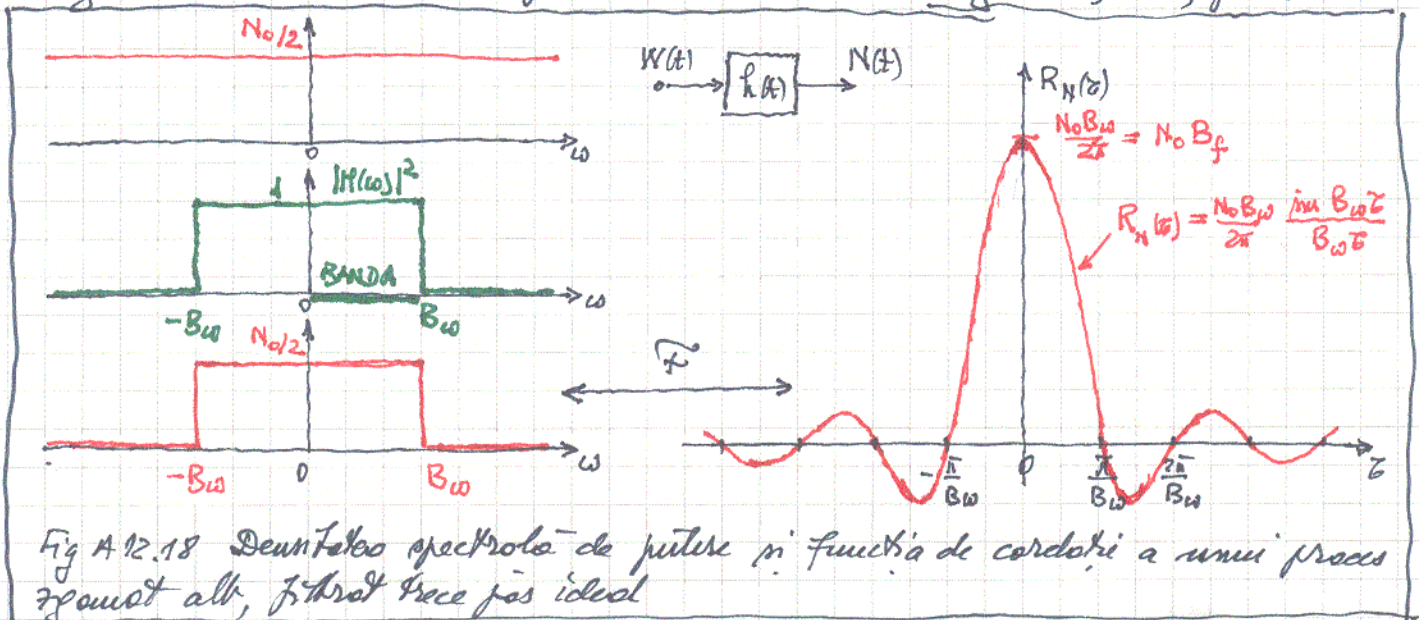


Fig A12.18 Densitatea spectrală de putere și funcția de corelație a unui proces zgomot alb, filtrat trece jos ideal

jos ideal - figura A.12.18. La ieșirea filtrului apare procesul $N(t)$, cu densitatea spectrală de putere constantă în banda $B_\omega = 2\pi B_f$:

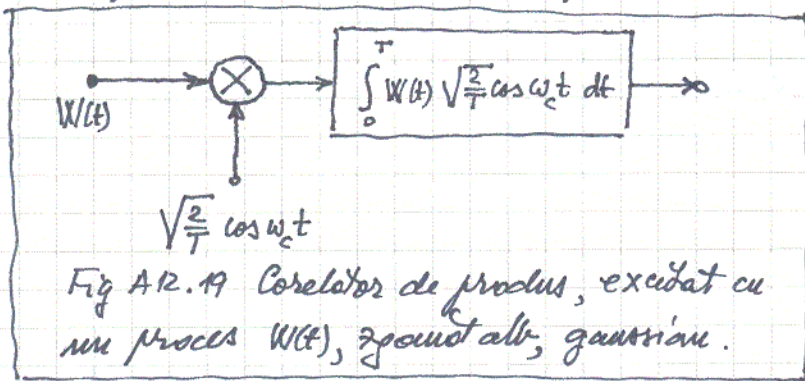
$$S_N(\omega) = |H(\omega)|^2 S_W(\omega) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & ; -B_\omega \leq \omega \leq B_\omega \quad (-B_f \leq f \leq B_f) \\ 0 & ; \text{în rest} \end{cases} \quad (A.12.130)$$

Funcția de (auto)corelație a zgomotului alb filtrat trece jos ideal este, conform cu (5.84):

$$R_N(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \frac{\sin B_\omega \tau}{\pi \tau} = \frac{N_0 \sin 2\pi B_f \tau}{2\pi \tau} \xleftrightarrow{F} S_N(\omega) = \frac{N_0}{2} p_{B_\omega}(\omega) \quad (A.12.131)$$

Dacă pe esantionesto zgomotul filtrat $N(t)$ cu frecvența de esantionare $\omega_e = 2B_\omega$ (sau $f_e = 2B_f$) se obțin esantioane necorelate. Dacă zgomotul este gaussian atunci necorelarea implică și independența statistică. Repartiția multitudine a esantioanelor obținute astfel este produsul repartițiilor individuale.

Răspunsul unui corelator de produs la un zgomot alb gaussian (WGN)



Structura din figura A.12.19 apare în multe receptoare de telecomunicații și poartă denumirea de "corelator de produs".

La o intrare a sa este aplicat un semnal determinist, de

energie (pe durata T) unitară, $\sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega_c t = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2\pi f_c t$. Dacă la ieșirea intrare a sa se aplică doar zgomotul alb gaussian $W(t)$ la ieșire se obține o variabilă aleatoare:

$$N = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T W(t) \cos \omega_c t dt \quad (A.12.132)$$

Transformarea (A.12.132) este de forma (A.12.105) și deci N este o variabilă aleatoare gaussiană. Ea este complet caracterizată de media μ_N și dispersie σ_N^2 . Avem:

$$\mu_N = E\{N\} = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T E\{W(t)\} \cos \omega_c t dt = 0 \quad (A.12.133)$$

deci $E\{W(t)\} = 0$.

Apoi avem:

$$\sigma_N^2 = E\{N^2\} = E\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T W(t_1) \cos \omega_c t_1 dt_1 \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T W(t_2) \cos \omega_c t_2 dt_2 \right\}$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T E \{ W(t_1) W(t_2) \} \cos \omega_c t_1 \cos \omega_c t_2 dt_1 dt_2$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T R_W(t_1, t_2) \cos \omega_c t_1 \cos \omega_c t_2 dt_1 dt_2$$

(A12.134)

Dar zgomotul fiind alb are autocorelația (A12.128):

$$R_W(t_1, t_2) = \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2)$$

(A12.135)

asa că :

$$\sigma_N^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \cos \omega_c t_2 \left[\int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t_1 - t_2) \cos \omega_c t_1 dt_1 \right] dt_2$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{N_0}{2} \cos \omega_c t_2 dt_2$$

$$= \frac{N_0}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega_c t_2) dt_2 = \frac{N_0}{2} + \frac{N_0 \sin 2\omega_c T}{4\omega_c T}$$

Dați ne lucrează cu un timp de integrare T un multiplu întreg al perioadei semnelului $\cos \omega_c t$:

$$\frac{T}{T_c} = k$$

atunci al doilea termen este nul și rămâne că

$$\sigma_N^2 = \frac{N_0}{2}$$

(A12.136)

Pentru urmatoare :

$$N \sim W(0, \frac{N_0}{2})$$

(A12.137)

Zgomotul de bandă îngustă.

La intrarea receptorului există, de obicei, filtre de bandă care permit trecerea componentelor spectrale utile ale semnelului dar limitează banda de zgomot, reducând astfel nivelul tensiunii efective de zgomot de la intrare.

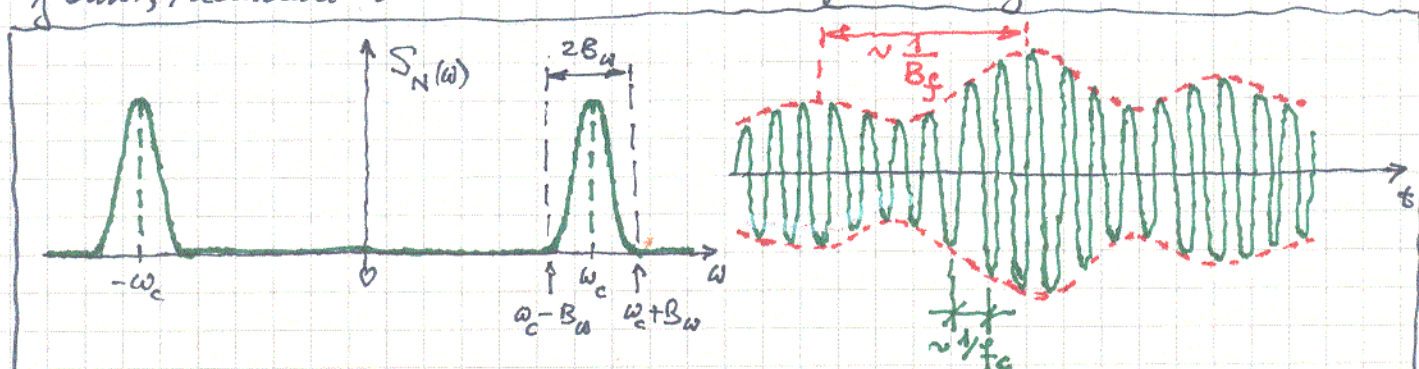


Fig A12.20 Densitatea spectrală de putere a zgomotului de bandă îngustă și o formă a unei realizări ale acestuia.

Pentru exemplificare vom considera transmiterea, pe frecvența $f_c = 100 \text{ MHz}$ a unei transmisii cu modulație de frecvență ce ocupă o bandă $\pm 75 \text{ kHz}$ în jurul frecvenței purtătoare. Avem

$$\frac{\Delta f_f}{f_c} = \frac{150 \text{ kHz}}{100.000 \text{ kHz}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

Prii uzuale banda este îngustă în comparație cu frecvența centrală.

Dacă la intrarea filtrului se aplică un proces $W(t)$, la ieșirea sa se generează procesul $N(t)$. Ne vom limita la proces $W(t)$ gaussian în staționare. Cum transformarea ce generează $N(t)$ este liniară, și $N(t)$ este un proces gaussian în staționor. În figura A12.20 se arată o realizare a procesului $N(t)$, $n(t)$, când la intrare se aplică o realizare $w(t)$ a procesului $W(t)$, alt, gaussian, staționor, de medie nulă și dispersie σ_w^2 . Apare o modulație de amplitudină și o modulație de frecvență, ambele înfașurate, cu evoluție lentă, limitată la o bandă B_w . Modelul procesului $N(t)$ poate fi deci:

$$N(t) = A(t) \cos(\omega_c t + \Theta(t)) \tag{A12.138}$$

unde $A(t)$ și $\Theta(t)$ au densități spectrale de putere limitate la $B_w \ll \omega_c$.

Putem desvolta $N(t)$:

$$N(t) = [A(t) \cos \Theta(t)] \cos \omega_c t - [A(t) \sin \Theta(t)] \sin \omega_c t = N_I(t) \cos \omega_c t - N_Q(t) \sin \omega_c t \tag{A12.139}$$

Componentele de joasă frecvență $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ sunt numite componentele "în față" și "în cuadratură" (cu $\cos \omega_c t$) ale procesului $N(t)$.

Avem:

$$\begin{aligned} 2N(t) \cos \omega_c t &= 2[N_I(t) \cos \omega_c t - N_Q(t) \sin \omega_c t] \cos \omega_c t \\ &= N_I(t) (1 + \cos 2\omega_c t) - N_Q(t) \sin 2\omega_c t \\ &= \underbrace{N_I(t)}_{\text{Componente cu spectrul în banda } B_w} + \underbrace{N_I(t) \cos 2\omega_c t - N_Q(t) \sin 2\omega_c t}_{\text{Componente cu spectrul centrat pe } 2\omega_c} \end{aligned} \tag{A12.140}$$

O simplă operație de filtrare trece jos permite separarea componentei $N_I(t)$. La fel, din filtrarea trece jos a produsului $-2N(t) \sin \omega_c t$ se obține componenta în cuadratură, $N_Q(t)$, așa cum se arată și în figura A12.21. Componentele în față și în cuadratură au câteva proprietăți remarcabile.

Vladimir Kotelnikov

From Wikipedia, the free encyclopedia

Vladimir Aleksandrovich Kotelnikov (Russian

, scientific

transliteration *Vladimir Alexandrovič Kotelnikov*, September 6, 1908 in Kazan – February 11, 2005 in Moscow) was an information theory pioneer from the Soviet Union. He was elected a member of the Russian Academy of Science, in the Department of Technical Science (radio technology) in 1953.



1926-31 study of radio telecommunications at the Moscow Power Engineering Institute, dissertation in engineering science.

1931-41 worked at the MEI as engineer, scientific assistant, laboratory director and lecturer.

1941-44 worked as developer in the telecommunication industry.

1944-80 full professor at the MEI.

1953-87 alternate director and since 1954 director of the institute for radio technology and electronics at the Russian Academy of Science (IRE / RAS).


1970-88 vice-president of the RAS; since 1988 adviser of the presidium.

He is mostly known for having independently of others (e.g. Edmund Whittaker, Harry Nyquist, Claude Shannon) discovered the sampling theorem in 1933. This result of Fourier Analysis was known in harmonic analysis since the end of the 19th century and circulated in the 1920ies-1930ies in the engineering community. He was the first to write down a precise statement of this theorem in relation to signal transmission. He also was a pioneer in the use of signal theory in modulation and communications.

He is also a creator of the **theory of potential noise-immunity**. He obtained several scientific prizes for his work in radio astronomy and signal theory. In 1961, he oversaw one of the first efforts to probe the planet Venus with radar.

External links

- V. A. Kotelnikov: *On the transmission capacity of "ether" and wire in electrocommunications*, (english translation, PDF), Izd. Red. Upr. Svyazzi RKKA (1933), Reprint in *Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications*, Editors: J. J. Benedetto und PJSG Ferreira, Birkhauser (Boston) 2000, ISBN 0-8176-4023-1

 *This Russian biographical article is a stub. You can help Wikipedia by expanding it.*
Retrieved from "http://en.wikipedia.org/wiki/Vladimir_Kotelnikov"

Categories: 1908 births | 2005 deaths | Soviet scientists | Electrical engineers | Members of the Russian Academy of Sciences | Heroes of Socialist Labor | Russian people stubs

-
- This page was last modified 18:45, 24 February 2007.
 - All text is available under the terms of the GNU Free Documentation License. (See **Copyrights** for details.)
Wikipedia® is a registered trademark of the Wikimedia Foundation, Inc., a US-registered 501(c)(3) tax-deductible nonprofit charity.

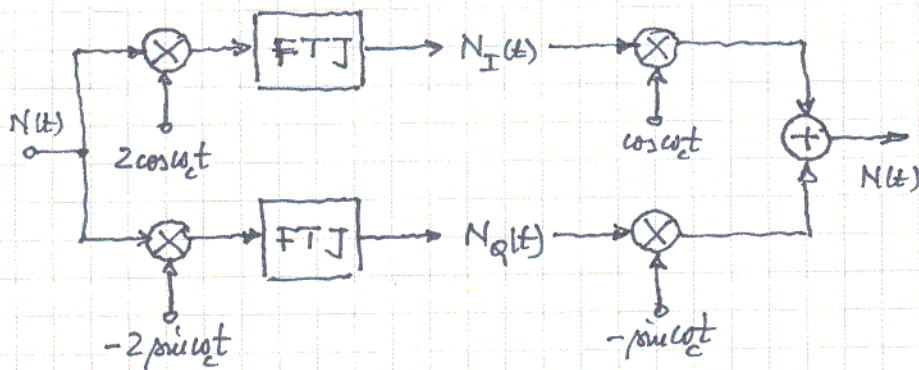


Fig A12.21 Obținerea componentelor "în fază" (cu $\cos \omega_c t$) și "în cuadratură" (cu $\sin \omega_c t$). Sinteza procesului $N(t)$ din componentele "în fază" și "în cuadratură".

1. Cele două componente $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ au, ca și $N(t)$, media nulă.

Evident, că pentru $E\{N(t)\} = 0$ rezultă $E\{N_I(t)\} = 0$ și $E\{N_Q(t)\} = 0$

$$E\{N_I(t)\} = 2 E\{N(t)\} \cos \omega_c t = 0$$

$$E\{N_Q(t)\} = -2 E\{N(t)\} \sin \omega_c t = 0$$

2. Dacă $N(t)$, procesul de bază în discuție este gaussian atunci $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ sunt gaussiane și mutual gaussiane.

Acest fapt rezultă ca urmare a obținerii componentelor $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ prin operații liniare aplicate procesului gaussian $N(t)$ - vezi figura A12.21.

3. Dacă $N(t)$ este un proces staționar atunci $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ sunt și ele procese staționare și mutual staționare.

4. Cele două componente, $N_I(t)$ și $N_Q(t)$, au aceeași densitate spectrală de putere și:

$$S_{N_I}(\omega) = S_{N_Q}(\omega) = \begin{cases} S_N(\omega - \omega_c) + S_N(\omega + \omega_c) & ; \quad |\omega| < B_\omega \\ 0 & ; \quad \text{în rest} \end{cases} \quad (A12.141)$$

Dacă ne limităm la banda $|\omega| \leq B_\omega$ atunci, conform cu (A12.140)

$$\begin{aligned} N_I(t) N_I(t-\tau) &= 2 N(t) N(t-\tau) 2 \cos \omega_c t \cos \omega_c (t-\tau) \\ &= 2 N(t) N(t-\tau) [\cos \omega_c \tau + \cos(2\omega_c t - \omega_c \tau)] \\ &= \underbrace{2 N(t) N(t-\tau) \cos \omega_c \tau}_{\text{Componente cu spectrul în } B_\omega} + \underbrace{2 N(t) N(t-\tau) \cos(2\omega_c t - \omega_c \tau)}_{\text{Componente cu spectrul centrat pe } 2\omega_c} \end{aligned}$$

Avem, după medierea statistică:

$$R_{N_I}(\tau) = 2 R_N(\tau) \cos \omega_c \tau \quad ; \quad |\omega| \leq B_\omega \quad (A12.142)$$

decă ne limităm la $|w| \leq Bw$. Aplicând transformarea Fourier pe-
 tei (A12.142) obținem

$$S_{N_I}(w) = 2 \frac{1}{2\pi} S_N(w) * \pi [\delta(w-w_c) + \delta(w+w_c)]$$

$$= S_N(w-w_c) + S_N(w+w_c) \quad ; \quad |w| \leq Bw \quad (A12.143)$$

La fel se arată și că $S_{N_Q}(w) = S_{N_I}(w)$. În figura A12.22 se arată modul

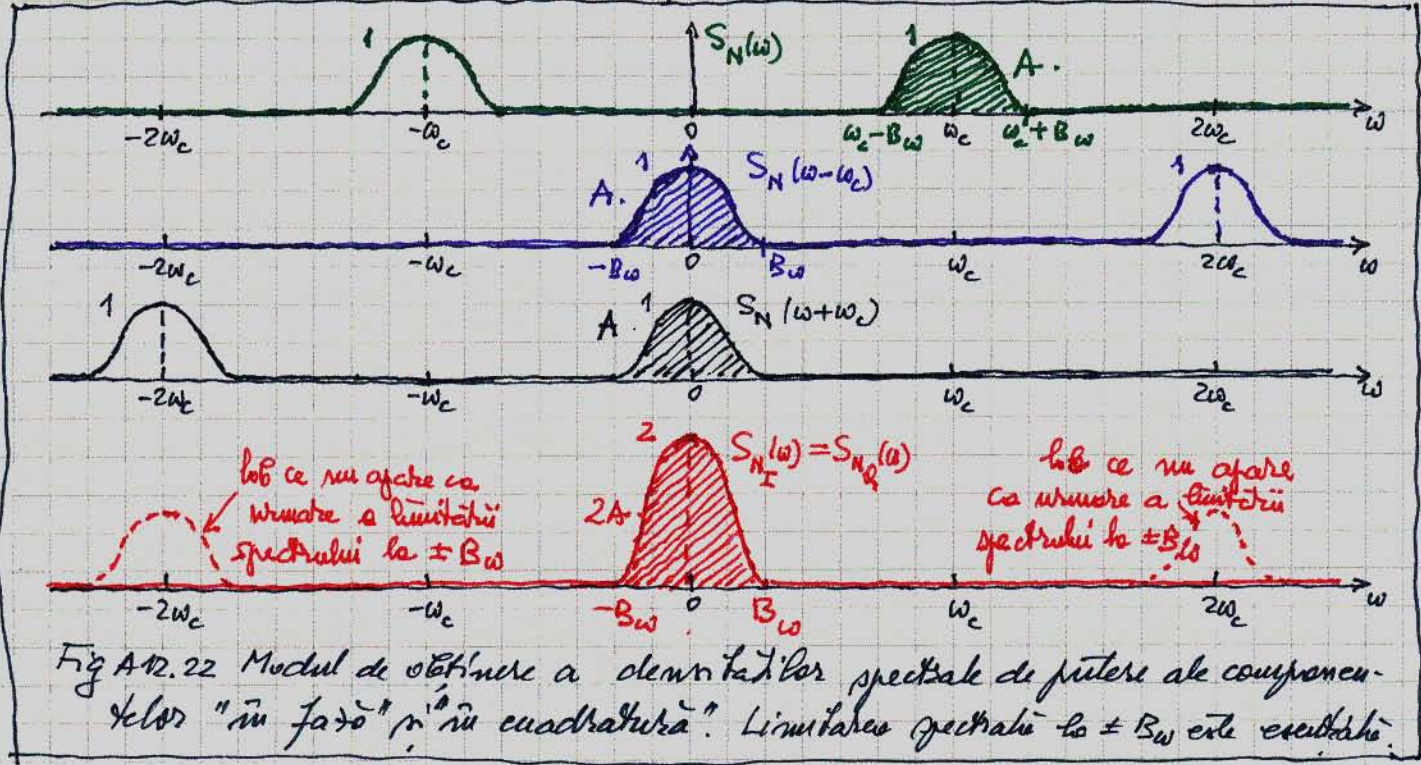


Fig A12.22 Modul de obținere a densităților spectrale de putere ale componen-
 telor "în fază" și "în cuadratură". Limitarea spectrală la $\pm Bw$ este esențială.

5. Diferențele componentelor în fază și în cuadratură, σ_I^2 și σ_Q^2 , respectiv,
 sunt egale între ele și egale cu σ_N^2 dispersia zgomotului de bandă în-
 gustă:

$$\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = \sigma_N^2 \quad (A12.144)$$

Aveam:

$$2\pi\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) dw \quad (A12.145)$$

și deci:

$$2\pi\sigma_N^2 = 2 \int_{w_c-Bw}^{w_c+Bw} S_N(w) dw = 2A$$

unde A este aria marcată în figura A12.22. Dar

$$2\pi\sigma_I^2 = 2\pi\sigma_Q^2 = \int_{-Bw}^{Bw} S_{N_I}(w) dw = 2A$$

ceea ce se vede imediat din analiza de arii efectuată în figura A12.22. Am
 obținut deci egalitatea (A12.144)

6. Densitatea interspectrală este o cantitate pur imaginară și are
 forma:

$$S_{N_I, N_Q}(\omega) = -S_{N_Q, N_I}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{j} [S_N(\omega - \omega_c) - S_N(\omega + \omega_c)] & ; |\omega| \leq B_{\omega} \\ 0 & ; \text{în rest} \end{cases} \quad (A12.146)$$

Putem scrie :

$$\begin{aligned} N_I(t) N_Q(t-\tau) &= -2 N(t) N(t-\tau) 2 \cos \omega_c t \sin(\omega_c t - \omega_c \tau) \\ &= -2 N(t) N(t-\tau) [-\sin \omega_c \tau + \sin(2\omega_c t - \omega_c \tau)] \\ &= \frac{2 N(t) N(t-\tau) \sin \omega_c \tau}{\text{are componente spectrale}} + \frac{2 N(t) N(t-\tau) \sin(2\omega_c t - \omega_c \tau)}{\text{are componente spectrale centrate pe } 2\omega_c.} \end{aligned}$$

în limitând spectrul la B_{ω} :

$$R_{N_I, N_Q}(\tau) = 2 R_N(\tau) \sin \omega_c \tau \quad |\omega| \leq B_{\omega} \quad (A12.147)$$

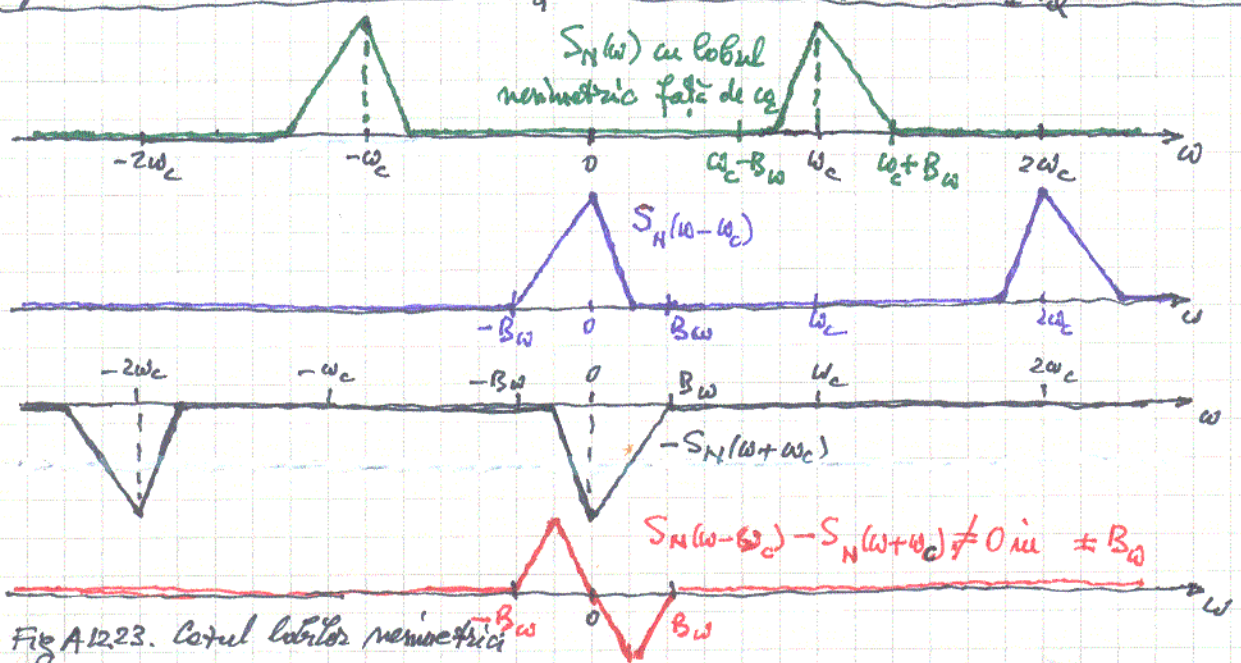
Rezultă că

$$\begin{aligned} S_{N_I, N_Q}(\omega) &= \frac{2}{2\pi} S_N(\omega) * \frac{1}{j} [S(\omega - \omega_c) - S(\omega + \omega_c)] \\ &= \frac{1}{j} [S_N(\omega - \omega_c) - S_N(\omega + \omega_c)] \end{aligned}$$

În mod asemănător se calculează și $S_{N_Q, N_I}(\omega)$.

7. Dacă zgomotul de canală îngustă $N(t)$ este gaussian și densitatea sa spectrală de putere este simetrică față de ω_c , atunci componentele "în fază" și "în cuadratură" sunt statistice independente.

Dacă analizăm figura A12.22, condiția ca $S_N(\omega - \omega_c) - S_N(\omega + \omega_c) = 0$ în banda $\pm B_{\omega}$ este simetria față de axa ω_c a densității spectrale de putere $S_N(\omega)$. Atunci $S_{N_I, N_Q}(\omega) \equiv 0$ ceea ce implică $R_{N_I, N_Q}(\tau) = 0$, necorelația



componentelor $N_I(t)$ și $N_Q(t)$. Dacă $N(t)$ este gaussiană atunci și $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ sunt și ele gaussiene și mutual gaussiane și necesitatea implică independența statistică.

În figura A12.23 se arată cazul în care lățimii din $S_N(\omega)$ nu sunt simetrice în raport cu ω_c . În această situație, $S_N(\omega - \omega_c) - S_N(\omega + \omega_c) \neq 0$ în banda $\pm B_\omega$. În consecință $S_{N_I, N_Q}(\omega) \neq 0$ și componentele $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ sunt corelate.

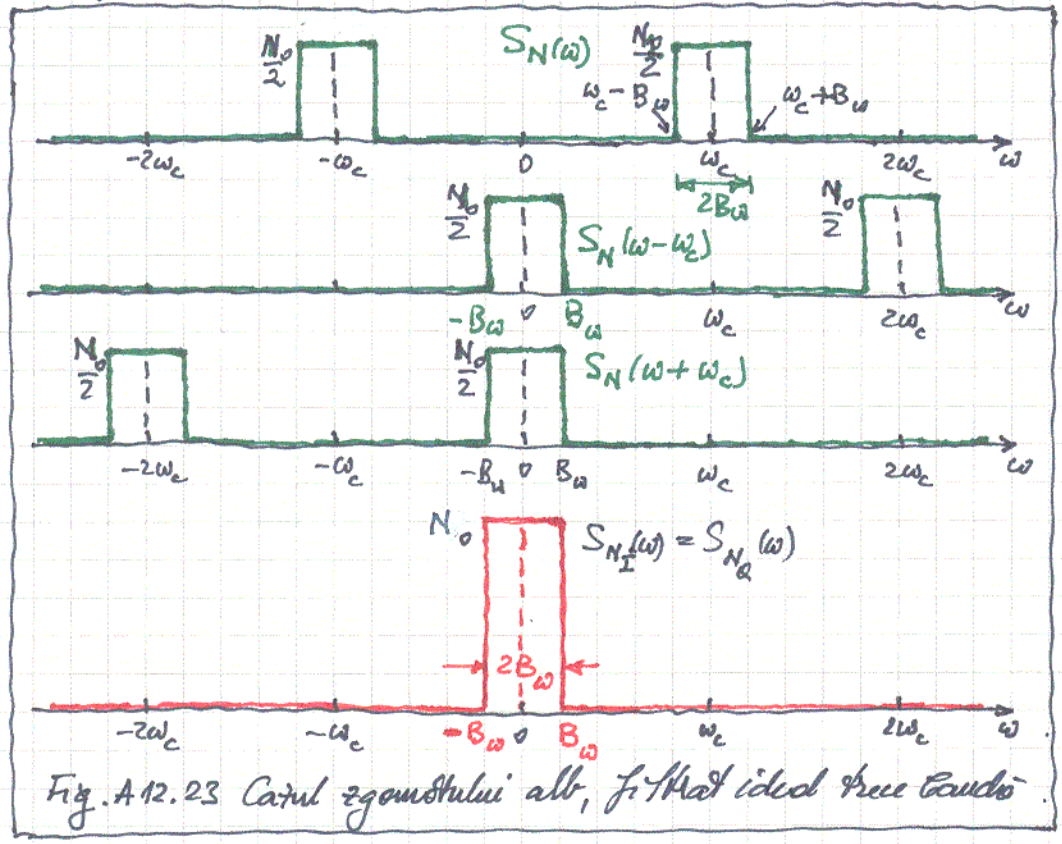


Fig. A12.23 Cazul zgomotului alb, filtrat ideal trece banda.

Cazul zgomotului alb filtrat ideal trece banda. Densitatea spectrală de putere este arătată în figura A12.23:

$$S_N(\omega) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{B_\omega} (\omega - \omega_c) + \frac{N_0}{2} \frac{1}{B_\omega} (\omega + \omega_c) \tag{A12.148}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= \frac{N_0}{2} \cdot \frac{j\omega B_\omega \tau}{\pi \tau} [e^{-j\omega_c \tau} + e^{j\omega_c \tau}] \\ &= N_0 \frac{j\omega B_\omega \tau}{\pi \tau} \cdot \cos \omega_c \tau \\ &= \frac{N_0 B_\omega}{\pi} \frac{j\omega B_\omega \tau}{B_\omega \tau} \cdot \cos \omega_c \tau \\ &= 2 N_0 B_\omega \frac{j\omega 2\omega B_\omega \tau}{2\omega B_\omega \tau} \cdot \cos 2\omega_c \tau. \end{aligned} \tag{A12.149}$$

Autocorelația zgomotului alb filtrat trece banda ideal se arată în figura A12.24.

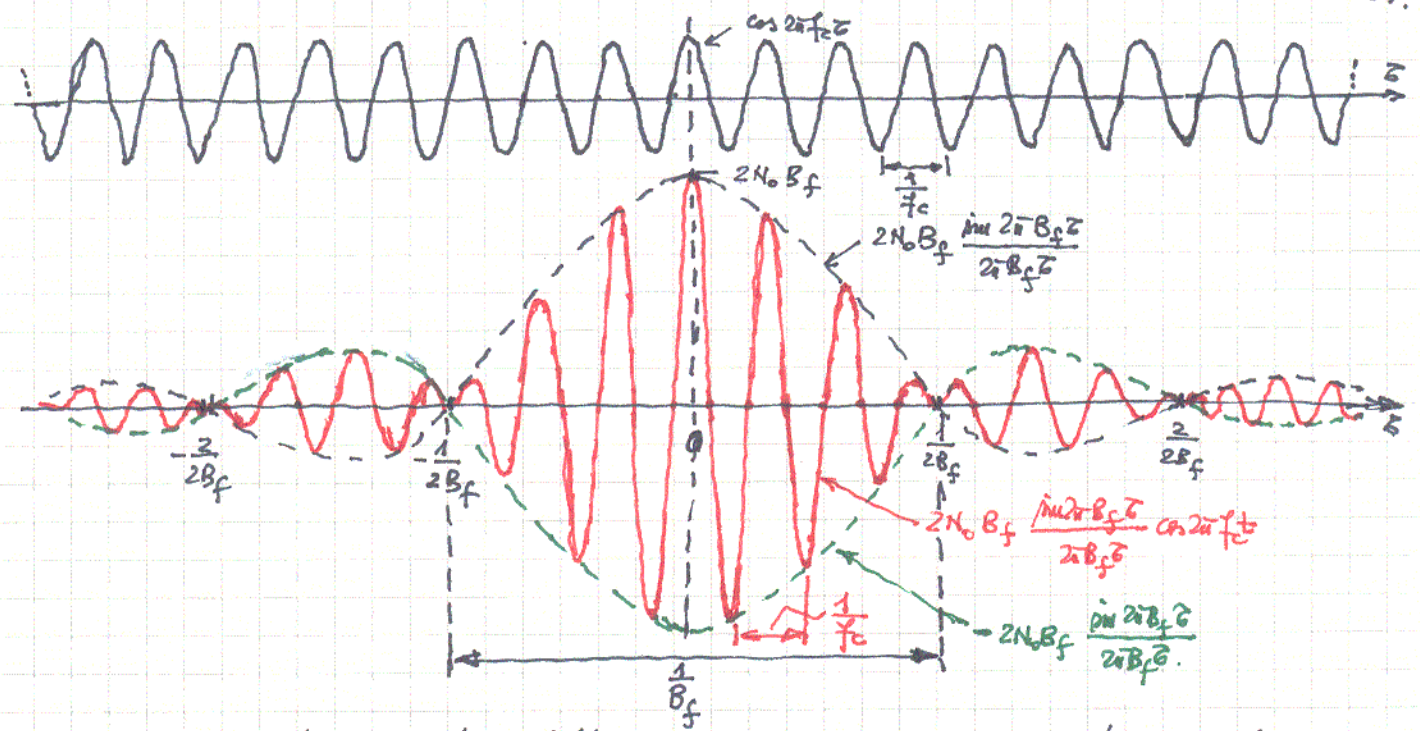


Fig A12.24 Funcția de autocorelație a zgomotului alb filtrat ideal trece bandă.

Cat puzerile componente "in fata" si "in cuadratură" acetes au densitatea spectrală de putere $N_0 B_w$, aratăta in figura A12.23. In consecință

$$R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = \frac{N_0 B_w}{\pi} \frac{\sin B_w \tau}{B_w \tau} = 2N_0 B_f \frac{\sin 2\pi B_f \tau}{2\pi B_f \tau} \quad (A12.150)$$

Reprezentarea zgomotului de bandă îngustă prin amvelopă și fază.

Am reprezentat zgomotul de bandă îngustă prin componentele "in fata" și "in cuadratură", conform modelului (A12.139). Putem rămâne la primul model, (A12.138) în care $A(t)$ este amvelopa semnelului iar $\theta(t)$ faza sa.

In mod evident:

$$A(t) = \sqrt{N_I^2(t) + N_Q^2(t)} \quad ; \quad A(t) \geq 0 \quad (A12.151)$$

și:

$$\theta(t) = \arctg \frac{N_Q(t)}{N_I(t)} \quad (A12.152)$$

Realizările amplitudinii și fazei se notează cu $a(t)$ și $\theta(t)$, respectiv. Ele au componente spectrale de joasă frecvență în densitatea spectrală de putere corespunzătoare.

Casa cum am spus, dacă $N(t)$ este gaussian (obținut prin filtrarea unui alt proces gaussian, $W(t)$) cu media nulă și dispersia σ_N^2 atunci, în condiția de simetrie în raport cu ω_c a densității spectrale de putere, componentele N_I și N_Q sunt gaussiene, statistice independente, de medie nulă și dispersie tot σ_N^2 . Prin urmare

$$f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi \sigma_N^2} e^{-\frac{n_I^2 + n_Q^2}{2\sigma_N^2}} \quad (A12.153)$$

in care $N_I = N_I(t)$ si $N_Q = N_Q(t)$ sunt variabilele aleatoare ^{obținute} considerând timpul t fixat. Asem

$$P\{m_I < N_I < m_I + dm_I, m_Q < N_Q < m_Q + dm_Q\} = \frac{1}{2\pi\sigma_N^2} e^{-\frac{m_I^2 + m_Q^2}{2\sigma_N^2}} dm_I dm_Q \quad (A.12.154)$$

Cum $m_I = a \cos \theta$ si $m_Q = a \sin \theta$ (A.12.155)

si $dm_I dm_Q = a da d\theta$ (A.12.156)

$$P\{a < A < a + da, \theta < \Theta < \Theta + d\theta\} = \frac{1}{2\pi\sigma_N^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_N^2}} a da d\theta \quad (A.12.157)$$

sau $f_{A,\Theta}(a, \theta) = \frac{a}{2\pi\sigma_N^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_N^2}}$ (A.12.158)

$$f_{\Theta}(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{a}{2\pi\sigma_N^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_N^2}} da = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{2\pi} e^{-u} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \quad (A.12.159)$$

si deci $f_{A,\Theta}(a, \theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{a}{\sigma_N^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_N^2}} = f_{\Theta}(\theta) f_A(a)$

cu $f_A(a) = \frac{a}{\sigma_N^2} e^{-\frac{a^2}{2\sigma_N^2}}$ (A.12.160)

Conform cu (A6.47), $f_A(a)$ are o repartiție de tip Rayleigh, cu parametrul σ_N^2 . Vom reaminti că cele două componente, N_I si N_Q sunt cu repartiții normale, de medie nulă si aceeași dispersie σ_N^2 , statistice independente si ortogonale, ceea ce, conform cu (A6.11) trebuie să conducă la repartiția Rayleigh.

Undă sinusoidală afectată de zgomot de bandă îngustă ^{aditiv}

Procesul $X(t)$ este compus conform modelului:

$$X(t) = A_c \cos \omega_c t + N(t) \quad (A.12.161)$$

$N(t)$ fiind un zgomot de bandă îngustă cu modelul (A.12.139):

$$\begin{aligned} X(t) &= A_c \cos \omega_c t + N_I(t) \cos \omega_c t - N_Q(t) \sin \omega_c t \\ &= [A_c + N_I(t)] \cos \omega_c t - N_Q(t) \sin \omega_c t \\ &= N_I'(t) \cos \omega_c t - N_Q'(t) \sin \omega_c t \end{aligned} \quad (A.12.162)$$

unde am pus:

$$N_I'(t) = A_c + N_I(t) \quad (A.12.163)$$

Zgomotul $N(t)$ este gaussian, de medie nulă si dispersie σ_N^2 . În consecință:

1. $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ sunt cu repartiție gaussiană și sunt statistic independente
2. $N_I(t)$ este de medie A_c iar $N_Q(t)$ este de medie nulă
3. $N_I(t)$ și $N_Q(t)$ au aceeași dispersie cu $N(t)$, σ_N^2 .

Ca o consecință pentru $N_I(t) - A = N_I(t)$ și $N_Q(t)$ se aplică definiția de probabilitate multivariată (A12.153). Rezultă:

$$p_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma_N^2} \exp\left\{-\frac{(n_I - A_c)^2 + n_Q^2}{2\sigma_N^2}\right\} \quad (\text{A12.164})$$

Acum amvelopa și faza mult:

$$A(t) = \sqrt{[N_I(t)]^2 + N_Q^2(t)} \quad A(t) \geq 0 \quad (\text{A12.165})$$

$$\Theta(t) = \arctg \frac{N_Q(t)}{N_I(t)} \quad (\text{A12.166})$$

și, prin urmare:

$$p_{A, \Theta}(a, \theta) = \frac{a}{2\pi\sigma_N^2} \exp\left\{-\frac{a^2 + A_c^2 - 2A_c a \cos\theta}{2\sigma_N^2}\right\} \quad (\text{A12.167})$$

Ca urmare a existenței termenului " $2A_c a \cos\theta$ " nu se produce separarea $f_{A, \Theta}(a, \theta) = p_A(a) \cdot p_\Theta(\theta)$ și deci $A(t)$ și $\Theta(t)$ sunt statistic independente. Definiția de probabilitate marginală pentru $A(t)$, amvelopa semnalului afectat de zgomot este:

$$\begin{aligned} p_A(a) &= \int_0^{2\pi} \frac{a}{2\pi\sigma_N^2} \exp\left\{-\frac{a^2 + A_c^2 - 2A_c a \cos\theta}{2\sigma_N^2}\right\} d\theta \\ &= \frac{a}{2\pi\sigma_N^2} \exp\left\{-\frac{a^2 + A_c^2}{2\sigma_N^2}\right\} \int_0^{2\pi} e^{\frac{A_c a \cos\theta}{\sigma_N^2}} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A12.168})$$

Dar:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos\theta} d\theta = I_0(x) \quad (\text{A12.169})$$

Funcția Bessel modificată, de ordin 0 și argument x - vezi și figura A6.8. În consecință (A12.168) devine:

$$p_A(a) = \frac{a}{\sigma_N^2} e^{-\frac{a^2 + A_c^2}{2\sigma_N^2}} I_0\left(\frac{A_c a}{\sigma_N}\right) \quad (\text{A12.170})$$

o repartiție Rice - (A6.50) - cu $v = A_c$ și $\sigma = \sigma_N$.

Pentru lipsa puterii, $A_c = 0$, cu $I_0(0) = 1$, (A12.170) devine o repartiție Rayleigh, (A12.160). Pentru $\frac{A_c}{\sigma_N} > 10$ se poate aproxima (A12.170) cu o repartiție gaussiană de medie A_c (vezi figura A6.7).

A13. Procese aleatoare în timp discret.

Fu principiul esanționând un proces în timp continuu se obține un proces în timp discret $X[n] = X(nT_e)$, ceea ce înseamnă mult prețuirea acestora. Fimând timpul, n , se obține o variabilă aleatoare, $X[n]$. O realizare a unui proces este o funcție de timpul discret, $x[n]$.

A13.1 Procese staționare, în timp discret.

Dacă fixăm N momente de timp discret, n_1, n_2, \dots, n_N alese într-o difă voie, se obțin N variabile aleatoare $X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_N]$ și fie distribuția de repartiție mutuală a acestora:

$$f_{X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_N]}(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Dacă oricare ar fi deplasarea în timp n_0 aplicată celor N momente de timp avem:

$$f_{X[n_1+n_0], X[n_2+n_0], \dots, X[n_N+n_0]}(x_1, x_2, \dots, x_N) = f_{X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_N]}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (A13.1)$$

Procesul $X[n]$ este staționar în sens strict. Pentru $N=1$

$$f_{X[n_1+n_0]}(x_1) = f_{X[n_1]}(x_1)$$

relație valabilă și pentru $n_1=0$ obținem că

$$f_{X[n_0]}(x_1) = f_{X[0]}(x_1) \quad \forall n_0 \quad (A13.2)$$

Repartiția marginală pentru fiecare esanțion al unui proces staționar este aceeași. Esanțioanele au deci distribuția identică dacă procesul este staționar.

Fu acum un proces în care esanțioanele sunt statistice independente și identice distribuite, proces numit prin acronimul IID. Avem:

$$\begin{aligned} f_{X[n_1+n_0], X[n_2+n_0], \dots, X[n_N+n_0]}(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \prod_{i=1}^N f_{X[n_i+n_0]}(x_i) && \text{(independența statistică)} \\ &= \prod_{i=1}^N f_{X[n_i]}(x_i) && \text{(distribuția identică)} \\ &= f_{X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_N]}(x_1, x_2, \dots, x_N) && \text{(independența statistică)} \end{aligned} \quad (A13.3)$$

Rezultă, comparând (A13.3) cu (A13.1) că un proces IID în timp discret este un proces staționar. Mediile statistice ale oricărei funcții de procesul

stationar in timpul de timp :

$$E_{X[n_1+n_0], X[n_2+n_0], \dots, X[n_N+n_0]} \{ \cdot \} = E_{X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_N]} \{ \cdot \} \quad (A13.4)$$

Un caz aparte de proces IID este zgomotul alb gaussian (WGN) in timp discret pentru care fiecare echantion este repartizat normal, cu media nulla si dispersia σ^2 , adica

$$X[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \forall n \quad (A13.4)$$

echivocant fiind statistic independente. Pentru acest proces WGN, repartitia mutuala este:

$$\begin{aligned} p_{X[n_1], X[n_2], \dots, X[n_N]}(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \prod_{i=1}^N p_{X[n_i]}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^N} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i^2\right\} \end{aligned} \quad (A13.5)$$

Dupa cum vom vedea vectorul $\vec{X} = [X[n_1] \ X[n_2] \ \dots \ X[n_N]]^T$ va avea repartitia

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \sigma^2 \vec{I}_N) \quad (A13.6)$$

nula $\vec{0} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ iar \vec{I}_N este matricea unitate $N \times N$

Sinusoidal cu fază aleatoare în timp discret este semnalul

$$X[n] = \cos(\Omega_0 n + \Theta) = \cos(2\pi f_0 n + \Theta) \quad (A13.7)$$

in care variabila aleatoare Θ are distributia uniforma in intervalul $[0, 2\pi]$ sau $[-\pi, \pi]$. Legatura intre Θ si X este data de relatie :

$$y = \cos(\Omega_0 n + x) = \cos x \quad (A13.7)$$

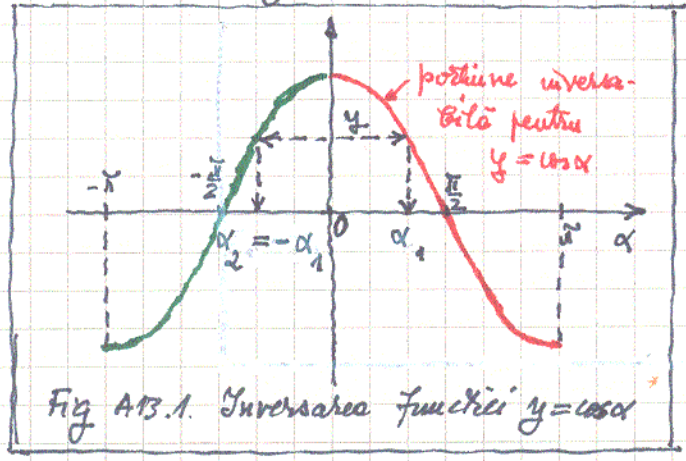


Fig A13.1. Inversarea functiei $y = \cos x$

Solutiile la inversare mult-valorii \cos in figura A13.1 :

$$\alpha_1 = \Omega_0 n + x_1 = \arccos y \in [0, \pi] \quad (A13.8)$$

$$x_1 = \arccos y - \Omega_0 n$$

$$x_2 = -\arccos y + \Omega_0 n \quad (A13.9)$$

In consecinta

$$p_Y(y) = p_X(x_1) \left| \frac{d\alpha_1(y)}{dy} \right| + p_X(x_2) \left| \frac{d\alpha_2(y)}{dy} \right| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

Revenim la notatările curente:

$$f_{X[n]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & ; -1 \leq x < 1 \\ 0 & ; \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{A13.10})$$

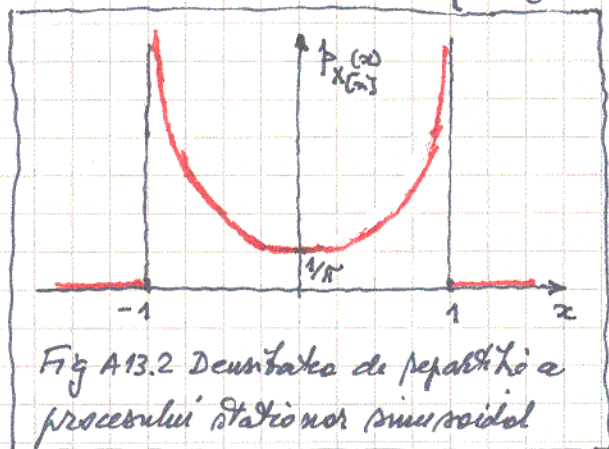


Fig A13.2 Densitatea de repartiție a procesului staționar sinusoidal

În figura A13.2 se dă forma deundărilor de repartiție.

Recomandăm să consultați în fig A5.5 și figura A5.5.

A13.2 Medii statistice

Avem:

$$\mu_X[n] = E\{X[n]\} \quad (\text{A13.11})$$

și

$$\sigma_X^2[n] = E\{(X[n] - \mu_X[n])^2\} \quad (\text{A13.12})$$

Securanța de covarianță $C_X[n_1, n_2]$ se definește prin:

$$C_X[n_1, n_2] = \text{Cov}\{X[n_1], X[n_2]\} = E\{(X[n_1] - \mu_X[n_1])(X[n_2] - \mu_X[n_2])\} \quad (\text{A13.13})$$

Avem următoarele proprietăți ale covarianței:

$$C_X[n_2, n_1] = C_X[n_1, n_2] \quad (\text{simetrie}) \quad (\text{A13.14})$$

și

$$C_X[n, n] = \sigma_X^2[n] \quad (\text{A13.15})$$

În cazul zgomotului alb gaussian (WGN):

$$\mu_X[n] = 0 \quad (\text{A13.16})$$

$$C_X[n_1, n_2] = \begin{cases} \sigma^2, & n_1 = n_2 \\ 0, & n_1 \neq n_2 \end{cases} = \sigma^2 \delta[n_2 - n_1] \quad (\text{A13.17})$$

esantioanele distincte fiind necorelate și în plus statistice independente.

În cazul sinusoidelor cu fază inițială aleatoare, uniform distribuite:

$$\begin{aligned} \mu_X[n] &= E\{X[n]\} = E\{\cos(\Omega_0 n + \theta)\} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\Omega_0 n + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sin(\Omega_0 n + \theta) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} [\sin(\Omega_0 n + 2\pi) - \sin \Omega_0 n] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A13.18})$$

$$\begin{aligned}
 C_X[n_1, n_2] &= E\{X[n_1]X[n_2]\} \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos(\Omega_0 n_1 + \theta) \cos(\Omega_0 n_2 + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos \Omega_0 (n_2 - n_1) d\theta + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\Omega_0 (n_2 + n_1) + 2\theta] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \cos \Omega_0 (n_2 - n_1) + \frac{1}{8\pi} \sin[\Omega_0 (n_2 + n_1) + 2\theta] \Big|_0^{2\pi}
 \end{aligned}$$

sau, în final:

$$C_X[n_1, n_2] = \frac{1}{2} \cos \Omega_0 (n_2 - n_1) = C_X[n_2 - n_1] \quad (A13.19)$$

Se vede că C_X depinde doar de diferența $n_2 - n_1$, și nu de valoarea lor efectivă.

$$\sigma_X^2[n] = C_X[n, n] = \frac{1}{2} \quad (A13.20)$$

Aun rezultat deci că procesul este staționar, cel puțin în sens larg.

A13.3 Staționabilitatea în sens larg a proceselor aleatoare în timp discret.

Un proces staționar în sens larg (WSS - wide sense stationary process) are proprietățile:

$$f_{X[n+n_0]}(x) = f_{X[n]}(x) \quad ; \quad \forall n \text{ și } \forall n_0 \quad (A13.21)$$

și

$$f_{X[n_1+n_0], X[n_2+n_0]}(x_1, x_2) = f_{X[n_1], X[n_2]}(x_1, x_2) \quad ; \quad \forall n_1, n_2 \text{ și } \forall n_0 \quad (A13.22)$$

Din (A13.21) deducem imediat că

$$f_{X[n]}(x) = f_{X[0]}(x) \quad \forall n \quad (A13.21')$$

și deci

$$\mu_X[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X[n]}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X[0]}(x) dx = \mu = \text{const} \quad (A13.23)$$

media fiind o constantă.

Din (A13.22) rezultă că:

$$f_{X[n_1], X[n_2]}(x_1, x_2) = f_{X[0], X[n_2-n_1]}(x_1, x_2) = f_{X[n_1-n_2], X[0]}(x_1, x_2) \quad (A13.22')$$

și prin urmare:

$$E\{X[n_1]X[n_2]\} = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X[n_1], X[n_2]}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X[0], X[n_2-n_1]}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$= E\{X[0]X[n_2-n_1]\}$$

$$= E\{X[n_1-n_2]X[0]\} = E\{X[0]X[n_1-n_2]\}$$

În final:

$$E\{X[n_1]X[n_2]\} = E\{X[0]X[n_2-n_1]\} \quad (A13.24)$$

Dar

$$\begin{aligned} C_x[n_1, n_2] &= E\{X[n_1]X[n_2]\} - E\{X[n_1]\}E\{X[n_2]\} \\ &= E\{X[0]X[n_2-n_1]\} - \mu^2 = C_x[n_2-n_1] \end{aligned} \quad (A13.25)$$

Priu urmare, dacă sunt îndeplinite condițiile (A13.21) și (A13.22) atunci media procesului este o constantă iar covarianța depinde doar de valoarea absolută a diferenței momentelor de timp. Un proces de acest fel se numește staționar în sens larg. Un proces strict staționar este și staționar în sens larg; reciproca nu este adevărată.

Secvența de autocorelații a unui proces staționar în sens larg.

Dacă $X[n]$ este un proces WSS atunci $E\{X[n_1]X[n_2]\}$ depinde de separarea în timp a esantioanelor, $n_2 - n_1$. Punem $n_1 = n$ și $n_2 = n + k$ și definim autocorelația ca funcție de timpul discret prin:

$$R_x[k] = E\{X[n]X[n+k]\} \quad (A13.26)$$

numită și secvența de autocorelații (ACS - autocorrelation sequence). Autocorelația are câteva proprietăți:

1) Valoarea ei în origine este pozitivă și egală cu puterea medie a procesului aleator

$$R_x[0] = E\{X[n]^2\} = P > 0 \quad (A13.27)$$

2) Autocorelația este o funcție pară după distanța k dintre esantioane:

$$R_x[-k] = R_x[k] \quad (A13.28)$$

proprietate ce rezultă din (A13.24)

3) Autocorelația are un maxim în origine:

$$|R_x[k]| \leq R_x[0] = P \quad (A13.29)$$

Această rezultă din inegalitatea evidentă:

$$E\{(X[n] \pm X[n+k])^2\} \geq 0$$

care se dezvoltă în forma:

$$\underbrace{E\{X[n]^2\}}_{R_x[0]} + \underbrace{E\{X[n+k]^2\}}_{R_x[0]} \pm 2E\{X[n]X[n+k]\} \geq 0$$

sau

$$R_x[0] \pm R_x[k] \geq 0$$

care conduce la:

$$-R_x[0] \leq R_x[k] \leq R_x[0]$$

$$(A13.30)$$

și deci la inegalitatea (A13.29).

4) Secvența de autocorelație este o mărime a "predictibilității" unui proces aleator. Coeficientul de corelație al unui proces WSS este definit prin relația:

$$\rho_{X[n], X[n+k]} = \frac{C_x[n, n+k]}{C_x[n, n]} = \frac{C_x[k]}{C_x[0]} = \frac{R_x[k] - \mu^2}{R_x[0] - \mu^2} \quad (A.13.31)$$

Dacă procesul WSS este de medie nulă, $\mu=0$, atunci

$$\rho_{X[n], X[n+k]} = \frac{R_x[k]}{R_x[0]} ; | \rho | \leq 1. \quad (A.13.32)$$

5) Secvența de autocorelație $R_x[k]$ tinde spre μ^2 atunci când distanța dintre eșantioane tinde la infinit ($k \rightarrow \infty$). Este evident că

$$R_x[k] = C_x[n, n+k] + \mu^2 \quad (A.13.33)$$

și cum pe măsură ce $k \rightarrow \infty$ eșantioanele sunt tot mai puțin corelate adică

$$\lim_{k \rightarrow \infty} C_x[n, n+k] = 0 \quad (A.13.33)$$

rezultă că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_x[k] = \mu^2 \quad (A.13.34)$$

Exemplu.

Fie că dorim să găsim un predictor liniar pentru variabila aleatoare Y , dacă cunoaștem o altă variabilă aleatoare (mai precis o predictor a ei) X . Predictia se face prin relația liniară

$$\hat{Y} = aX + b \quad (A.13.35)$$

și dorim să determinăm a și b astfel încât eroarea medie pătratică de predicție $E\{(Y - \hat{Y})^2\}$ să fie minimă (mse - mean square error)

$$mse(a, b) = E_{X, Y} \{(Y - aX - b)^2\}$$

$$= E_{X, Y} \{Y^2 + a^2X^2 + b^2 - 2aYX - 2bY + 2abX\}$$

$$= E_Y \{Y^2\} + a^2 E_X \{X^2\} - 2a E_{X, Y} \{XY\} - 2b E_Y \{Y\} + 2ab E_X \{X\} + b^2$$

Pentru minimizarea erorii medii pătratice înținem:

$$\frac{\partial mse(a, b)}{\partial a} = 2a E_X \{X^2\} - 2 E_{X, Y} \{XY\} + 2b E_X \{X\} = 0$$

$$\frac{\partial mse(a, b)}{\partial b} = -2 E_Y \{Y\} + 2a E_X \{X\} + 2b = 0$$

sau:

$$a E_X \{X^2\} + b E_X \{X\} = E_{X, Y} \{XY\}$$

$$a E_X \{X\} + b = E_Y \{Y\}$$

Sistemul linear are solutia:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{E_{X,Y}\{XY\} - E_X\{X\}E_Y\{Y\}}{E_X\{X^2\} - E_X^2\{X\}} = \frac{\text{Cov}\{X,Y\}}{\text{Disp}\{X\}} \\ b &= E_Y\{Y\} - \frac{\text{Cov}\{X,Y\}}{\text{Disp}\{X\}} E_X\{X\} \end{aligned} \right\} \text{(A13.36)}$$

In consecinta cea mai buna predictie liniara este data de

$$\hat{Y} = E_Y\{Y\} + \frac{\text{Cov}\{X,Y\}}{\text{Disp}\{X\}} (x - E_X\{X\}) \quad \text{(A13.37)}$$

unde x este realitatea obtinuta pentru variabila aleatoare X . Eroarea medie patratice minima deriv

$$(\text{MAE})_{\min} = \text{Disp}\{Y\} - \frac{[\text{Cov}\{X,Y\}]^2}{\text{Disp}\{X\}} \quad \text{(A13.38)}$$

Ne punem intrebarea: care este predictorul linear optimal care ne permite estimarea variabilei aleatoare $X[n+k]$ in functie de realitatea $x[n]$ a variabilei aleatoare $X[n]$. Punem $Y = X[n+k]$; $X = X[n]$. Conform cu (A13.37)

$$\hat{X}[n+k] = \mu + \frac{R_X[k] - \mu^2}{R_X[0] - \mu^2} (x[n] - \mu) \quad \text{(A13.39)}$$

$$= \mu + \rho_{X[n], X[n+k]} (x[n] - \mu)$$

Cea mai buna predictie pentru $\rho = 0$ este $\hat{X}[n+k] = \mu$, adica media. Realitatea $x[n]$ nu influenteaza estimatia.

Cu cat ρ se apropie mai mult de unu, cu atat ponderea termenului $x[n] - \mu$ creste si spunem ca putem prezice mai bine $X[n+k]$.

Avem:

$$(\text{MAE})_{\min} = \sigma^2 - \rho^2 \sigma^2 = (1 - \rho^2) \sigma^2 \quad \text{(A13.40)}$$

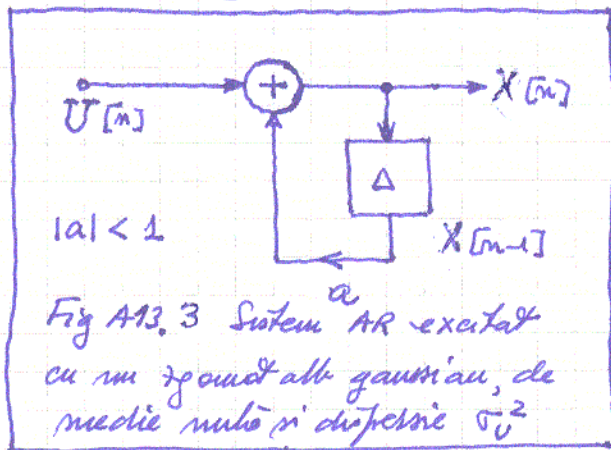
Eroarea minima este cu atat mai mica cu cat $|\rho|$ se apropie mai mult de unu. Calitatea estimarii este deci cu atat mai buna cu cat $|\rho|$ se apropie de unu.

In cazul zgomotului alb gaussian, de medie nulla

$$R_X[k] = \sigma^2 \delta[k] \quad \text{(A13.41)}$$

in deci chiar daca e vorba sa prezicem $X[n+1]$ avand o realitate pentru $X[n]$, nu putem face nimic deoarece $\rho = 0$ in cea mai buna predictie este media.

Vom considera acum un sistem liniar autoregresiv, de ordinul 1, excitat cu un zgomot alb, gaussian, de medie nulă și dispersie σ_u^2 . La intrarea sistemului apare un proces aleator $X[n]$:



La intrarea sistemului apare un proces aleator $X[n]$:

$$X[n] = aX[n-1] + U[n] \quad (A13.42)$$

Avem:

$$X[-1] = aX[-2] + U[-1]$$

$$X[0] = a^2X[-2] + aU[-1] + U[0]$$

$$X[1] = a^3X[-2] + a^2U[-1] + aU[0] + U[1]$$

$$X[2] = a^4X[-2] + a^3U[-1] + a^2U[0] + aU[1] + U[2]$$

sau, în general:

$$X[n] = U[n] + aU[n-1] + a^2U[n-2] + a^3U[n-3] + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} a^i U[n-i] \quad ; \quad |a| < 1 \quad (A13.43)$$

Calculăm:

$$X[n]U[n+k] = U[n]U[n+k] + aU[n-1]U[n+k] + a^2U[n-2]U[n+k] + \dots \quad ; \quad k \geq 1$$

și deci:

$$E\{X[n]U[n+k]\} = E\{U[n]U[n+k]\} + aE\{U[n-1]U[n+k]\} + a^2E\{U[n-2]U[n+k]\} + \dots$$

$$= R_U[k] + aR_U[k+1] + a^2R_U[k+2] + \dots \quad ; \quad k \geq 1$$

Cum zgomotul $U[n]$ este alb $R_U[k] = 0$ pentru $k \geq 1$ așa că

$$E\{X[n]U[n+k]\} = 0 \quad ; \quad k \geq 1 \quad (A13.44)$$

Calculăm acum pentru procesul $X[n]$ generat autocorelația:

$$R_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} = E\{X[n](aX[n+k-1] + U[n+k])\}$$

$$= aE\{X[n]X[n+k-1]\} + E\{X[n]U[n+k]\}$$

$$= aR_X[k-1] \quad ; \quad k \geq 1 \quad (A13.45)$$

Atunci avem

$$R_X[0] = E\{X[n]^2\} = E\left\{\sum_{i=0}^{\infty} a^i U[n-i] \sum_{m=0}^{\infty} a^m U[n-m]\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a^i a^m E\{U[n-i]U[n-m]\}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a^{i+m} R_U[i-m]$$

Dar $U[n]$ fiind un zgomot alb

$$R_U[i-m] = \sigma_U^2 \delta[i-m]$$

are c\o:

$$R_X[0] = \sum_{i=0}^{\infty} a^{2i} \sigma_U^2 = \frac{\sigma_U^2}{1-a^2} \quad (A13.46)$$

Substituind (A13.46) \u00een (A13.45) \u00e7i rezolv\u00e2nd recuren\u00e7a ob\u00eetinem:

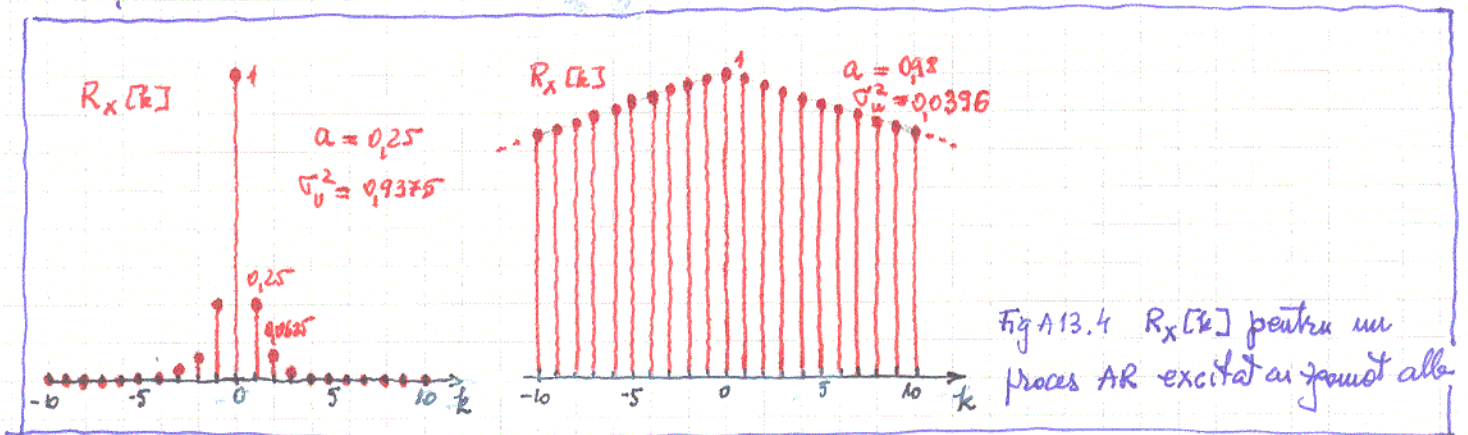
$$R_X[k] = a^k R_X[0] = \frac{\sigma_U^2}{1-a^2} a^k \quad k \geq 1$$

Cum $R_X[-k] = R_X[k]$ rezult\u00e2, c\o

$$R_X[k] = \frac{\sigma_U^2}{1-a^2} a^{|k|} \quad \forall k \text{ (inclusiv } 0) \quad (A13.47)$$

Pentru $|a|$ apropiat de 1, $R_X[k]$ descre\u00ete lent \u00e7i deci predictibilitatea pentru $X[n+k]$, plec\u00e2nd de la o predic\u00e7ie $X[n]$, e bun\u00e2 chiar \u00e7i pentru valori k relativ mari. Pentru $|a|$ apropiat de zero $R_X[k]$ descre\u00ete rapid \u00e7i predictibilitatea este slab\u00e2, chiar \u00e7i pentru valori k mici.

Observa\u00e7ie. Dac\o se ia $\sigma_U^2 = 1-a^2$ atunci procentele de autocorela\u00e7ie au toate valoarea 1 \u00een origine, indiferent de valoarea lui a .



**

Vom ar\u00e2ta c\o matricea de corela\u00e7ie \vec{R}_X este pozitiv semidefinit\u00e2. Avem:

$$\begin{aligned} \vec{R}_X &= E \left\{ \begin{bmatrix} X[n] \\ X[n+1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X[n] & X[n+1] \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} E\{X[n]X[n]\} & E\{X[n]X[n+1]\} \\ E\{X[n+1]X[n]\} & E\{X[n+1]X[n+1]\} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_X[0] & R_X[1] \\ R_X[1] & R_X[0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A13.48)$$

Form\u00e2m variabila aleatoare $Y = a_0 X[0] + a_1 X[1]$, din variabilele aleatoare $X[0]$ \u00e7i $X[1]$, a_0 \u00e7i a_1 fiind constante reale, alese \u00een mod arbitrar.

$$E\{Y^2\} = E\{(a_0 X[0] + a_1 X[1])^2\} \geq 0 \quad (A13.49)$$

Dată

$$a_0 X[0] + a_1 X[1] = [a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (a_0 X[0] + a_1 X[1])^2 &= \left([a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} \right) \left([a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} \right)^T \\ &= [a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} [X[0] \ X[1]] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

În consecință:

$$\begin{aligned} E\{Y^2\} &= [a_0 \ a_1] E \left\{ \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \end{bmatrix} [X[0] \ X[1]] \right\} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \\ &= [a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} R_X[0] & R_X[1] \\ R_X[1] & R_X[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \tag{A13.50}$$

oricare ar fi a_0 și a_1 . Rezultă deci că \vec{R}_X este o matrice pozitiv semidefinită. Dacă $E\{Y^2\} > 0$ atunci nu este asigurată predictibilitatea completă și \vec{R}_X este pozitiv definită. Se scrie înlocuind că

$$\vec{R}_X \geq \vec{0} \tag{A13.51}$$

înțelegând însă că matricea satisface condiția (A13.50), oricare ar fi a_0 și a_1 .

Dacă pe porunca de la variabilele centrate $\hat{X}[0]$ și $\hat{X}[1]$ și pe forma variabilei centrate $\hat{Y} = a_0 \hat{X}[0] + a_1 \hat{X}[1]$ pe baza concluziei că și matricea de covarianță \vec{C}_X este pozitiv semidefinită. Dacă $X[n]$ este un proces aleator de medie nulă atunci $\vec{C}_X = \vec{R}_X$.

Dacă considerăm $Y = a_0 X[0] + a_1 X[1] + \dots + a_{N-1} X[N-1]$ pe baza că

$$\vec{R}_X = \begin{bmatrix} R_X[0] & R_X[1] & R_X[2] & \dots & R_X[N-1] \\ R_X[1] & R_X[0] & R_X[1] & \dots & R_X[N-2] \\ R_X[2] & R_X[1] & R_X[0] & \dots & R_X[N-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_X[N-1] & R_X[N-2] & R_X[N-3] & \dots & R_X[0] \end{bmatrix}; \quad \vec{C}_X = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & C_X[1] & C_X[2] & \dots & C_X[N-1] \\ C_X[1] & \sigma_X^2 & C_X[1] & \dots & C_X[N-2] \\ C_X[2] & C_X[1] & \sigma_X^2 & \dots & C_X[N-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X[N-1] & C_X[N-2] & C_X[N-3] & \dots & \sigma_X^2 \end{bmatrix} \tag{A13.52}$$

sunt matrici pozitiv semidefinite. Enumerăm a 6-a proprietate a secvenței de autocorelație a unui proces staționar în sens larg:

6). Secvența de autocorelație este o secvență pozitiv semidefinită în sensul că pentru orice $\vec{a} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{N-1}]^T$ avem:

$$\vec{a}^T \vec{R}_X \vec{a} \geq 0 \quad \text{și} \quad \vec{a}^T \vec{C}_X \vec{a} \geq 0 \tag{A13.53}$$

matricile \vec{R}_X și \vec{C}_X având dimensiunile $N \times N$.

A13.4 Medii temporale și ergodicitatea proceselor aleatoare staționare discrete.

Dacă $x[n]$ este o realizare a unui proces aleator staționar $X[n]$, se poate defini o medie temporală a procesului pe N observații, $\mu_x(N)$:

$$\mu_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \quad (A13.54)$$

Avem:

$$E\{\mu_x(N)\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E\{x[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} E\{X[m]\} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mu_x = \mu_x \quad (A13.55)$$

și deci $\mu_x(N)$ este o estimare nedehonată a mediei statistice μ_x .

Se spune că procesul aleator staționar $X[m]$ este ergodic în medie dacă:

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_x(N) = \mu_x \quad (A13.56)$

și:

2. $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Disp}\{\mu_x(N)\} = 0 \quad (A13.57)$

Ergodicitatea în medie ne permite să estimăm media statistică, obținută pentru toată colecția de probe, cu o medie temporală a unei singure probe - (A13.54) - cu condiția ca numărul N de esantioane mediate să fie destul de mare.

Dacă $X[m]$ este un proces IID, 1) se realizează ca urmare a legii numerelor mari - relația (A10.1). În aceeași măsură condiția 2, cu $\text{Disp}\{x[m]\} = \text{Disp}\{X[m]\} = \sigma_x^2$

avem:

$$\text{Disp}\{\mu_x(N)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \text{Disp}\{x[m]\} = \frac{\sigma_x^2}{N} \quad (A13.58)$$

și deci

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Disp}\{\mu_x(N)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x^2}{N} = 0.$$

Vom considera acum un caz în care apare corelația între esantioane. Pentru

medierii alunecătoare (MA) din figura A13.5

$$X[m] = \frac{1}{2}U[m] + \frac{1}{2}U[m-1] \quad (A13.59)$$

$U[m]$ având esantioanele necorelate și

$$E\{U[m]\} = \mu; \text{Disp}\{U[m]\} = \sigma_U^2 \quad (A13.60)$$

Cum nu impunem repartiția gaussiană pentru $U[m]$ rezultă că necorelarea esantioanelor nu implică și independența statistică.

Avem:

$$E\{X[m]\} = \frac{1}{2}E\{U[m]\} + \frac{1}{2}E\{U[m-1]\} = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{2} = \mu. \quad (A13.60)$$

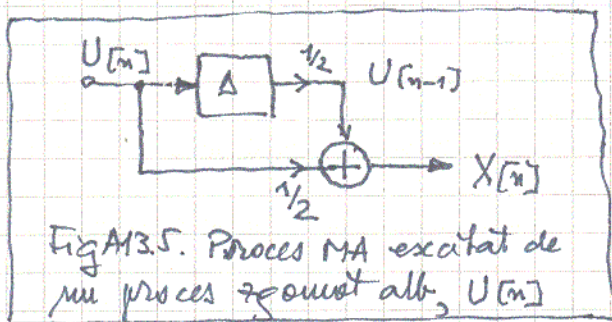
și deci

$$\mu_x(N) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m]$$

conduce la

$$E\{\mu_x(N)\} = \mu \quad (A13.61)$$

condiția 1). fiind independentă



Pentru a ne asigura că în condiția 2) se îndeplinesc, determinăm, mai întâi, elementul (i,j) din matricea de covarianță \vec{C}_x a procesului $X[n]$:

$$\begin{aligned}
[\vec{C}_x]_{ij} &= E \{ (X[i] - \mu)(X[j] - \mu) \} \\
&= E \left\{ \left(\frac{U[i] + U[i-1]}{2} - \mu \right) \left(\frac{U[j] + U[j-1]}{2} - \mu \right) \right\} \\
&= E \left\{ \frac{(U[i] - \mu) + (U[i-1] - \mu)}{2} \cdot \frac{(U[j] - \mu) + (U[j-1] - \mu)}{2} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \{ (\dot{U}[i] + \dot{U}[i-1])(\dot{U}[j] + \dot{U}[j-1]) \} \tag{A13.62} \\
&= \frac{1}{4} E \{ \dot{U}[i]\dot{U}[j] \} + \frac{1}{4} E \{ \dot{U}[i]\dot{U}[j-1] \} + \frac{1}{4} E \{ \dot{U}[i-1]\dot{U}[j] \} + \frac{1}{4} E \{ \dot{U}[i-1]\dot{U}[j-1] \}
\end{aligned}$$

cu \dot{U} fiind metoda variabilei centrată pe medie. Dar

$$E \{ U[m]U[k] \} = \begin{cases} \sigma_u^2 & ; m=k \\ 0 & ; m \neq k \end{cases} = \sigma_u^2 \delta[n-k] \tag{A13.63}$$

asa că (A13.62) conduce la:

$$[\vec{C}_x]_{ij} = \frac{1}{4} \sigma_u^2 (\delta[i-j] + \delta[i-j+1] + \delta[i-j-1] + \delta[i-j])$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4} \sigma_u^2 (1+1) = \frac{1}{2} \sigma_u^2 & ; i=j \\ \frac{1}{4} \sigma_u^2 (1) = \frac{1}{4} \sigma_u^2 & ; i-j=-1 \\ \frac{1}{4} \sigma_u^2 (1) = \frac{1}{4} \sigma_u^2 & ; i-j=1 \\ 0 & ; \text{în rest} \end{cases}$$

adică

$$[\vec{C}_x]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sigma_u^2 & ; i=j \\ \frac{1}{4} \sigma_u^2 & ; |i-j|=1 \\ 0 & ; \text{în rest} \end{cases} \tag{A13.64}$$

ceea conduce la

$$\vec{C}_x = \frac{\sigma_u^2}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{A13.65}$$

Dar

$$\begin{aligned}
\mu_x(N) &= \frac{1}{N} x[0] + \frac{1}{N} x[1] + \dots + \frac{1}{N} x[N-1] = \\
&= \frac{1}{N} [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \vec{1}^T \vec{x}
\end{aligned}$$

ni deci:

$$\begin{aligned}
 \text{Disp} \{ \mu_x(N) \} &= \frac{1}{N^2} \vec{1}^T \vec{C}_x \vec{1} \\
 &= \frac{\sigma^2}{4N^2} [1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\sigma^2}{4N^2} [3 \ \underbrace{4 \ 4 \ \dots \ 4 \ 4}_{N-2} \ 3] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\sigma^2}{4N^2} \cdot [6 + 4(N-2)] \\
 &= \frac{2N-1}{2N^2} \cdot \sigma_u^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

In consecinta este indeplinita n' conditia 2).

* *

(medii temporale a,

Vom prezenta o formula de calcul a dispersiei unui proces aleator stationar in sens larg (WSS). Mai intai ^{dam doua} formule de calcul ale unei sume duble:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} g[i-j] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|)g[k] \quad ; \quad \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-M}^M g[i-j] = \sum_{k=-2M}^{2M} (2M+1-|k|)g[k] \quad (A13.66); (A13.66)$$

Puteți verifica formulele. Pentru exemplificare o vom verifica pe prima, pentru N=3:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 g[i-j] &= \sum_{i=0}^2 (g[i] + g[i-1] + g[i-2]) \\
 &= g[0] + g[1] + g[2] \\
 &\quad + g[-1] + g[0] + g[1] \\
 &\quad + g[-2] + g[-1] + g[0] = \\
 &\quad \underline{g[-2] + 2g[-1] + 3g[0] + 2g[1] + g[2]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-2}^2 (3-|k|)g[k] &= (3-2)g[-2] + (3-1)g[-1] + 3g[0] + (3-1)g[1] + (3-2)g[2] \\
 &= g[-2] + 2g[-1] + 3g[0] + 2g[1] + g[2]
 \end{aligned}$$

Formula este verificata ratiu-un caz particular.

Apoi, pentru $\mu_x(N)$ avem

$$\begin{aligned}
 \text{Disp} \{ \mu_x(N) \} &= \text{Disp} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \right\} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Cov} \{ x[i], x[j] \} \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} [C_x]_{i,j} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (R_x[i-j] - \mu_x^2) \quad (A13.67)
 \end{aligned}$$

Se aplică acum formula (A13.66):

$$\text{Disp}\{\mu_{xc}(N)\} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|) (R_x[k] - \mu_x^2)$$

și folosind N ca factor:

$$\text{Disp}\{\mu_{xc}(N)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) (R_x[k] - \mu_x^2) \tag{A13.68}$$

Pentru îndeplinirea condiției 2) trebuie ca $R_x[k] - \mu_x^2$ să tindă la zero suficient de repede atunci când $k \rightarrow \infty$. Atunci procesul WSS este și ergodic în medie.

* *

A13.5 Densitatea spectrală de putere a proceselor WSS, în timp discret.

Considerăm procesul WSS $X[n]$ și transformata sa Fourier în timp discret, ca funcție de frecvență discretă f (adimensională)

$$F\{X[n]\}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{-j2\pi f n} \quad f = \frac{\text{frecvența în Hz}}{\text{frecvența de eșantionare în Hz}}$$

Un estimator al ^{repartizării} puterii în funcție de frecvență este

$$\hat{P}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2 \quad f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.69}$$

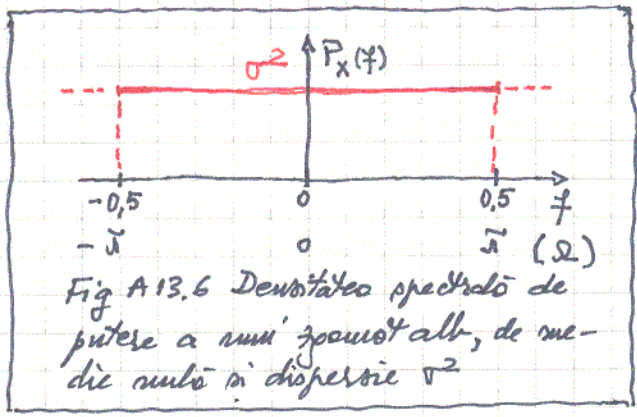
și poartă numele de "periodogramă". Ea prezintă fluctuații mari de la o realizare la realizare motiv pentru care se înlocuiește cu

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E \left\{ \left| \sum_{n=-M}^M X[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2 \right\}; \quad f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.70}$$

Dacă se integrează între două limite de frecvență se obține puterea procesului cuprinsă în banda respectivă

Vom calcula, pentru exemplificare, densitatea spectrală de putere a unui zgomot alb de medie nulă și dispersie σ^2 , având autocorelația $\sigma^2 \delta[k]$.

$$\begin{aligned} P_x(f) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E \left\{ \underbrace{\sum_{n=-M}^M X[n] e^{-j2\pi f n}}_z \cdot \underbrace{\sum_{m=-M}^M X[m] e^{+j2\pi f m}}_{z^* = |z|^2} \right\} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M E\{X[n]X[m]\} e^{-j2\pi f(n-m)} \\ &\quad R_x[n, m] = R_x[n-m] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M \sigma^2 \delta[n-m] e^{-j2\pi f(n-m)} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sigma e^0 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2M+1}{2M+1} \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$



Priin urmatoare pentru un zgomot alb cu
 $R_x[k] = C_x[k] = \sigma^2 \delta[k]$ (A13.71)
 avem densitatea spectrală de putere
 $P_x(f) = \sigma^2 ; f \in [-0,5, 0,5]$ (A13.72)
 și ea este o constantă, așa cum se arată
 și în figura A13.6.

Transformata Fourier a funcției de autocorelație (A13.71) este

$$F\{\sigma^2 \delta[k]\}(f) = \sigma^2 = P_x(f).$$

Cel puțin în cazul zgomotului alb rezultă că

$$R_x[k] = \sigma^2 \delta[k] \xleftrightarrow{F} P_x(f) = \sigma^2 \quad (A13.73)$$

Vom demonstra acum teorema Wiener-Hincin. Avem:

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M R_x[n-m] e^{j2\pi f(n-m)}$$

și aplicăm relația de însumare (A13.66) cu $g[n-m] = R_x[n-m] e^{-j2\pi f(n-m)}$

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-2M}^{2M} [(2M-1) - |k|] R_x[k] e^{-j2\pi f k}$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|k|}{2M-1}\right) R_x[k] e^{-j2\pi f k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] e^{-j2\pi f k} = F\{R_x[k]\}(f)$$

Funcția de autocorelație $R_x[k]$ și densitatea spectrală de putere $S_x(f)$ sunt perechi Fourier:

$$R_x[k] \xleftrightarrow{F} S_x(f) \quad (A13.74)$$

(Wiener-Hincin).

Pentru exemplificare considerăm procesul autoregresiv (AR) cu funcția de autocorelație (A13.47):

$$R_x[k] = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^{|k|} = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^k \delta[k] + \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^{-k} \delta[-k-1]$$

$\delta[k]$ fiind treapta unitară în timp discret. Avem perechi Fourier:

$$a^k \delta[k] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-a e^{-j2\pi f}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^k \delta[-k-1] \xleftrightarrow{F} \frac{-1}{1 - \frac{1}{a} e^{-j2\pi f}} = \frac{a e^{j2\pi f}}{1 - a e^{j2\pi f}}$$

și deci:

$$\frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^{|k|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} \left(\frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}} + \frac{ae^{j2\pi f}}{1-ae^{j2\pi f}} \right); f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Prin urmare:

$$S_X(f) = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} \frac{1-ae^{j2\pi f} + ae^{j2\pi f} - a^2}{\underbrace{(1-ae^{-j2\pi f})}_z \underbrace{(1-ae^{j2\pi f})}_{z^*}} = \frac{\sigma_u^2}{|1-ae^{j2\pi f}|^2}; f \in [-0,5, 0,9] \quad (A13.75)$$

sau:

$$S_X(f) = \frac{\sigma_u^2}{|1-a\cos 2\pi f - j\sin 2\pi f|^2} = \frac{\sigma_u^2}{(1-a\cos 2\pi f)^2 + a^2 \sin^2 2\pi f}$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{1+a^2-2a\cos 2\pi f}; f \in [-0,5, 0,5]$$

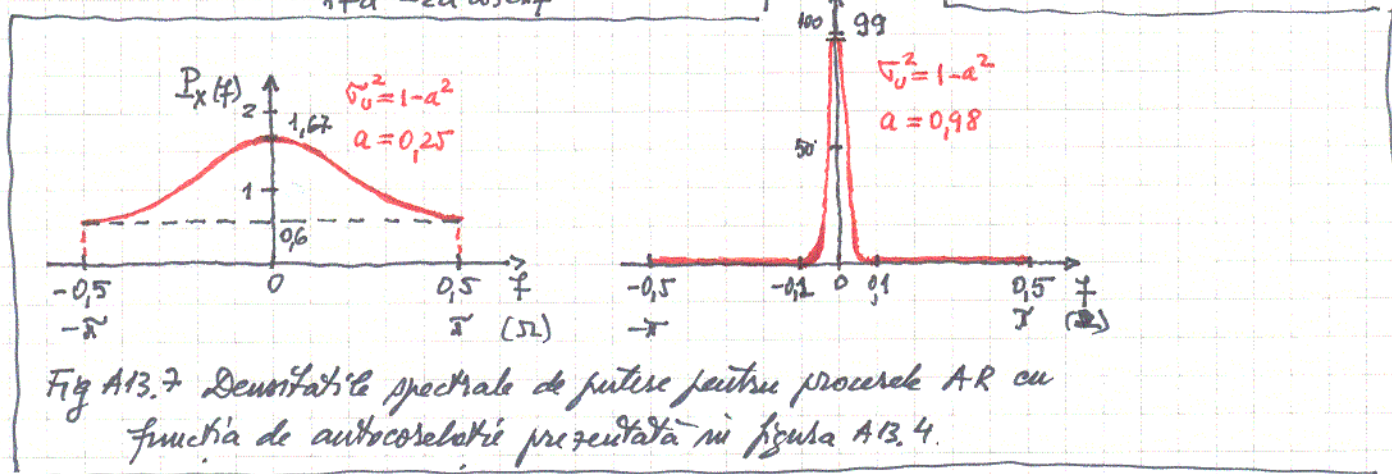


Fig A13.7 Densitatea spectrala de putere pentru procese AR cu functia de autocorelatie prezentata in figura A13.4.

Vom da cateva proprietati ale densitatii spectrale de putere.

1. Densitatea spectrala de putere, PSD (power spectral density), este o functie reala.

Aveam:

$$P_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] (\cos 2\pi f k - j \sin 2\pi f k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] \cos 2\pi f k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] \sin 2\pi f k$$

termeni impari

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] \cos 2\pi f k \in \mathbb{R} \quad (A13.76)$$

2. PSD nu poate fi negativa

$$P_X(f) \geq 0 \quad (A13.77)$$

ceea ce revede din relatia de definitie, (A13.70).

3. PSD este o functie pară de frecventa f

$$P_X(-f) = P_X(f) \quad (A13.78)$$

fapt ce se deduce din paritatea functiei $R_X[k]$ si din relatia (A13.76).

4. PSD este o functie periodica cu frecventa (normalata) f, avand perioada 1:

$$P_X(f+1) = P_X(f) \tag{A13.79}$$

Proprietatea se poate verifica direct punând $f+1$ în (A13.76).

5. Secvența de autocorelații se poate determina din $P_X(f)$ utilizând transformarea Fourier inversă, în timp discret:

$$R_X[k] = \int_{-0.5}^{0.5} P_X(f) e^{j2\pi f k} df = \int_{-0.5}^{0.5} P_X(f) \cos 2\pi f k df \tag{A13.80}$$

6. Puterea medie cuprinsă în banda de frecvențe f_1, f_2 - vezi în figura A13.8 - este

$$P_{\text{medie}}[f_1, f_2] = \int_{-f_2}^{-f_1} P_X(f) df + \int_{f_1}^{f_2} P_X(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} P_X(f) df \tag{A13.81}$$

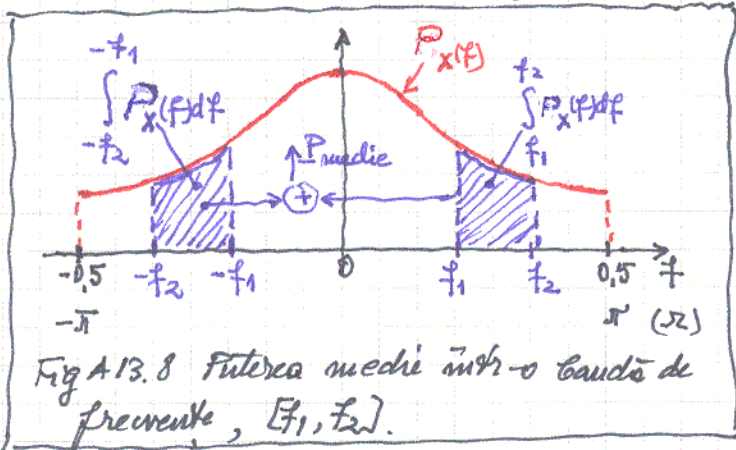


Fig A13.8 Puterea medie într-o bandă de frecvențe, $[f_1, f_2]$.

În plus, dacă punem $k=0$ în relația (A13.80) obținem că

$$P_X = R_X[0] = \int_{-0.5}^{0.5} P_X(f) df = 2 \int_0^{0.5} P_X(f) df \tag{A13.82}$$

A13.6. Estimarea secvenței de autocorelații în a densității spectrale de putere pentru un proces aleator staționar în sens larg și ergodic în medie.

Dacă procesul aleator este staționar în sens larg și este și ergodic în medie, atunci media temporală a unei realități $\mu_x(N)$ converge spre media statistică, μ_x , atunci când numărul de eșantioane mediate tinde spre infinit. Ne vom ocupa acum de estimarea autocorelației pentru o deflașoare cu k_0 a eșantioanelor, ca medie statistică:

$$R_X[k_0] = E\{X[n]X[n+k_0]\}$$

Dacă notăm $Y[n] = X[n]X[n+k_0]$, observăm că

$$R_X[k_0] = E\{Y[n]\}$$

deci media statistică a procesului $Y[n]$. Această observație ne sugerează să folosim realitatea $x[n]$ și să construim o realitate a lui $y[n]$

$$y[n] = x[n]x[n+k_0]$$

În afară să utilizăm medierea temporală pentru a obține media statistică. Așadar deci pentru $\hat{R}_X[k_0]$, estimatul lui $R_X[k]$ expresia:

$$\hat{R}_X[k_0] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] x[m+k_0] \quad (A13.83)$$

Deoarece știm că $R_X[-k] = R_X[k]$, vom face calculele doar pentru $k \geq 0$. Seruptele care se înmulțesc sunt, pentru $k_0 = 2$ de exemplu

$$\begin{array}{cccccccc} & x[0] & x[1] & x[2] & \dots & x[N-4] & x[N-3] & x[N-2] & x[N-1] \\ x[0] & x[1] & x[2] & x[3] & x[4] & & & & \\ & & & & & x[N-2] & x[N-1] & & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} : x[m] \\ \\ \\ : x[m+2] \end{array}$$

Se vede că, deoarece avem doar N esanțioane la dispoziție este marcată o limită în numărul

$$\begin{array}{l} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \begin{array}{l} 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 \leq m+k_0 \leq N-1 \end{array}$$

de unde

$$0 \leq m \leq N-1-k_0$$

Evident că în sumă sunt nu N termeni ci $N-k_0$ termeni așa că media se obține cu factorul $\frac{1}{N-k_0}$ și nu $\frac{1}{N}$.

Pentru k_0 oarecare, notat deci cu k , estimatorul autocorelației devine:

$$\hat{R}_X[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{m=0}^{N-1-k} x[m] x[m+k]; \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (A13.84)$$

Vom exemplifica pentru $N=5$, esanțioanele la dispoziție fiind ni ele în număr de 5, $\{x[0], x[1], x[2], x[3], x[4]\}$. Avem:

$$\hat{R}_X[0] = \frac{1}{5} (x^2[0] + x^2[1] + x^2[2] + x^2[3] + x^2[4]) \quad (5 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[1] = \frac{1}{4} (x[0]x[1] + x[1]x[2] + x[2]x[3] + x[3]x[4]) \quad (4 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[2] = \frac{1}{3} (x[0]x[2] + x[1]x[3] + x[2]x[4]) \quad (3 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[3] = \frac{1}{2} (x[0]x[3] + x[1]x[4]) \quad (2 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[4] = x[0]x[4] \quad (1 \text{ termen})$$

Pe măsură ce k crește sunt tot mai puțini termeni în sumă deci efectul de mediere este tot mai slab. Pentru $k > N-1$ nici nu se poate pune problema estimării autocorelației.

Estimatorul (A13.84) este unul nedegradat (fără eroare sistematică):

$$E\{\hat{R}_X[k]\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{x[n]x[n+k]\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{X[n]X[n+k]\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} R_X[k]$$

adică :

$$E\{\hat{R}_X[k]\} = R_X[k] \tag{A13.85}$$

Pentru ca procesul $X[m]$, ergodic în medie, să fie ergodic în autocorelație este necesar ca

$$1. \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{R}_X[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-k} \sum_{m=0}^{N-1-k} x[m]x[m+k] = R_X[k]; k=0,1,2,\dots \tag{A13.86}$$

$$2. \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Disp}\{\hat{R}_X[k]\} = 0 ; k=0,1,2,\dots \tag{A13.87}$$

Pentru a estima deunitatea spectrală de putere este necesar să avem înregistrări suficiente de lungi (N să fie mare). Pentru a obține un efect de mediere necesită de N esantioane $\{x_0, x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$ se împarte în I blocuri de lungime L, adiacente:

$$\{ \underbrace{\{x_0, x[1], \dots, x[L-1]\}}_{\text{blocul 0}}, \underbrace{\{x[L], x[L+1], \dots, x[2L-1]\}}_{\text{blocul 1}}, \dots, \underbrace{\{x[(I-1)L], x[(I-1)L+1], \dots, x[N-1]\}}_{\text{blocul I-1}} \}$$

Se produce următoarea :

$$\{ \underbrace{\{y_0[0], y_0[1], \dots, y_0[L-1]\}}_{\text{blocul 0}}, \underbrace{\{y_1[0], y_1[1], \dots, y_1[L-1]\}}_{\text{blocul 1}}, \dots, \underbrace{\{y_{I-1}[0], y_{I-1}[1], \dots, y_{I-1}[L-1]\}}_{\text{blocul I}} \}$$

$$y_i[m] = x[m + iL] ; m=0,1,\dots,L-1 ; i=0,1,\dots,I-1 \tag{A13.88}$$

Pentru fiecare bloc de date, de lungime L, se calculează o periodogramă :

$$\hat{P}_X^{(i)}(f) = \frac{1}{L} \left| \sum_{m=0}^{L-1} y_i[m] e^{-j2\pi f m} \right|^2, f \in [-0,5, 0,5] ; i=0,1,\dots,I-1 \tag{A13.89}$$

Se mediază apoi cele I periodograme, la fiecare frecvență :

$$\hat{P}_{Xav}(f) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \hat{P}_X^{(i)}(f) \tag{A13.90}$$

obținându-se o periodogramă mediază. Atunci când $N \rightarrow \infty$ și deodată și $I \rightarrow \infty$ și $L \rightarrow \infty$, avem

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (I, L \rightarrow \infty)}} \hat{P}_{Xav}(f) = P_X(f) \tag{A13.91}$$

Pentru calcul se poate aplica algoritmul FFT, APM e exemplu pe 1024 de puncte la frecvențele

$$f = -0,5 + k \frac{1}{1024} ; k=0,1,2,\dots,1023 \tag{A13.92}$$

A13.7 Procese aleatoare discrete filtrate.

Frecerea unui proces staționar în peus larg, WSS, printr-un sistem liniar se numește filtrare. Dacă răspunsul la impuls al sistemului este $h[n]$ răspunsul său în frecvență are forma:

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi f n} ; f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.93}$$

și poate fi dedus din particularizarea transformatei Z, $\mathcal{H}(z)$, pe axa unitară

$$H(f) = \mathcal{H}(e^{j2\pi f}) ; f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.94}$$

Dacă la intrarea unui sistem liniar și invariant în timp, $h[n]$, se aplică un proces aleator staționar în peus larg, $U[n]$, cu media μ_U și funcția de autocorelație $R_U[k]$, atunci procesul $X[n]$ de la ieșirea sistemului

$$X[n] = h[n] * U[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] U[n-k] \tag{A13.95}$$

este și el staționar în peus larg și:

$$\mu_X = \mu_U H(0) = \mu_U \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \tag{A13.96}$$

$$R_X[k] = h[-k] * h[k] * R_U[k] \tag{A13.97}$$

$$P_X(f) = |H(f)|^2 P_U(f) \tag{A13.98}$$

Demonstrarea celor trei relații (A13.96) + (A13.98) este simplă.

1. $E\{X[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] E\{U[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \mu_U = \mu_U \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = \mu_U H(0)$

2. $E\{X[n]X[n+k]\} = E\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] U[n-i] \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j] U[n+k-j] \right\}$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[i] h[j] E\{U[n-i]U[n+k-j]\}$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[i] h[j] R_U[k+i-j]$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j] R_U[(k+i)-j]$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] (h * R_U)(k+i) = h[-k] * h[k] * R_U[k]$

3. Se aplică relației (A13.97) transformarea Fourier în timp discret.

Avem:

$$h[k] \xleftrightarrow{F} H(\omega)$$

$$h[-k] \xleftrightarrow{F} H(-\omega) = H^*(\omega)$$

$$R_u[k] \xleftrightarrow{F} S_u(\omega)$$

$$R_x[k] \xleftrightarrow{F} S_x(\omega)$$

și deci, din (A13.97):

$$R_x[k] = H^*(\omega) H(\omega) S_u(\omega) = |H(\omega)|^2 S_u(\omega).$$

A13.8. Procese aleatoare mutual staționare (în sens larg).

Vom extinde noțiunea de staționare în sens larg de la un proces la două procese aleatoare. Fie ca $X[n]$ și $Y[n]$ sunt, fiecare, WSS, adică

$$\begin{cases} \mu_X[n] = E\{X[n]\} = \mu_X = \text{cst} & (A13.99) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} & (A13.100) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_Y[n] = E\{Y[n]\} = \mu_Y = \text{cst} & (A13.101) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_Y[k] = E\{Y[n]Y[n+k]\} & (A13.102) \end{cases}$$

Formăm procesul aleator sumă $Z[n] = X[n] + Y[n]$ și ne interesează valorile medii a procesului $Z[n]$:

$$\begin{aligned} E\{Z^2[n]\} &= E\{X^2[n]\} + E\{X[n]Y[n]\} + E\{Y[n]X[n]\} + E\{Y^2[n]\} \\ &= R_X[0] + 2E\{X[n]Y[n]\} + R_Y[0] \end{aligned}$$

Avem nevoie deci să cunoaștem momentul mutual $E\{X[n]Y[n]\}$. Dacă am dori să determinăm autocorelația procesului sumă, $E\{Z[n]Z[n+k]\}$ am avea nevoie de termeni momente mutuale de forma $E\{X[n]Y[n+k]\}$. Dacă momentul $E\{X[n]Y[n+k]\}$ nu depinde de n ci numai de deplasarea k a esantionelor, definim secvența de intercorelație a celor două procese aleatoare sub forma:

$$R_{X,Y}[k] = E\{X[n]Y[n+k]\}; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (13.103)$$

În aceste condiții,

$$E\{Z^2[n]\} = R_X[0] + 2R_{X,Y}[0] + R_Y[0].$$

Dacă procesele aleatoare WSS, $X[n]$ și $Y[n]$ au secvența de intercorelație $E\{X[n]Y[n+k]\}$ dependentă numai de k , nu și de n , ele sunt mutual staționare, în sens larg.

Intercorelația (cross-correlation) sau corelația mutuală are câteva proprietăți remarcabile:

1) Ea nu este, în general, simetrică adică

$$R_{X,Y}[-k] \neq R_{Y,X}[k] \tag{A13.104}$$

2) Maximul intercorelației nu apare, în general, în origine

3) Maximul intercorelației este mărginit de produsul abaterilor standard ale celor două procese, adică:

$$|R_{XY}[k]| \leq \sqrt{R_X[0] R_Y[0]} \tag{A13.105}$$

Avem

$$E\{(aX[n] \pm Y[n+k])^2\} \geq 0, \forall a$$

sau

$$a^2 E\{X^2[n]\} + E\{Y^2[n+k]\} \pm 2a E\{X[n]Y[n+k]\} \geq 0$$

$$a^2 R_X[0] \pm 2a R_{XY}[k] + R_Y[0] \geq 0, \forall a$$

expresie ce trebuie deci să aibă discriminantul $\Delta \leq 0$ adică:

$$4 R_{XY}^2[k] - 4 R_X[0] R_Y[0] \leq 0$$

din care rezultă relația (A13.105).

4) Avem o relație de simetrie dacă comutăm procesele:

$$R_{X,Y}[-k] = R_{Y,X}[k] \tag{A13.106}$$

Avem

$$\begin{aligned} R_{Y,X}[k] &= E\{Y[n]X[n+k]\} = E\{X[n]Y[n-k]\} \\ &= R_{X,Y}[-k]. \end{aligned}$$

Doi procese aleatoare $X[n]$ și $Y[n]$, ambele WSS și mutual WSS, de medie nulă, sunt necorelate dacă:

$$R_{X,Y}[k] \equiv 0, \forall k \tag{A13.107}$$

Dezintata interspectrală de putere.

Putem defini dezintata interspectrală de putere (sau dezintata spectrală mutuală de putere - Cross-Power Spectral Density) a două procese WSS și mutual WSS, $X[n]$ și $Y[n]$ prin:

$$P_{XY}(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E\left\{ \left[\sum_{n=-M}^M X[n] e^{-j2\pi f n} \right]^* \left[\sum_{n=-M}^M Y[n] e^{j2\pi f n} \right] \right\} \tag{A13.108}$$

Vom continua cu enumerarea proprietăților:

5). $R_{X,Y}[k]$ și $P_{X,Y}(f)$ formază o pereche Fourier

$$R_{X,Y}[k] \xleftrightarrow{F} P_{X,Y}(f)$$

$$P_{X,Y}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{X,Y}[k] e^{-j2\pi f k} \quad ; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.109)$$

6). Secvența de autocorelație are o simetrie hermitică:

$$P_{X,Y}(f) = P_{X,Y}^*(f) \quad ; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.110)$$

7). Secvența de autocorelație este mărginită superior:

$$|P_{X,Y}(f)| \leq \sqrt{P_X(f)P_Y(f)} \quad ; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.111)$$

8). Pentru procesele de medie nulă și necorelate mutual

$$P_{X,Y}(f) \equiv 0 \quad \forall f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.112)$$

9). Avem, schimbând necunoscutele proceselor

$$P_{X,Y}(f) = P_{Y,X}^*(f) \quad (A13.113)$$

Observație. Există procese aleatoare staționare în sens larg dar care nu sunt și mutual staționare. Fie $X[n] = A$ și $Y[n] = (-1)^n A$, unde A este o variabilă aleatoare de medie nulă, $\mu_A = 0$ și varianță unitară, $\sigma_A^2 = 1$.

Avem $E\{X[n]\} = 0$ și $E\{Y[n]\} = 0$.

$$R_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} = E\{A^2\} = \sigma_A^2 = 1.$$

$$R_Y[k] = E\{Y[n]Y[n+k]\} = E\{(-1)^n A (-1)^{n+k} A\} = (-1)^k \sigma_A^2 = (-1)^k.$$

ambele independente de n . Procesele sunt WSS.

Calculăm acum:

$$E\{X[n]Y[n+k]\} = E\{A (-1)^{n+k} A\} = (-1)^{n+k} \sigma_A^2 = (-1)^{n+k}$$

și este, evident, dependentă nu numai de k ci și de n . Prin urmare cele două procese deși sunt fiecare, în parte, WSS, nu sunt și mutual WSS.

Estimarea perecheilor de autocorelație pentru procesele $X[n]$ și $Y[n]$ definite pentru $n = 0, 1, \dots, N-1$ se face cu:

$$\hat{R}_{X,Y}[k] = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]y[n+k] & ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \\ \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=|k|}^{N-1} x[n]y[n+k] & ; \quad k = -M, -(M-1), \dots, -1 \end{cases} \quad (A13.114)$$

În relația $M \leq N-1$, considerând că $R_{X,Y}[k] \cong 0$ pentru $k > M$. În practică se face o determinare preliminară pentru a localiza maximum secvenței de autocorelații, apoi secvențele de date se deplasează corespunzător pentru ca maximum autocorelației să apară la $k=0$ și se procedează la calculare. Această procedură este cunoscută sub numele de "alinare temporală" (time alignment).

Vom da un exemplu de aplicare a relației (A13.114) pentru $N=4$:

$\{x[0], x[1], x[2], x[3]\}$ $\{y[0], y[1], y[2], y[3]\}$. Pentru k nelimitat la $M=2$, $|k| \leq M=2$, deoarece în rest $\hat{R}_{X,Y}[k] \cong 0$:

$$\hat{R}_{X,Y}[-2] = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^3 x[n]y[n-2] = \frac{1}{2} (x[2]y[0] + x[3]y[1])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[-1] = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 x[n]y[n-1] = \frac{1}{3} (x[1]y[0] + x[2]y[1] + x[3]y[2])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[0] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n]y[n] = \frac{1}{4} (x[0]y[0] + x[1]y[1] + x[2]y[2] + x[3]y[3])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[1] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 x[n]y[n+1] = \frac{1}{3} (x[0]y[1] + x[1]y[2] + x[2]y[3])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[2] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 x[n]y[n+2] = \frac{1}{2} (x[0]y[2] + x[1]y[3])$$

A13.8 Procese gaussiene în timp discret.

Un proces aleator discret este gaussian dacă orice mulțime finită de eșantioane din acel proces are o repartiție gaussiană multivariată de forma dată în relația (A9.6), pe care o reluăm aici:

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\vec{C}_X|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu}_X)^T \vec{C}_X^{-1} (\vec{x} - \mu_X) \right\} \tag{A13.115}$$

în care: $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$, $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$,

$\vec{\mu}_X = [E\{X_1\} \ E\{X_2\} \ \dots \ E\{X_N\}]^T = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N]^T$

$$\vec{C}_X = \begin{bmatrix} \text{Disp}\{X_1\} & \text{Cov}\{X_1, X_2\} & \text{Cov}\{X_1, X_3\} & \dots & \text{Cov}\{X_1, X_N\} \\ \text{Cov}\{X_2, X_1\} & \text{Disp}\{X_2\} & \text{Cov}\{X_2, X_3\} & \dots & \text{Cov}\{X_2, X_N\} \\ \text{Cov}\{X_3, X_1\} & \text{Cov}\{X_3, X_2\} & \text{Disp}\{X_3\} & \dots & \text{Cov}\{X_3, X_N\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}\{X_N, X_1\} & \text{Cov}\{X_N, X_2\} & \text{Cov}\{X_N, X_3\} & \dots & \text{Disp}\{X_N\} \end{bmatrix} \tag{A13.116}$$

Se aplică acum formula (A13.66):

$$\text{Disp} \{ \mu_{xc}(N) \} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|) (R_x[k] - \mu_x^2)$$

și folosind N ca factor:

$$\text{Disp} \{ \mu_{xc}(N) \} = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) (R_x[k] - \mu_x^2) \tag{A13.68}$$

Pentru îndeplinirea condiției 2) trebuie ca $R_x[k] - \mu_x^2$ să tindă la zero suficient de repede atunci când $k \rightarrow \infty$. Atunci procesul WSS este și ergodic în medie.

* *

A13.5 Densitatea spectrală de putere a proceselor WSS, în timp discret.

Considerăm procesul WSS $X[n]$ și transformata sa Fourier în timp discret, ca funcție de frecvență discretă f (adimensională)

$$F \{ X[n] \} (f) = \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{-j2\pi f m} \quad f = \frac{\text{frecvența în Hz}}{\text{frecvența de eșantionare în Hz}}$$

Un estimator al ^{repartizării} puterii în funcție de frecvență este

$$\hat{P}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{-j2\pi f m} \right|^2 \quad f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.69}$$

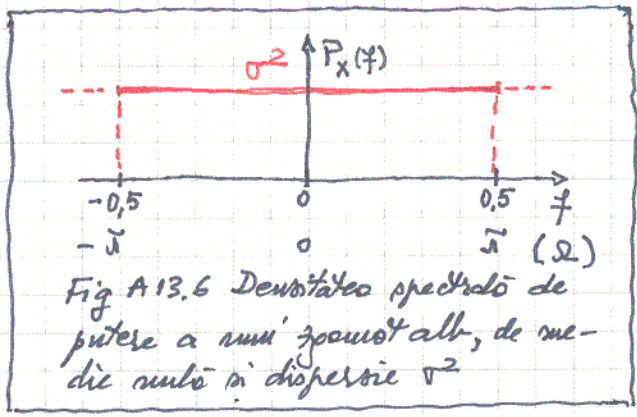
și poartă numele de "periodogramă". Ea prezintă fluctuații mari de la o realizare la realizare motiv pentru care se înlocuiește cu

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E \left\{ \left| \sum_{m=-M}^M X[m] e^{-j2\pi f m} \right|^2 \right\}; \quad f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.70}$$

Dacă se integrează între două limite de frecvență se obține puterea procesului cuprinsă în banda respectivă

Vom calcula, pentru exemplificare, densitatea spectrală de putere a unui zgomot alb de medie nulă și dispersie σ^2 , având autocorelația $\sigma^2 \delta[k]$.

$$\begin{aligned} P_x(f) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E \left\{ \underbrace{\sum_{m=-M}^M X[m] e^{-j2\pi f m}}_z \cdot \underbrace{\sum_{m=-M}^M X[m] e^{+j2\pi f m}}_{z^*} \right\} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M E \{ X[m] X[n] \} e^{-j2\pi f (n-m)} \\ &\quad R_x[n, m] = R_x[n-m] \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-M}^M \sigma^2 \delta[n-m] e^{-j2\pi f (n-m)} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sigma e^0 = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2M+1}{2M+1} \sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$



Priin urmatoare pentru un zgomot alb cu $R_x[k] = C_x[k] = \sigma^2 \delta[k]$ (A13.71)

avem densitatea spectrală de putere

$$P_x(f) = \sigma^2; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.72)$$

și ea este o constantă, așa cum se arată și în figura A13.6.

Transformata Fourier a funcției de autocorelație (A13.71) este

$$F\{\sigma^2 \delta[k]\}(f) = \sigma^2 = P_x(f).$$

Cel puțin în cazul zgomotului alb rezultă că

$$R_x[k] = \sigma^2 \delta[k] \xleftrightarrow{F} P_x(f) = \sigma^2 \quad (A13.73)$$

Vom demonstra acum teorema Wiener-Hincin. Avem:

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M R_x[n-m] e^{j2\pi f(n-m)}$$

și aplicăm relația de însumare (A13.66) cu $g[n-m] = R_x[n-m] e^{-j2\pi f(n-m)}$

$$P_x(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-2M}^{2M} [(2M-1) - |k|] R_x[k] e^{-j2\pi f k}$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|k|}{2M-1}\right) R_x[k] e^{-j2\pi f k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x[k] e^{-j2\pi f k} = F\{R_x[k]\}(f)$$

Funcția de autocorelație $R_x[k]$ și densitatea spectrală de putere $S_x(f)$ sunt perechi Fourier:

$$R_x[k] \xleftrightarrow{F} S_x(f) \quad (A13.74)$$

(Wiener-Hincin).

Pentru exemplificare considerăm procesul autoregresiv (AR) cu funcția de autocorelație (A13.47):

$$R_x[k] = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^{|k|} = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^k \delta[k] + \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^{-k} \delta[-k-1]$$

$\delta[k]$ fiind funcția unitară în timp discret. Avem perechi Fourier:

$$a^k \delta[k] \xleftrightarrow{F} \frac{1}{1-a e^{-j2\pi f}}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^k \delta[-k-1] \xleftrightarrow{F} \frac{-1}{1 - \frac{1}{a} e^{-j2\pi f}} = \frac{a e^{j2\pi f}}{1 - a e^{j2\pi f}}$$

și deci:

$$\frac{\sigma_u^2}{1-a^2} a^{|k|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} \left(\frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}} + \frac{ae^{j2\pi f}}{1-ae^{j2\pi f}} \right); f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Prin urmare:

$$S_X(f) = \frac{\sigma_u^2}{1-a^2} \frac{1-ae^{j2\pi f} + ae^{j2\pi f} - a^2}{\underbrace{(1-ae^{-j2\pi f})}_z \underbrace{(1-ae^{j2\pi f})}_{z^*}} = \frac{\sigma_u^2}{|1-ae^{j2\pi f}|^2}; f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.75)$$

sau:

$$S_X(f) = \frac{\sigma_u^2}{|1-a\cos 2\pi f - j\sin 2\pi f|^2} = \frac{\sigma_u^2}{(1-a\cos 2\pi f)^2 + a^2 \sin^2 2\pi f}$$

$$= \frac{\sigma_u^2}{1+a^2-2a\cos 2\pi f}; f \in [-0,5, 0,5]$$

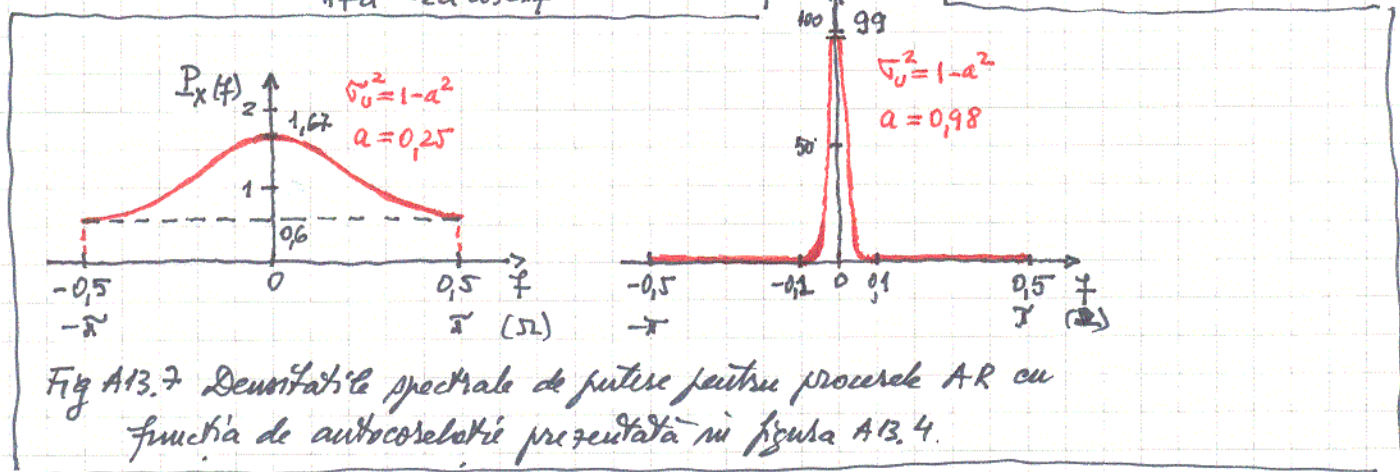


Fig A13.7 Densitatea spectrala de putere pentru procese AR cu functia de autocorelatie prezentata in figura A13.4.

Vom da cateva proprietati ale densitatii spectrale de putere.

1. Densitatea spectrala de putere, PSD (power spectral density), este o functie reala.

Aveam:

$$P_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] (\cos 2\pi f k - j \sin 2\pi f k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] \cos 2\pi f k - j \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] \sin 2\pi f k$$

termeni impari

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_X[k] \cos 2\pi f k \in \mathbb{R} \quad (A13.76)$$

2. PSD nu poate fi negativa

$$P_X(f) \geq 0 \quad (A13.77)$$

ceea ce redevine din relatia de definitie, (A13.70).

3. PSD este o functie pară de frecventa f

$$P_X(-f) = P_X(f) \quad (A13.78)$$

fapt ce se deduce din paritatea functiei $R_X[k]$ si din relatia (A13.76).

4. PSD este o functie periodica cu frecventa (normalata) f, avand perioada 1:

$$P_X(f+1) = P_X(f) \tag{A13.79}$$

Proprietatea se poate verifica direct punând $f+1$ în (A13.76).

5. Secvența de autocorelații se poate determina din $P_X(f)$ utilizând transformarea Fourier inversă, în timp discret:

$$R_X[k] = \int_{-0.5}^{0.5} P_X(f) e^{j2\pi f k} df = \int_{-0.5}^{0.5} P_X(f) \cos 2\pi f k df \tag{A13.80}$$

6. Puterea medie cuprinsă în banda de frecvențe f_1, f_2 - vezi în figura A13.8 - este

$$P_{\text{medie}}[f_1, f_2] = \int_{-f_2}^{-f_1} P_X(f) df + \int_{f_1}^{f_2} P_X(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} P_X(f) df \tag{A13.81}$$

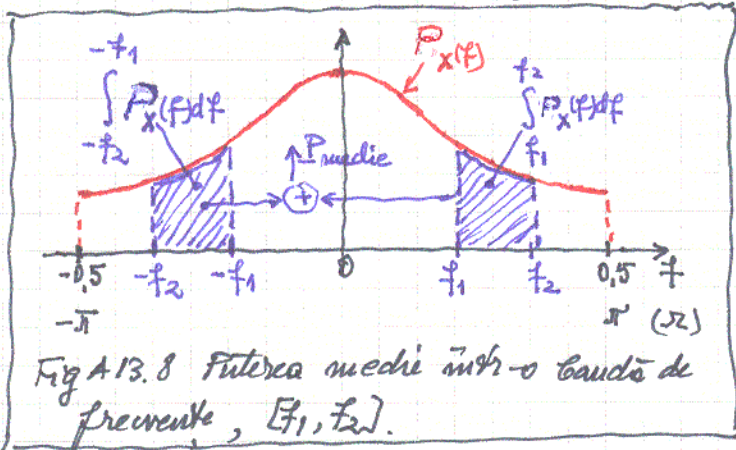


Fig A13.8 Puterea medie într-o bandă de frecvențe, $[f_1, f_2]$.

În plus, dacă punem $k=0$ în relația (A13.80) obținem că

$$P_X = R_X[0] = \int_{-0.5}^{0.5} P_X(f) df = 2 \int_0^{0.5} P_X(f) df \tag{A13.82}$$

A13.6. Estimarea secvenței de autocorelații în a densității spectrale de putere pentru un proces aleator staționar în sens larg și ergodic în medie.

Dacă procesul aleator este staționar în sens larg și este și ergodic în medie, atunci media temporală a unei realități $\mu_x(N)$ converge spre media statistică, μ_x , atunci când numărul de eșantioane mediate tinde spre infinit. Ne vom ocupa acum de estimarea autocorelației pentru o deflașoare cu k_0 a eșantioanelor, ca medie statistică:

$$R_X[k_0] = E\{X[n]X[n+k_0]\}$$

Dacă notăm $Y[n] = X[n]X[n+k_0]$, observăm că

$$R_X[k_0] = E\{Y[n]\}$$

deci media statistică a procesului $Y[n]$. Această observație ne sugerează să folosim realitatea $x[n]$ și să construim o realitate a lui $y[n]$

$$y[n] = x[n]x[n+k_0]$$

În afară să utilizăm medierea temporală pentru a obține media statistică. Așadar deci pentru $\hat{R}_X[k_0]$, estimatul lui $R_X[k]$ expresia:

$$\hat{R}_X[k_0] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[m] x[m+k_0] \quad (A13.83)$$

Deoarece știm că $R_X[-k] = R_X[k]$, vom face calculele doar pentru $k \geq 0$. Seruptele care se înmulțesc sunt, pentru $k_0 = 2$ de exemplu

$$\begin{array}{cccccccc} & x[0] & x[1] & x[2] & \dots & x[N-4] & x[N-3] & x[N-2] & x[N-1] \\ x[0] & x[1] & x[2] & x[3] & x[4] & & & & \\ & & & & & x[N-2] & x[N-1] & & \end{array} \begin{array}{l} : x[m] \\ : x[m+2] \end{array}$$

Se vede că, deoarece avem doar N esanțioane la dispoziție este marcată o limită în numărul

$$\begin{array}{l} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \begin{array}{l} 0 \leq m \leq N-1 \\ 0 \leq m+k_0 \leq N-1 \end{array}$$

de unde

$$0 \leq m \leq N-1-k_0$$

Evident că în sumă sunt nu N termeni ci $N-k_0$ termeni așa că media se obține cu factorul $\frac{1}{N-k_0}$ și nu $\frac{1}{N}$.

Pentru k_0 oarecare, notat deci cu k , estimatorul autocorelației devine:

$$\hat{R}_X[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{m=0}^{N-1-k} x[m] x[m+k]; \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (A13.84)$$

Vom exemplifica pentru $N=5$, esanțioanele la dispoziție fiind ni ele în număr de 5, $\{x[0], x[1], x[2], x[3], x[4]\}$. Avem:

$$\hat{R}_X[0] = \frac{1}{5} (x^2[0] + x^2[1] + x^2[2] + x^2[3] + x^2[4]) \quad (5 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[1] = \frac{1}{4} (x[0]x[1] + x[1]x[2] + x[2]x[3] + x[3]x[4]) \quad (4 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[2] = \frac{1}{3} (x[0]x[2] + x[1]x[3] + x[2]x[4]) \quad (3 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[3] = \frac{1}{2} (x[0]x[3] + x[1]x[4]) \quad (2 \text{ termeni în sumă})$$

$$\hat{R}_X[4] = x[0]x[4] \quad (1 \text{ termen})$$

Pe măsură ce k crește sunt tot mai puțini termeni în sumă deci efectul de mediere este tot mai slab. Pentru $k > N-1$ nici nu se poate pune problema estimării autocorelației.

Estimatorul (A13.84) este unul nedegradat (fără eroare sistematică):

$$E\{\hat{R}_X[k]\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{x[n]x[n+k]\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} E\{X[n]X[n+k]\} = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} R_X[k]$$

adică :

$$E\{\hat{R}_X[k]\} = R_X[k] \tag{A13.85}$$

Pentru ca procesul $X[m]$, ergodic în medie, să fie ergodic în autocorelație este necesar ca

$$1. \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{R}_X[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-k} \sum_{m=0}^{N-1-k} x[m]x[m+k] = R_X[k]; \quad k=0,1,2,\dots \tag{A13.86}$$

$$2. \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Disp}\{\hat{R}_X[k]\} = 0 \quad ; \quad k=0,1,2,\dots \tag{A13.87}$$

Pentru a estima deunitatea spectrală de putere este necesar să avem înregistrări suficiente de lungi (N să fie mare). Pentru a obține un efect de mediere se vor lua de N esantioane $\{x_0, x[1], x[2], \dots, x[N-1]\}$ se împarte în I blocuri de lungime L, adiacente:

$$\{ \underbrace{\{x_0, x[1], \dots, x[L-1]\}}_{\text{blocul 0}}, \underbrace{\{x[L], x[L+1], \dots, x[2L-1]\}}_{\text{blocul 1}}, \dots, \underbrace{\{x[(I-1)L], x[(I-1)L+1], \dots, x[N-1]\}}_{\text{blocul I-1}} \}$$

Se produce următoarea :

$$\{ \underbrace{\{y_0[0], y_0[1], \dots, y_0[L-1]\}}_{\text{blocul 0}}, \underbrace{\{y_1[0], y_1[1], \dots, y_1[L-1]\}}_{\text{blocul 1}}, \dots, \underbrace{\{y_{I-1}[0], y_{I-1}[1], \dots, y_{I-1}[L-1]\}}_{\text{blocul I}} \}$$

$$y_i[m] = x[m + iL] \quad ; \quad m=0,1,\dots,L-1; \quad i=0,1,\dots,I-1 \tag{A13.88}$$

Pentru fiecare bloc de date, de lungime L, se calculează o periodogramă :

$$\hat{P}_X^{(i)}(f) = \frac{1}{L} \left| \sum_{m=0}^{L-1} y_i[m] e^{-j2\pi f m} \right|^2, \quad f \in [-0,5, 0,5] \text{ m } i=0,1,\dots,I-1 \tag{A13.89}$$

Se mediază apoi cele I periodograme, la fiecare frecvență :

$$\hat{P}_{Xav}(f) = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \hat{P}_X^{(i)}(f) \tag{A13.90}$$

obținându-se o periodogramă mediază. Atunci când $N \rightarrow \infty$ și deodată și $I \rightarrow \infty$ și $L \rightarrow \infty$, avem

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (I, L \rightarrow \infty)}} \hat{P}_{Xav}(f) = P_X(f) \tag{A13.91}$$

Pentru calcul se poate aplica algoritmul FFT, APM e exemplu pe 1024 de puncte la frecvențele

$$f = -0,5 + k \frac{1}{1024} \quad ; \quad k=0,1,2,\dots,1023 \tag{A13.92}$$

A13.7 Procese aleatoare discrete filtrate.

Frecerea unui proces staționar în peus larg, WSS, printr-un sistem liniar se numește filtrare. Dacă răspunsul la impuls al sistemului este $h[n]$ răspunsul său în frecvență are forma:

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi f n} ; f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.93}$$

și poate fi dedus din particularizarea transformatei Z, $\mathcal{H}(z)$, pe axa unitară

$$H(f) = \mathcal{H}(e^{j2\pi f}) ; f \in [-0,5, 0,5] \tag{A13.94}$$

Dacă la intrarea unui sistem liniar și invariant în timp, $h[n]$, se aplică un proces aleator staționar în peus larg, $U[n]$, cu media μ_U și funcția de autocorelație $R_U[k]$, atunci procesul $X[n]$ de la ieșirea sistemului

$$X[n] = h[n] * U[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] U[n-k] \tag{A13.95}$$

este și el staționar în peus larg și:

$$\mu_X = \mu_U H(0) = \mu_U \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \tag{A13.96}$$

$$R_X[k] = h[-k] * h[k] * R_U[k] \tag{A13.97}$$

$$P_X(f) = |H(f)|^2 P_U(f) \tag{A13.98}$$

Demonstrarea celor trei relații (A13.96) + (A13.98) este simplă.

1. $E\{X[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] E\{U[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \mu_U = \mu_U \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] = \mu_U H(0)$

2. $E\{X[n]X[n+k]\} = E\left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] U[n-i] \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j] U[n+k-j] \right\}$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[i] h[j] E\{U[n-i]U[n+k-j]\}$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[i] h[j] R_U[k+i-j]$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] \sum_{j=-\infty}^{\infty} h[j] R_U[(k+i)-j]$
 $= \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i] (h * R_U)(k+i) = h[-k] * h[k] * R_U[k]$

3. Se aplică relației (A13.97) transformarea Fourier în timp discret.

Avem:

$$h[k] \xleftrightarrow{F} H(\omega)$$

$$h[-k] \xleftrightarrow{F} H(-\omega) = H^*(\omega)$$

$$R_u[k] \xleftrightarrow{F} S_u(\omega)$$

$$R_x[k] \xleftrightarrow{F} S_x(\omega)$$

și deci, din (A13.97):

$$R_x[k] = H^*(\omega) H(\omega) S_u(\omega) = |H(\omega)|^2 S_u(\omega).$$

A13.8. Procese aleatoare mutual staționare (în sens larg).

Vom extinde noțiunea de staționaritate în sens larg de la un proces la două procese aleatoare. Fie ca $X[n]$ și $Y[n]$ sunt, fiecare, WSS, adică

$$\begin{cases} \mu_X[n] = E\{X[n]\} = \mu_X = \text{cst} & (A13.99) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} & (A13.100) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_Y[n] = E\{Y[n]\} = \mu_Y = \text{cst} & (A13.101) \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_Y[k] = E\{Y[n]Y[n+k]\} & (A13.102) \end{cases}$$

Formăm procesul aleator sumă $Z[n] = X[n] + Y[n]$ și ne interesează valoarea medie a procesului $Z[n]$:

$$\begin{aligned} E\{Z^2[n]\} &= E\{X^2[n]\} + E\{X[n]Y[n]\} + E\{Y[n]X[n]\} + E\{Y^2[n]\} \\ &= R_X[0] + 2E\{X[n]Y[n]\} + R_Y[0] \end{aligned}$$

Avem nevoie deci să cunoaștem momentul mutual $E\{X[n]Y[n]\}$. Dacă am dori să determinăm autocorelația procesului sumă, $E\{Z[n]Z[n+k]\}$ am avea nevoie de termeni momente mutuale de forma $E\{X[n]Y[n+k]\}$. Dacă momentul $E\{X[n]Y[n+k]\}$ nu depinde de n ci numai de deplasarea k a esantionelor, definim secvența de intercorelație a celor două procese aleatoare sub forma:

$$R_{X,Y}[k] = E\{X[n]Y[n+k]\} ; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (13.103)$$

În aceste condiții,

$$E\{Z^2[n]\} = R_X[0] + 2R_{X,Y}[0] + R_Y[0].$$

Dacă procesele aleatoare WSS, $X[n]$ și $Y[n]$ au secvența de intercorelație $E\{X[n]Y[n+k]\}$ dependentă numai de k , nu și de n , ele sunt mutual staționare, în sens larg.

Intercorelația (cross-correlation) sau corelația mutuală are câteva proprietăți remarcabile:

- 1) Ea nu este, în general, simetrică adică

$$R_{X,Y}[-k] \neq R_{X,Y}[k] \tag{A13.104}$$
- 2) Maximul intercorelației nu apare, în general, în origine
- 3) Maximul intercorelației este mărginit de produsul abaterilor standard ale celor două procese, adică:

$$|R_{X,Y}[k]| \leq \sqrt{R_X[0] R_Y[0]} \tag{A13.105}$$

Avem

$$E\{(aX[n] \pm Y[n+k])^2\} \geq 0, \forall a$$

sau

$$a^2 E\{X^2[n]\} + E\{Y^2[n+k]\} \pm 2a E\{X[n]Y[n+k]\} \geq 0$$

$$a^2 R_X[0] \pm 2a R_{X,Y}[k] + R_Y[0] \geq 0, \forall a$$

expresie ce trebuie deci să aibă discriminantul $\Delta \leq 0$ adică:

$$4 R_{X,Y}^2[k] - 4 R_X[0] R_Y[0] \leq 0$$

din care rezultă relația (A13.105).

- 4) Avem o relație de simetrie dacă comutăm procesele:

$$R_{X,Y}[-k] = R_{Y,X}[k] \tag{A13.106}$$

Avem

$$\begin{aligned} R_{Y,X}[k] &= E\{Y[n]X[n+k]\} = E\{X[n]Y[n-k]\} \\ &= R_{X,Y}[-k]. \end{aligned}$$

Doi procese aleatoare $X[n]$ și $Y[n]$, ambele WSS și mutual WSS, de medie nulă, sunt necorelate dacă:

$$R_{X,Y}[k] \equiv 0, \forall k \tag{A13.107}$$

Dezvoltarea interspectrală de putere.

Putem defini dezvoltarea interspectrală de putere (sau dezvoltarea spectrală mutuală de putere - Cross-Power Spectral Density) a două procese WSS și mutual WSS, $X[n]$ și $Y[n]$ prin:

$$P_{XY}(f) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} E\left\{ \left[\sum_{n=-M}^M X[n] e^{-j2\pi f n} \right]^* \left[\sum_{n=-M}^M Y[n] e^{j2\pi f n} \right] \right\} \tag{A13.108}$$

Vom continua cu enumerarea proprietăților:

5). $R_{X,Y}[k]$ și $P_{X,Y}(f)$ formază o pereche Fourier

$$R_{X,Y}[k] \xleftrightarrow{F} P_{X,Y}(f)$$

$$P_{X,Y}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{X,Y}[k] e^{-j2\pi f k} \quad ; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.109)$$

6). Secvența de autocorelație are o simetrie hermitică:

$$P_{X,Y}(f) = P_{X,Y}^*(f) \quad ; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.110)$$

7). Secvența de autocorelație este mărginită superior:

$$|P_{X,Y}(f)| \leq \sqrt{P_X(f)P_Y(f)} \quad ; \quad f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.111)$$

8). Pentru procesele de medie nulă și necorelate mutual

$$P_{X,Y}(f) \equiv 0 \quad \forall f \in [-0,5, 0,5] \quad (A13.112)$$

9). Avem, schimbând mereu procesele

$$P_{X,Y}(f) = P_{Y,X}^*(f) \quad (A13.113)$$

Observație. Există procese aleatoare staționare în sens larg dar care nu sînt și mutual staționare. Fie $X[n] = A$ și $Y[n] = (-1)^n A$, unde A este o variabilă aleatoare de medie nulă, $\mu_A = 0$ și varianță unitară, $\sigma_A^2 = 1$.

Avem $E\{X[n]\} = 0$ și $E\{Y[n]\} = 0$.

$$R_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} = E\{A^2\} = \sigma_A^2 = 1.$$

$$R_Y[k] = E\{Y[n]Y[n+k]\} = E\{(-1)^n A (-1)^{n+k} A\} = (-1)^k \sigma_A^2 = (-1)^k.$$

ambele independente de n . Procesele sînt WSS.

Calculăm acum:

$$E\{X[n]Y[n+k]\} = E\{A (-1)^{n+k} A\} = (-1)^{n+k} \sigma_A^2 = (-1)^{n+k}$$

și este, evident, dependentă nu numai de k ci și de n . Prin urmare cele două procese deși sînt fiecare, în parte, WSS, nu sînt și mutual WSS.

Estimarea perechilor de autocorelație pentru procesele $X[n]$ și $Y[n]$ definite pentru $n = 0, 1, \dots, N-1$ se face cu:

$$\hat{R}_{X,Y}[k] = \begin{cases} \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]y[n+k] & ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, M \\ \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=|k|}^{N-1} x[n]y[n+k] & ; \quad k = -M, -(M-1), \dots, -1 \end{cases} \quad (A13.114)$$

În relația $M \leq N-1$, considerând că $R_{X,Y}[k] \cong 0$ pentru $k > M$. În practică se face o determinare preliminară pentru a localiza maximum secvenței de autocorelații, apoi secvențele de date se deplasează corectiv pentru ca maximum autocorelației să apară la $k=0$, și se procedează la calculare. Această procedură este cunoscută sub numele de "alinare temporală" (time alignment).

Vom da un exemplu de aplicare a relației (A13.114) pentru $N=4$:

$\{x[0], x[1], x[2], x[3]\}$ $\{y[0], y[1], y[2], y[3]\}$. Pentru k nelimitat la $M=2$, $|k| \leq M=2$, deoarece în rest $\hat{R}_{X,Y}[k] \cong 0$:

$$\hat{R}_{X,Y}[-2] = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^3 x[n]y[n-2] = \frac{1}{2} (x[2]y[0] + x[3]y[1])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[-1] = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 x[n]y[n-1] = \frac{1}{3} (x[1]y[0] + x[2]y[1] + x[3]y[2])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[0] = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 x[n]y[n] = \frac{1}{4} (x[0]y[0] + x[1]y[1] + x[2]y[2] + x[3]y[3])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[1] = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^2 x[n]y[n+1] = \frac{1}{3} (x[0]y[1] + x[1]y[2] + x[2]y[3])$$

$$\hat{R}_{X,Y}[2] = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^1 x[n]y[n+2] = \frac{1}{2} (x[0]y[2] + x[1]y[3])$$

A13.8 Procese gaussiene în timp discret.

Un proces aleator discret este gaussian dacă orice multime finită de eșantioane din acel proces are o repartiție gaussiană multivariată de forma dată în relația (A9.6), pe care o reluăm aici:

$$p_{\vec{X}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\vec{C}_X|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu}_X)^T \vec{C}_X^{-1} (\vec{x} - \mu_X) \right\} \tag{A13.115}$$

în care: $\vec{X} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]^T$, $\vec{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$,

$\vec{\mu}_X = [E\{X_1\} \ E\{X_2\} \ \dots \ E\{X_N\}]^T = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N]^T$

$$\vec{C}_X = \begin{bmatrix} \text{Disp}\{X_1\} & \text{Cov}\{X_1, X_2\} & \text{Cov}\{X_1, X_3\} & \dots & \text{Cov}\{X_1, X_N\} \\ \text{Cov}\{X_2, X_1\} & \text{Disp}\{X_2\} & \text{Cov}\{X_2, X_3\} & \dots & \text{Cov}\{X_2, X_N\} \\ \text{Cov}\{X_3, X_1\} & \text{Cov}\{X_3, X_2\} & \text{Disp}\{X_3\} & \dots & \text{Cov}\{X_3, X_N\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}\{X_N, X_1\} & \text{Cov}\{X_N, X_2\} & \text{Cov}\{X_N, X_3\} & \dots & \text{Disp}\{X_N\} \end{bmatrix} \tag{A13.116}$$

Se spune că vectorul aleator \vec{X} este repartizat normal cu media vectorul $\vec{\mu}_x$ și cu matricea de covarianță \vec{C}_x și se scrie, simbolic:

$$\vec{X} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}_x, \vec{C}_x)$$

(A13.117)

Vom reaminti că:

1). Pentru a determina deontatea de probabilitate (repartiție) multidimensională sunt necesare doar vectorul medii $\vec{\mu}$ și matricea de covarianță \vec{C}

2). Dacă variabilele aleatoare, componente ale vectorului aleator, sunt necorelate, adică:

$$[\vec{C}]_{i,j} = 0 \text{ pentru } i \neq j$$

atunci ele sunt și statistic independente

3) O transformare liniară aplicată vectorului gaussian \vec{X} generează un alt vector gaussian, \vec{Y} . Dacă transformarea este dată de matricea \vec{G} de dimensiuni $M \times N$, unde $M \leq N$:

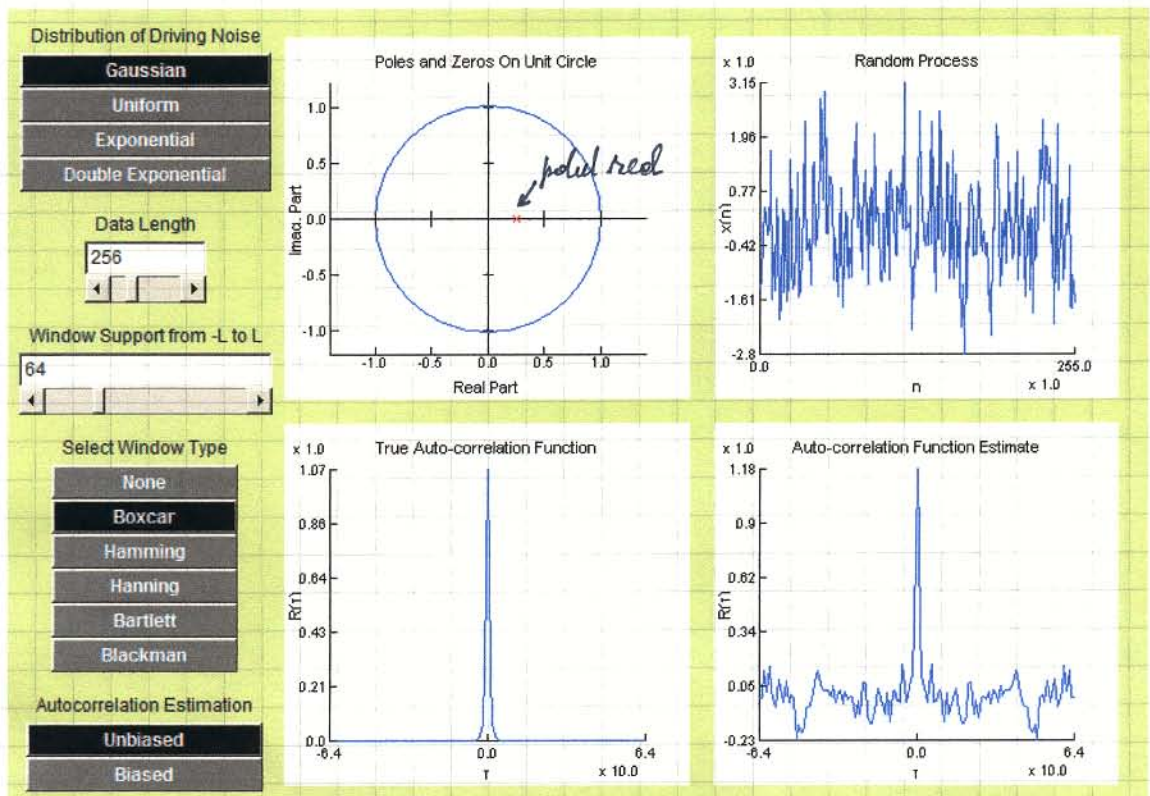
$$\vec{Y} = \vec{G}\vec{X}$$

(A13.118)

atunci:

$$\vec{Y} \sim \mathcal{N}(\vec{G}\vec{\mu}, \vec{G}\vec{C}_x\vec{G}^T)$$

(A13.119)



În cazul unei ferești cu lungime mai mică autocorelația obținută pentru valori $|k| < L$ este mai bună. Se pot aplica diferite ferește, cu lungimi variabile.

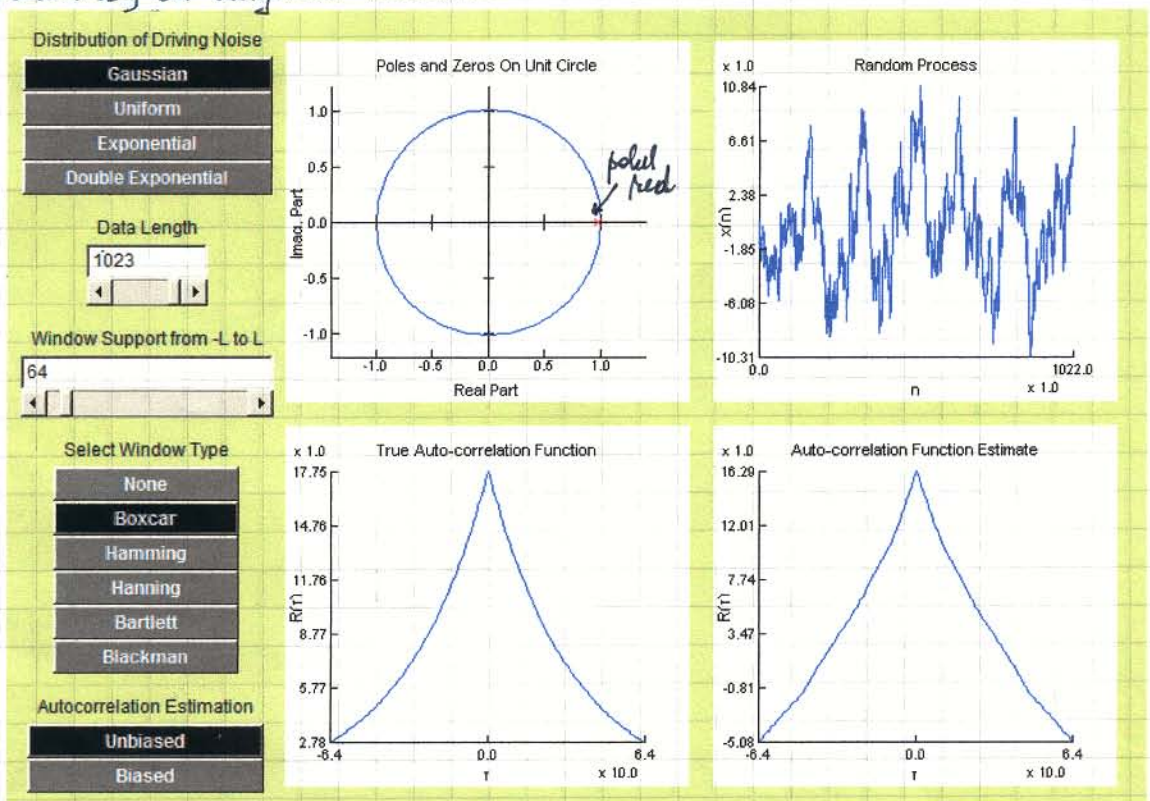
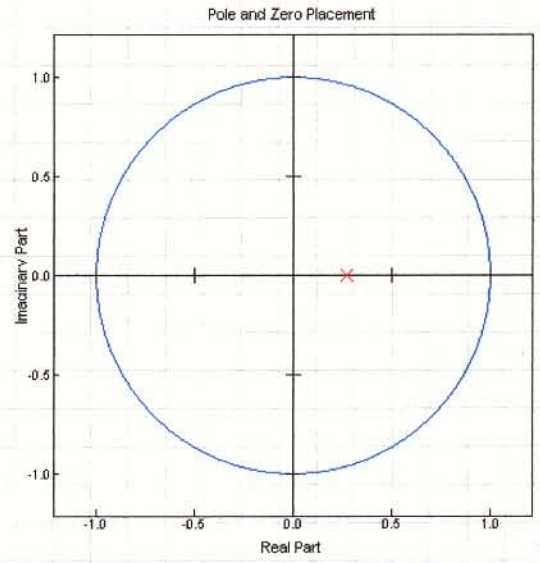


Fig. A13.9 Estimarea corelației pentru un proces obținut dintr-un zgomot alb gaussian cu dispersie 1, filtrat cu un filtru cu un singur pol; $\text{pas } a \approx 0,25$ și $a \approx 0,98$.

Pentru detalii vezi:

<http://users.ece.gatech.edu/jtz/java>

Estimarea densității spectrale de putere prin medierea perioagramelor - metoda (A12.90).



Polul filtrului ce generează procesul AR este $a \approx 0,25$

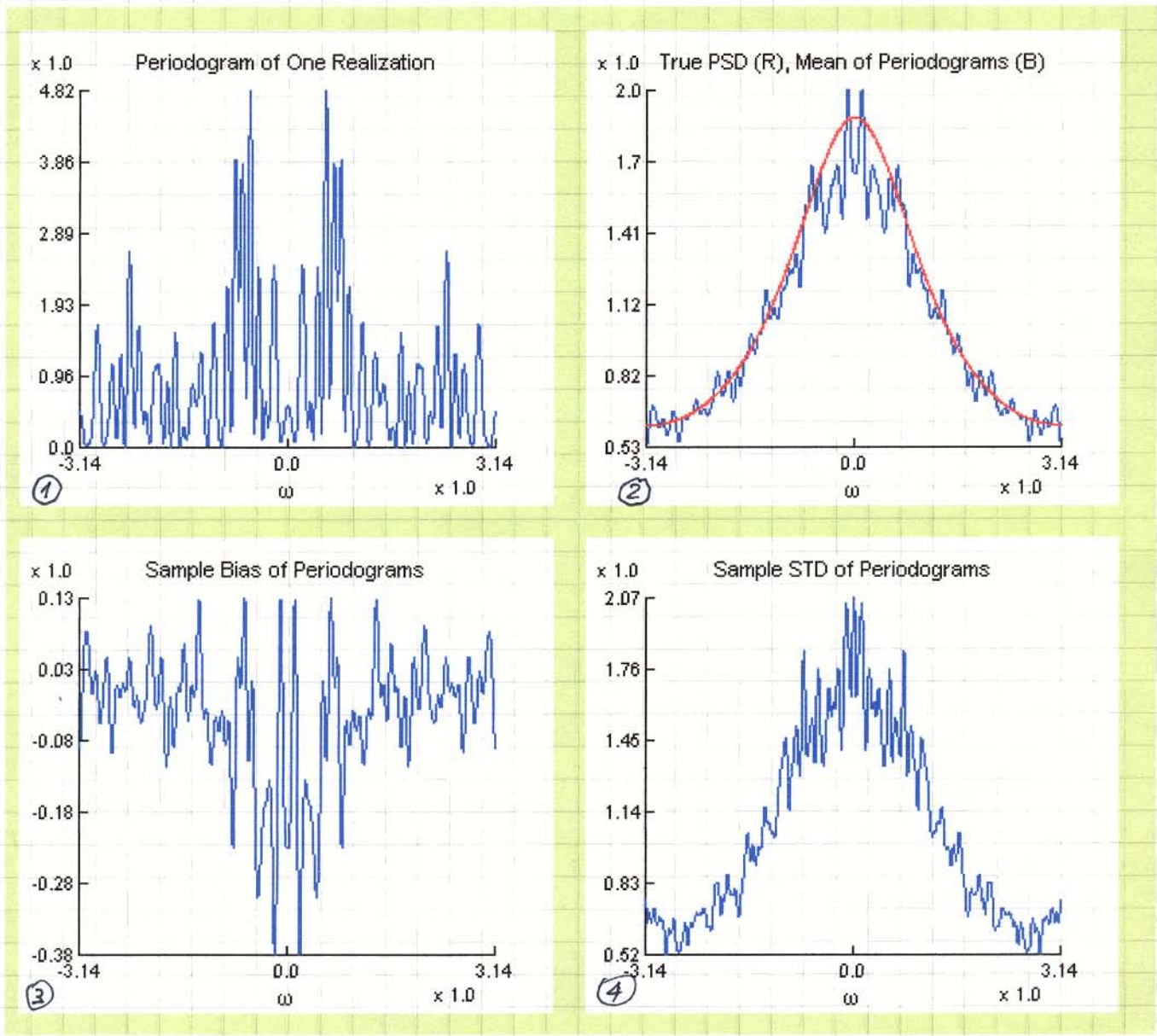
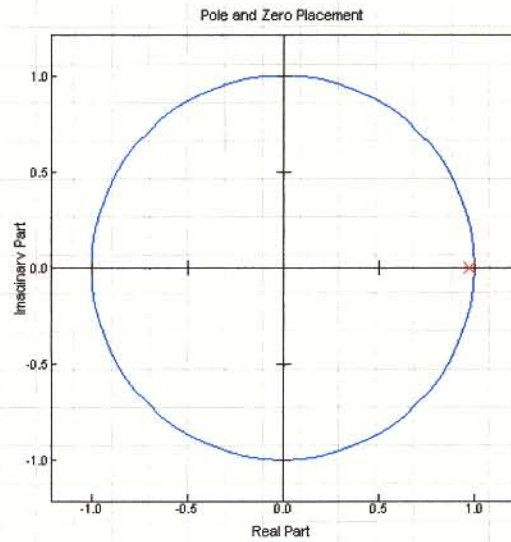


Fig A12.10 Modul de obținere a densității spectrale de putere. Se calculează o perioagramă a unei realizări a procesului, cu $\frac{1}{N} |X(\omega)|^2$, $\omega \in [-\pi, \pi]$. Operația se repetă pentru 200 de segmente de proces, statistic independente, ce se mediază. (1) Perioograma unei realizări (2) Perioograma după mediere pe 200 de realizări (altăritu) și curba teoretică (roșu). Se calculează deplasarea estimatorului (3) și abaterea sa standard (4)



Polul filtrului ce generează
procesul AR este $a \approx 0,98$.

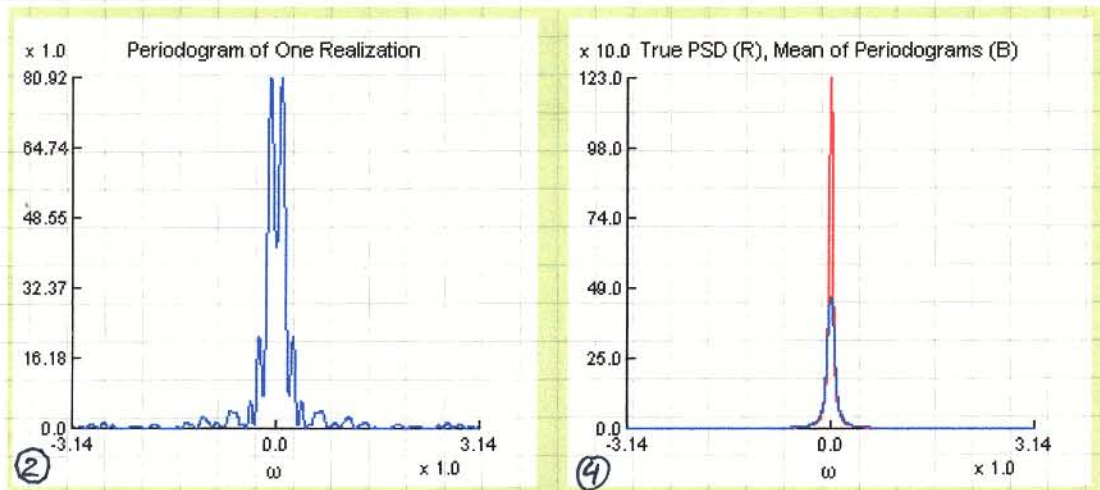
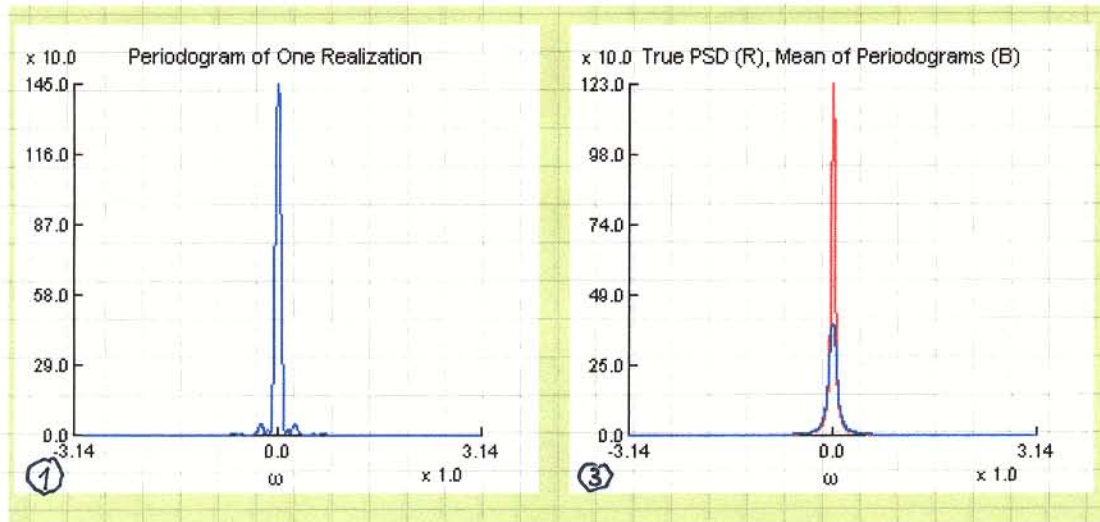
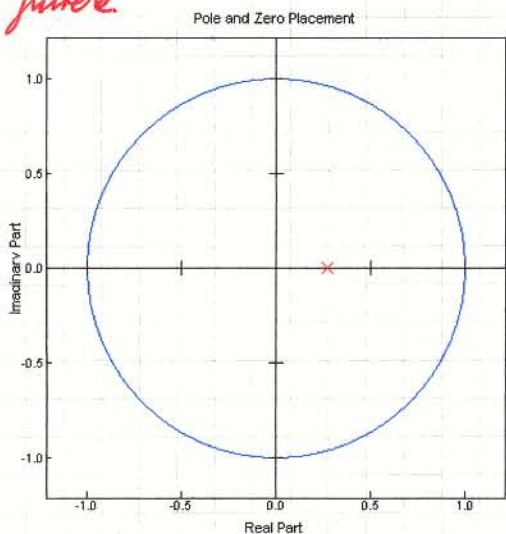
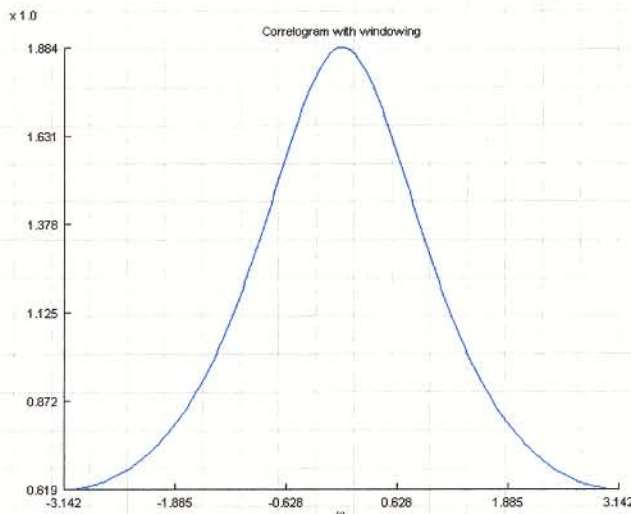


Fig A13.11 Pentru procesul AR obținut cu polul $a \approx 0,98$ se dau două periodo-
grame obținute pentru câte o realizație. Se vede, ① și ②, că ele sunt distribuite,
periodogramas (chiar și cea obținută prin mediere, ③ și ④) fiind aleatoare.

Corelogramul se obține ca transformare Fourier a unei estimări a funcției de autocorelație. Ea este un estimator al densității spectrale de putere.



Polul filtrului AR, $a = 0,25$



Correlogramul după ferestrare cu o funcție rectangulară de lungime N echivalenț, ceea ce este echivalent cu lipsa ferestrării.

Distribution of Driving Noise

- Gaussian
- Uniform
- Exponential
- Double Exponential

Data Length

256

Window Support from -L to L

255

Select Window Type

- Boxcar
- Hamming
- Hanning
- Bartlett
- Blackman

Poles and Zeros On Unit Circle

Imag. Part

Real Part

1

polul real

①

Random Process

x 1.0

3.2

1.86

0.53

-0.81

-2.14

-3.48

0.0 255.0

n x 1.0

②

Correlogram without windowing

x 1.0

6.19

4.96

3.72

2.48

1.24

0.0

-3.14 0.0 3.14

ω x 1.0

③

Correlogram with windowing

x 1.0

6.19

4.96

3.72

2.48

1.24

0.0

-3.14 0.0 3.14

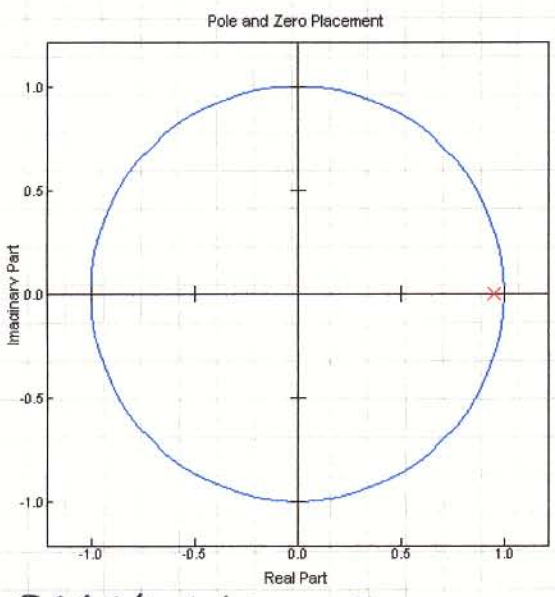
ω x 1.0

④

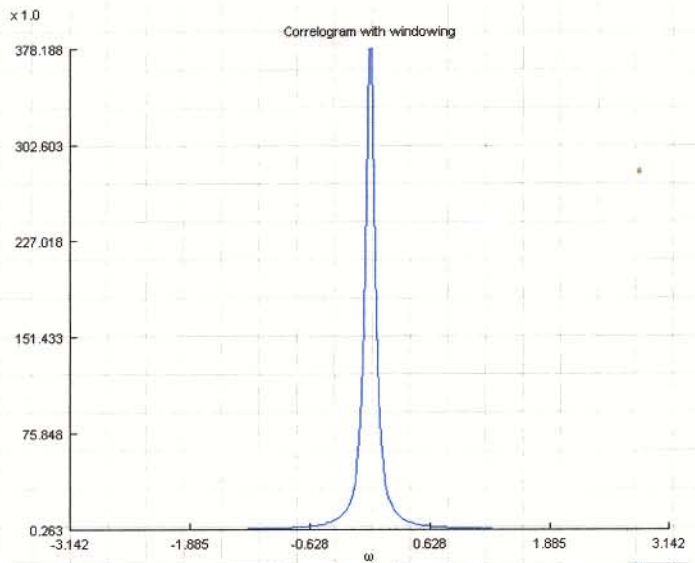
Fig. 13.12 Se filtrează un zgomot alb gaussian cu dispersia 1 cu un filtru cu un singur pol, $a \approx 0,25$ ①. Se obține un proces aleator staționar ②. Pentru el correlogramul este dat în ③, ferestrarea fiind imperfecută.

Pentru detalii vezi:

<http://users.ece.gatech.edu/gtz/java>



Polul filtrului AR, $a \approx 0,98$



Correlograma după fereaștruire cu fereaștră dreptunghiulară, ce reduce eroarea la 6 mure.

Distribution of Driving Noise

- Gaussian
- Uniform
- Exponential
- Double Exponential

Data Length

1023

Window Support from -L to L

255

Select Window Type

- Boxcar
- Hamming
- Hanning
- Bartlett
- Blackman

Poles and Zeros On Unit Circle

①

Random Process

②

Correlogram without windowing

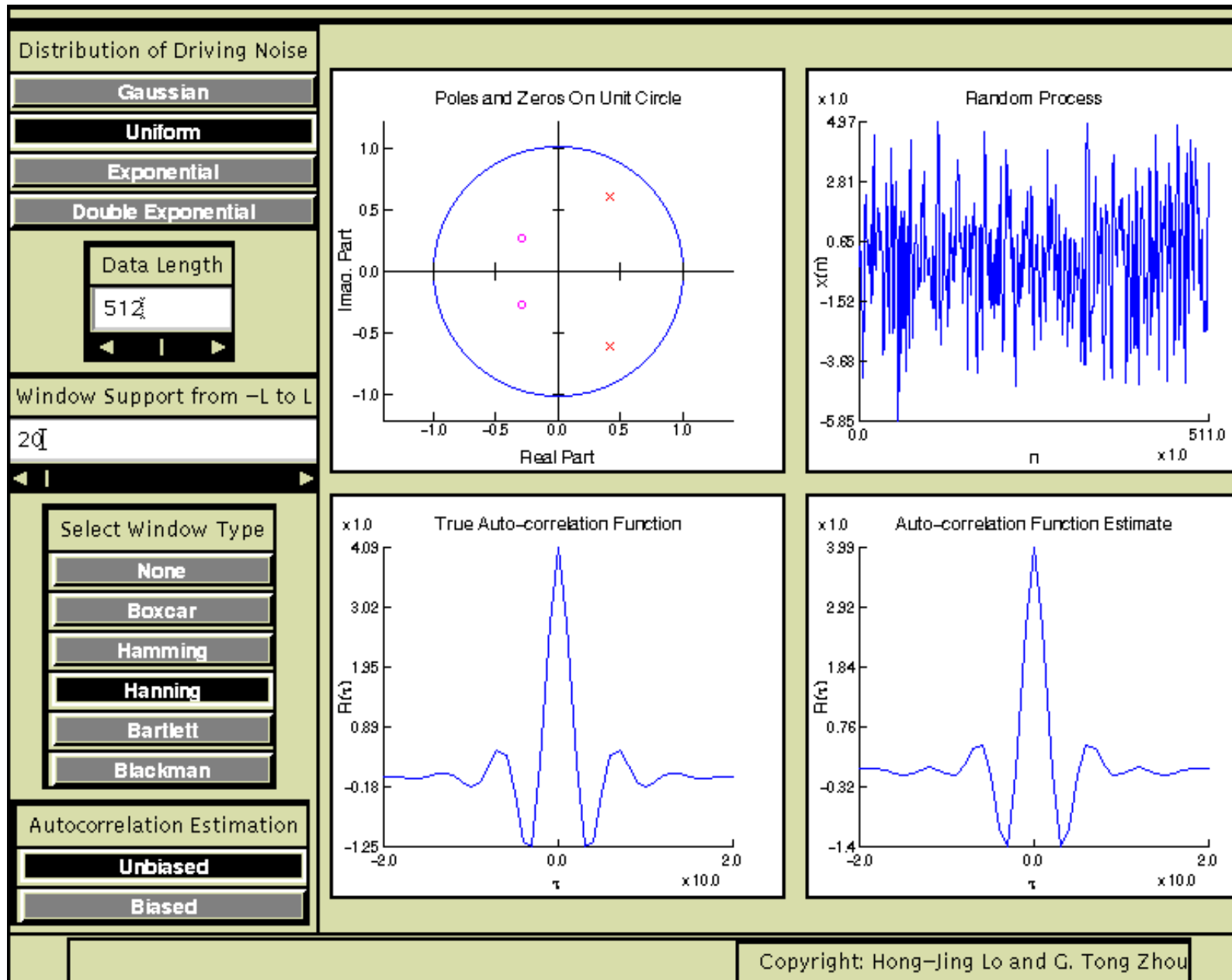
③

Correlogram with windowing

④

Fig A13. 13 Se filtrează un zgomot alb gaussian cu dispersie 1 cu un filtru cu un singur pol, $a \approx 0,98$ ① ni se obține procesul staționar ② pentru care correlograma este ③ fără fereaștruire și ④ cu fereaștruire dreptunghiulară pe $1/4$ din lungimea semnului.

Module 7: Autocorrelation Function Estimation



Copyright: Hong-Jing Lo and G. Tong Zhou

Explanation:

Let $x(n)$ be a linear random process generated by passing a zero-mean, i.i.d., unit variance process $w(n)$ through a linear filter with impulse response $h(n)$. The autocorrelation function of $x(n)$ is defined as $r(k) = E[x(n)x(n+k)]$ and is related to the system impulse response through $r(k) = \sum_n h(n)h(n+k)$. If $x(n)$ is real and stationary, then $r(k) = r(-k)$.

Given N samples of $x(n)$, we estimate $r(k)$ by averaging the product $x(n)x(n+k)$ over all available n 's at lag k . The total number of such terms is $N-|k|$. The unbiased estimate is then the running sum of $x(n)x(n+k)$ divided by $N-|k|$, whereas for the biased estimate, the divisor is N .

Because there are fewer number of terms to average at larger lags, the $r(k)$ estimate is less reliable at larger $|k|$. To compensate for this, we taper the $r(k)$ estimate by multiplying the sample $r(k)$ with a [window](#) function $w(k)$ which is symmetric and monotonically non-increasing with $|k|$.

To use this applet, first [select the poles and zeros](#) of the system. Once the system is defined, theoretical autocorrelation function can be calculated as shown in the lower left panel of the applet. Next, choose the [probability distribution function \(pdf\)](#) for the driving noise $w(n)$, as well as the data length N . A realization of $w(n)$ is then plotted in the top right panel. Without windowing and especially with the unbiased option, the sample autocorrelation function is inaccurate at larger lags. Toggle between the biased and unbiased options, we see that the difference between the two is more noticeable at larger values of $|k|$. Use a tapering [windows](#) and adjust its parameter L to improve the autocorrelation function estimate. If we know *a priori* that the system impulse response has no more than L points, or the memory of the process is no more than L , then a length L window should be used.

Observe the following:

- The theoretical autocorrelation function does not depend on the pdf of the driving noise.
- At a fixed lag, the longer the data length, the more accurate the sample autocorrelation estimate.
- Windowing improves the autocorrelation function estimate.

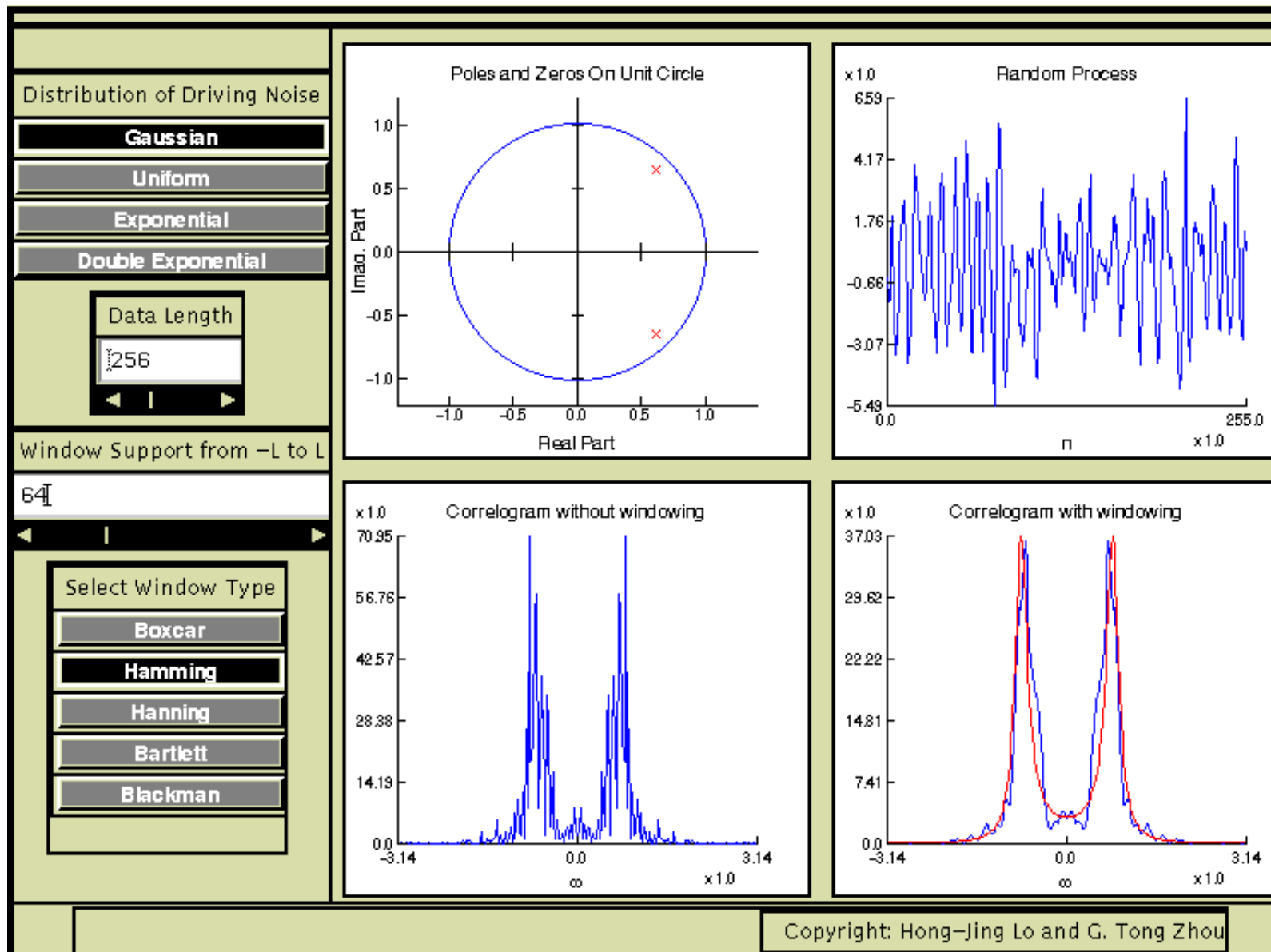
Example: the system shown above has 2 poles and 2 zeros. A length 512 sample realization of $x(n)$ is shown in the top right panel. The true autocorrelation function for lags between -20 and 20 are shown in the lower left panel. To its right, is the autocorrelation function estimate calculated using a Hanning window.

Experiment it yourself!

Click [here](#) to run the experiment using your browser.

Instruction: To change a parameter from its default value, slide the bar beneath the parameter window or enter a specific number and then hit the return key. Hitting the return key from any of the parameter windows initiates another Monte Carlo run.

Module 8: Correlogram Approach to Power Spectrum Estimation



Explanation:

Let $x(n)$ be a linear random process generated by passing a zero-mean, i.i.d., unit variance process $w(n)$ through a linear filter with impulse response $h(n)$. The autocorrelation function of $x(n)$ is defined as $r(k) = E[x(n)x(n+k)]$, and the power spectral density (PSD) $S(w)$ of $x(n)$ is defined as the Fourier Transform of $r(k)$. The above PSD definition suggests that we can estimate $S(w)$ by first obtaining the autocorrelation function estimate and then Fourier transforming it. This is called the correlogram approach to PSD estimation.

We have seen that without proper windowing, [the sample autocorrelation function](#) becomes less reliable at larger lags. If we simply Fourier transform this raw autocorrelation function estimate, the resulting PSD estimate will not be good. To obtain a meaningful correlogram, we must window the autocorrelation function estimate first before taking the Fourier transform.

To use this applet, first select [the poles and zeros](#) of the system. Once the system is defined, theoretical PSD can be calculated. The user can pick a data length N and choose from a variety of [probability density functions](#) for the driving noise. A sample realization $x(n)$ is then generated and plotted in the top right window. A raw correlogram obtained by Fourier transforming the unwindowed autocorrelation function estimate, is shown in the lower left window. To obtain a more accurate correlogram, one can select the

window parameter L to be much smaller than the data length N . Different types of [windows](#) can be used. The resulting correlogram (blue) and the true PSD (red) are shown together in the bottom right window for comparison.

Observe the following:

- The theoretical PSD is only affected by the system pole/zero locations and not by the pdf of the driving noise.
- The correlogram approximates the true PSD better when a longer data record is used.
- Windowing produces a less erratic (smoother looking) correlogram.

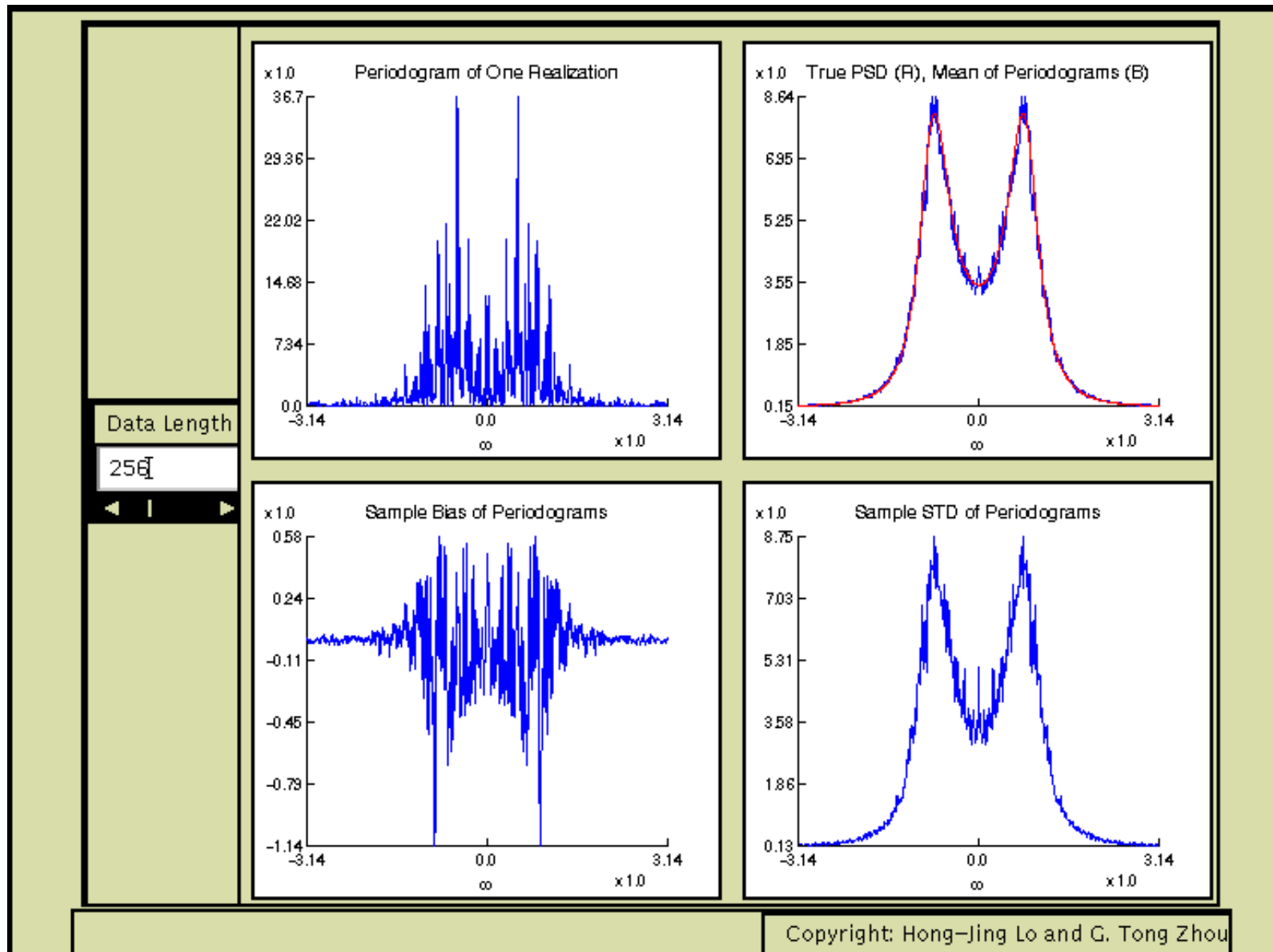
Example: the system shown above has 2 poles that are fairly close to the unit circle with angles of approximately -0.5π , 0.5π radians. We see from the bottom left panel that although the raw correlogram shows two peaks around $w=-0.5\pi$, 0.5π , it is quite erratic looking. When a Hamming window with $L=64$ is applied, the resulting correlogram tends to the true PSD.

Experiment it yourself!

Click [here](#) to run the experiment using your browser.

Instruction: To change a parameter from its default value, slide the bar beneath the parameter window or enter a specific number and then hit the return key. Hitting the return key from any of the parameter windows initiates another Monte Carlo run.

Module 9: Properties of the Periodogram

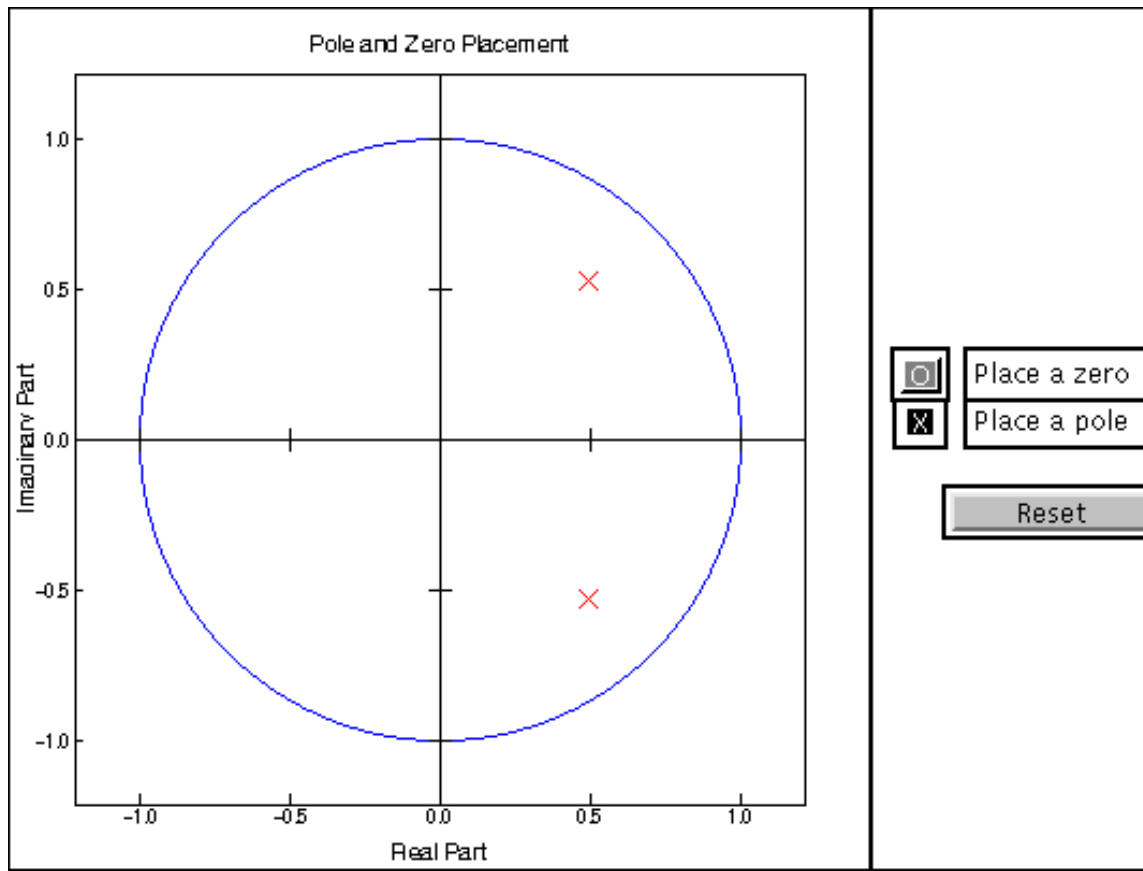


Explanation:

Let $x(n)$ be a zero-mean, stationary random process and denote by $X(w)$ its discrete Fourier transform (DFT). The periodogram of $x(n)$ is defined as $I(w) = |X(w)|^2 / N$, where N is the data length. It is known that the periodogram is an asymptotically unbiased but inconsistent estimator for the power spectral density (PSD) $S(w)$. This means that as N goes to infinity, the expected value of $I(w)$ goes to $S(w)$, but the variance of $I(w)$ will not reduce. Interestingly, it can be shown that the standard deviation (std) of $I(w)$ is approximately $S(w)$ except at the zero frequency: the std of $I(0)$ is approximately $\sqrt{2} * S(0)$. The purpose of this applet is to illustrate these properties.

We focus our attention on linear and stationary random processes here. To use this applet, first select [the poles and zeros](#) of the system. Once the system is determined, theoretical PSD can be calculated. The periodogram from a sample realization is plotted in the top left window. It has an erratic appearance owing to the fact that the periodogram is an inconsistent estimate of the PSD. The applet then generates 200 independent realizations of $x(n)$, computes the periodograms, and then averages all periodograms to obtain the empirical mean as shown in the top right window (blue). The true PSD (red) is displayed in the same window for comparison. Their difference - the empirical bias is shown in the bottom left window whereas the empirical std is plotted in the bottom right window. By adjusting the data length N , one can observe that the bias in the periodogram decreases with N but the std stays about the same. Moreover, the std of the periodograms resembles the true PSD except at $w=0$ where the two differ by about

40%.

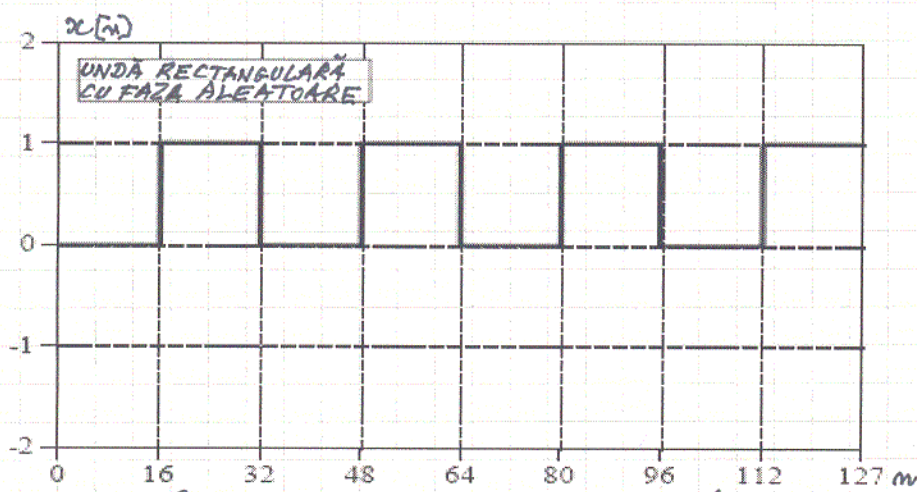


Experiment it yourself!

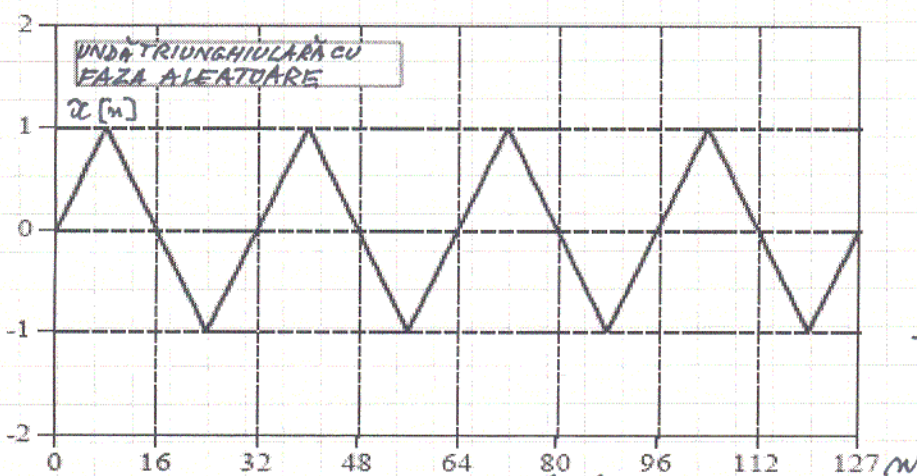
Click [here](#) to run the experiment using your browser.

Instruction: To change a parameter from its default value, slide the bar beneath the parameter window or enter a specific number and then hit the return key. Hitting the return key from any of the parameter windows initiates another Monte Carlo run.

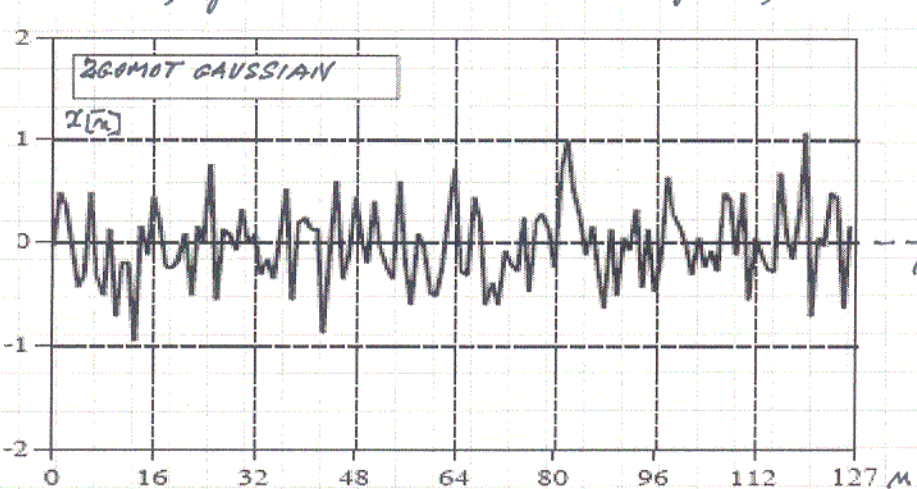
Warning: This applet runs relatively slowly because 200 independent realizations are used.



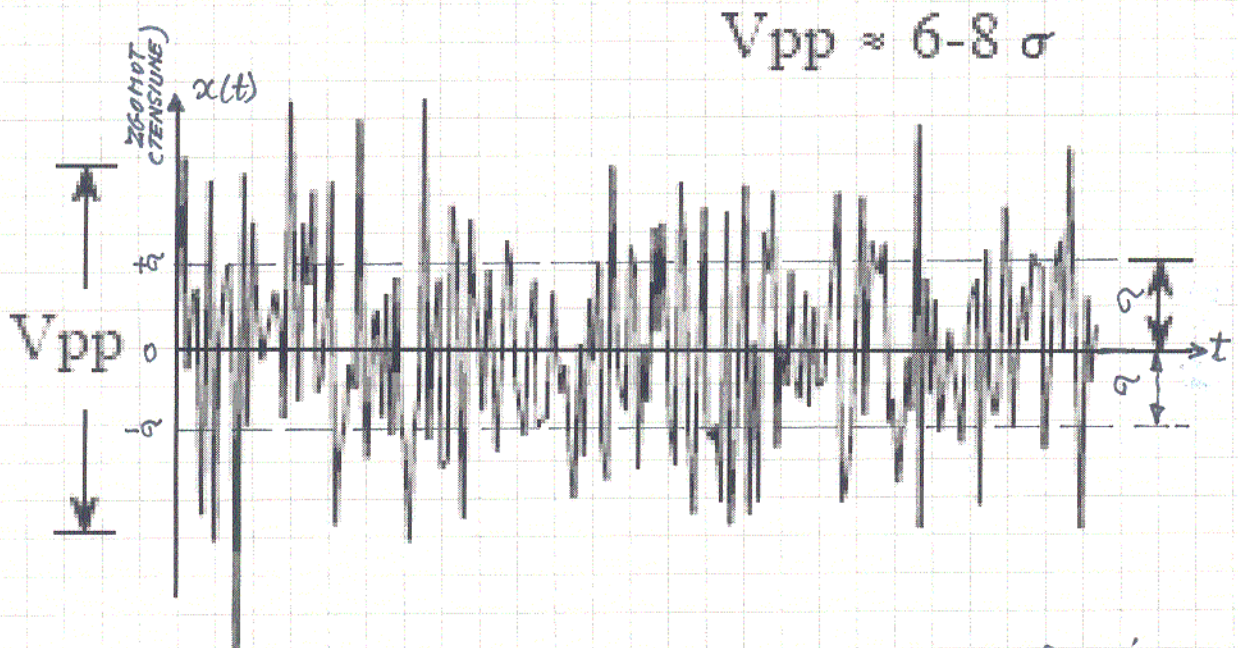
Unda rectangulară cu fază aleatoare ia numai două valori, 0 și 1. Densitatea de repartiție este compusă din două impulsuri Dirac, cu amplitudine 0,5



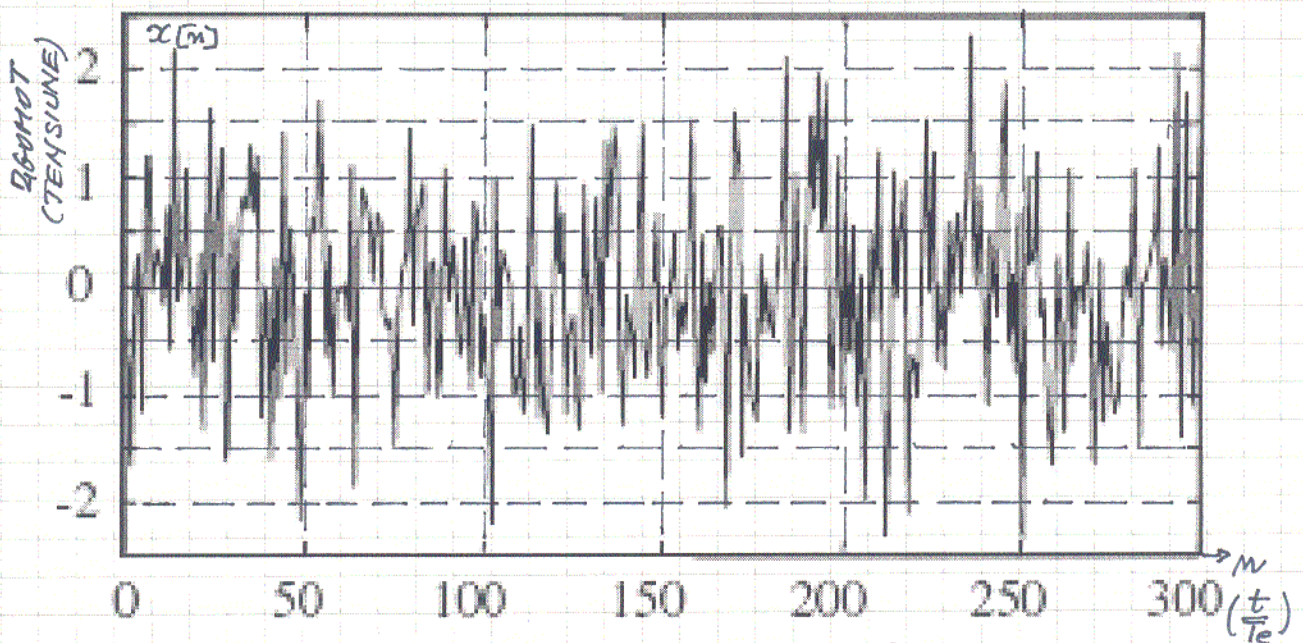
Unda triunghiulară cu fază aleatoare ia toate valorile cuprinse între -1 și +1 cu aceeași probabilitate. Densitatea de repartiție este mereu uniformă



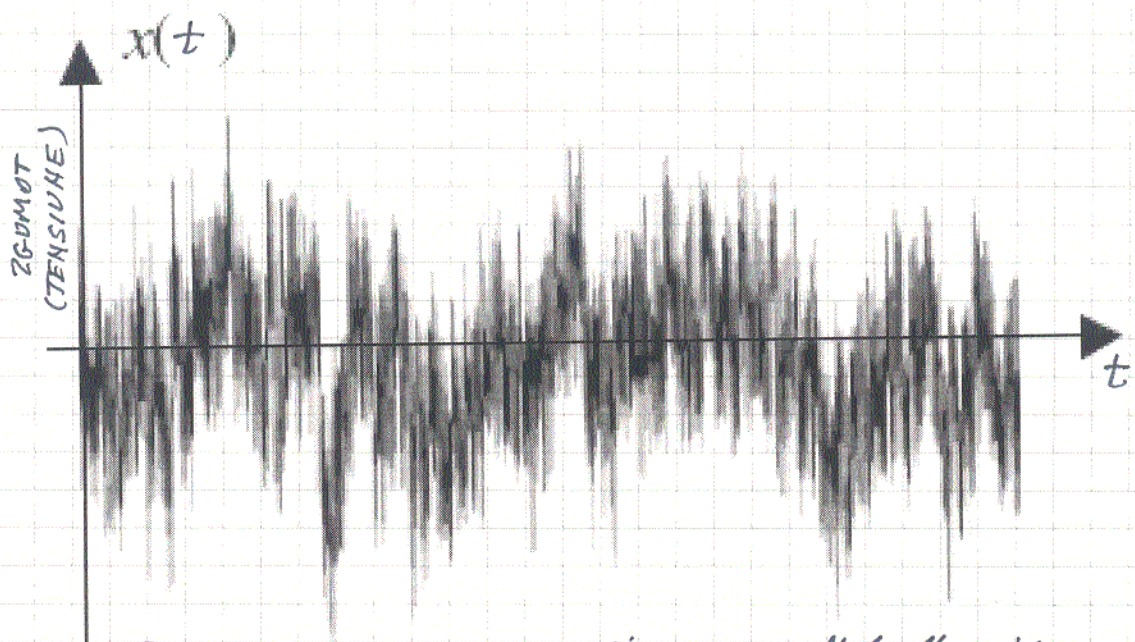
Semnal zăcut gaussian.



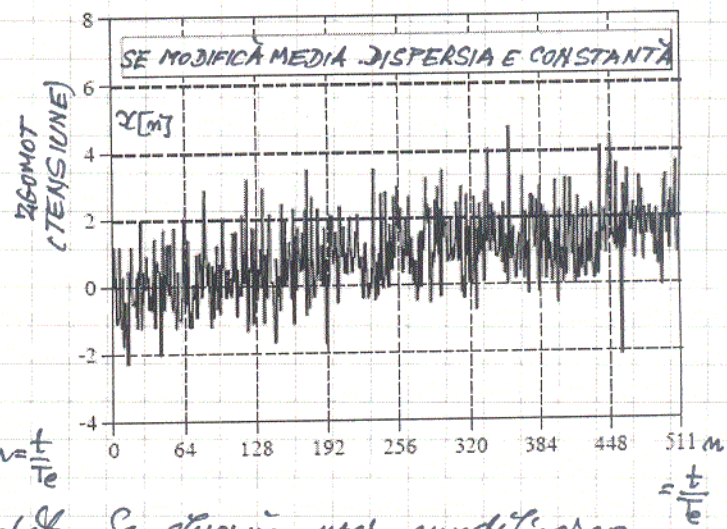
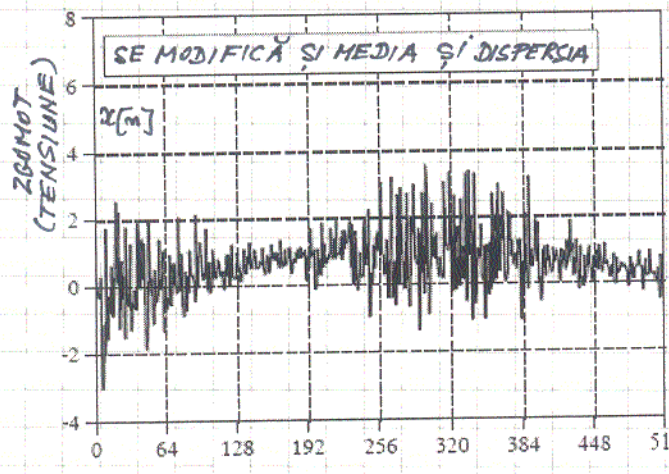
Zgomot alb gaussian, în timp continuu. Fiecare valoare
 ecartul este de $\sim 6\sigma$, σ fiind abaterea standard. Se vede că valorile
 mici ale semnalului apar mai des decât cele mari.



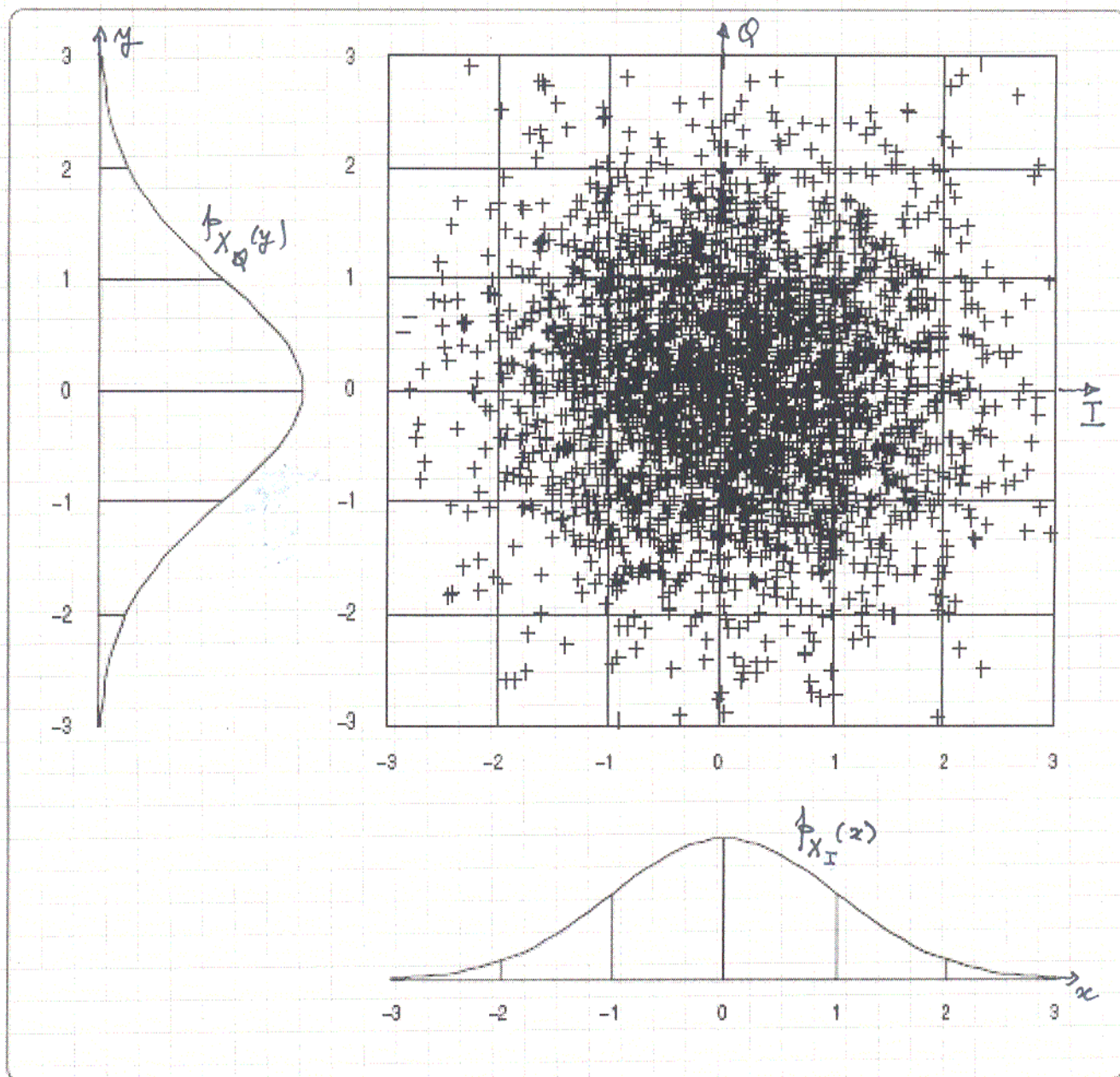
Zgomot alb gaussian, în timp discret. Se observă că valorile
 mici apar mult mai des decât valorile mari, ca și în cazul
 zgomotului alb gaussian în timp continuu.



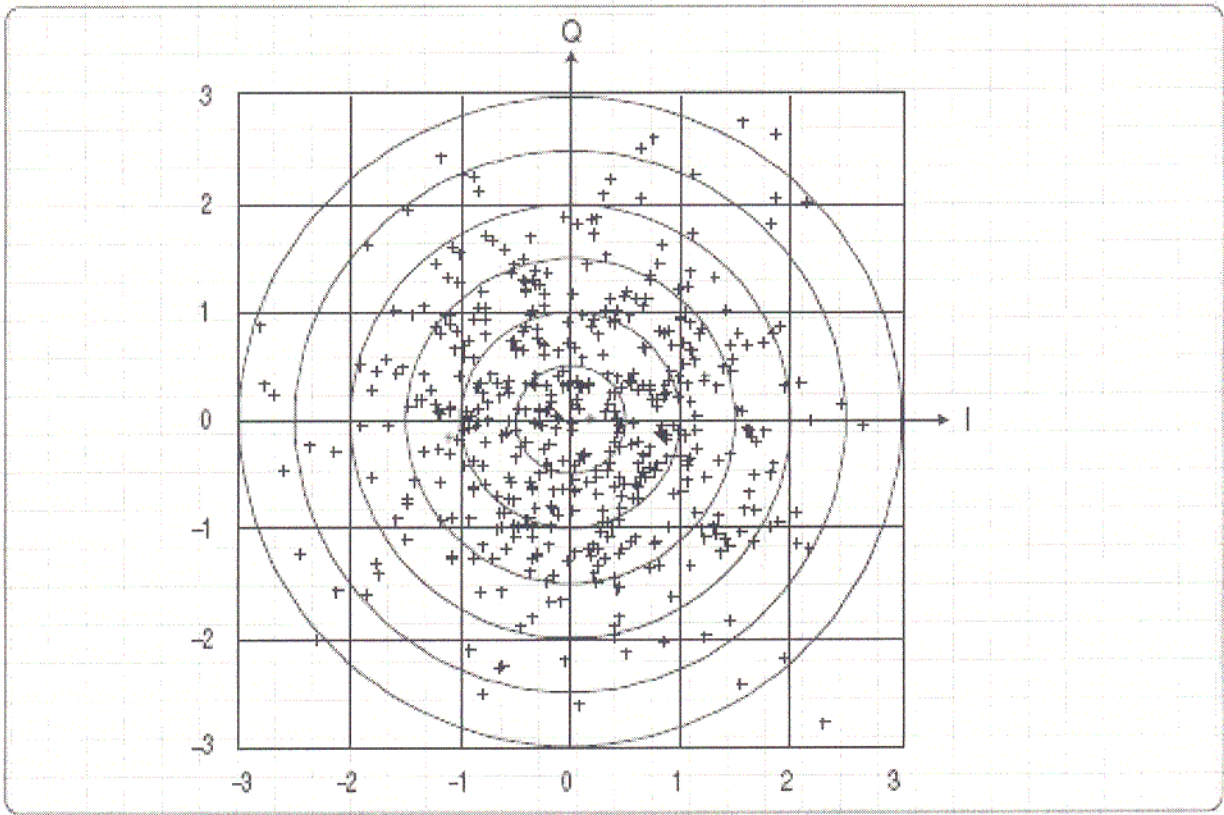
Zgomot "rot". Spre deosebire de zgomotul alb, aici apar valori mari ale zgomotului în domeniul joasei frecvențe.



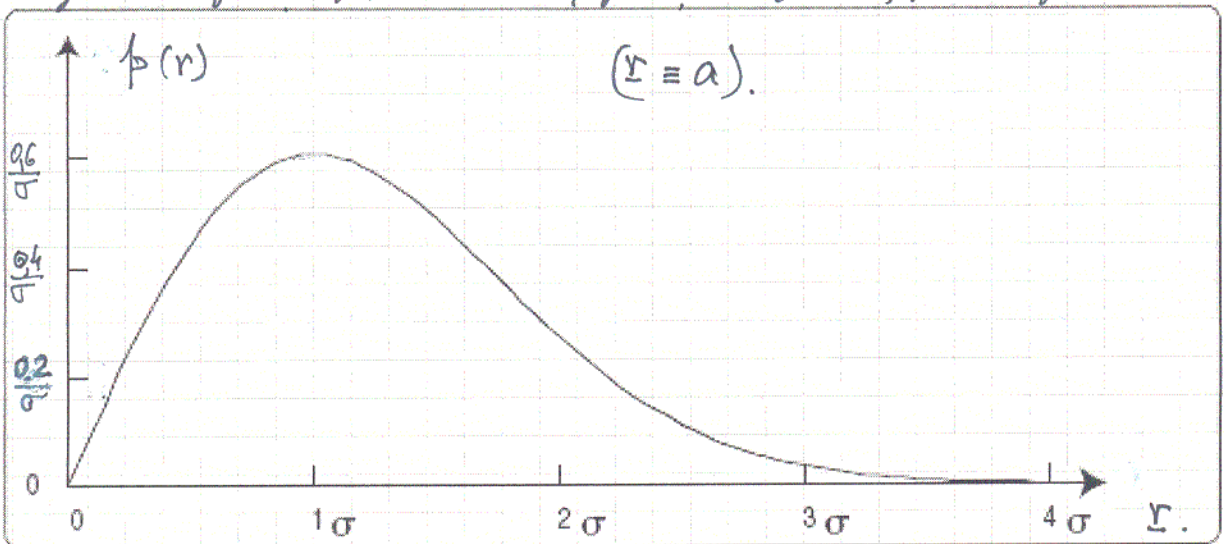
Zgomot nestationar în timp discret. Se observă doar modificarea mediei, în ambele cazuri. Dispersia se modifică în mod evident în primul exemplu.



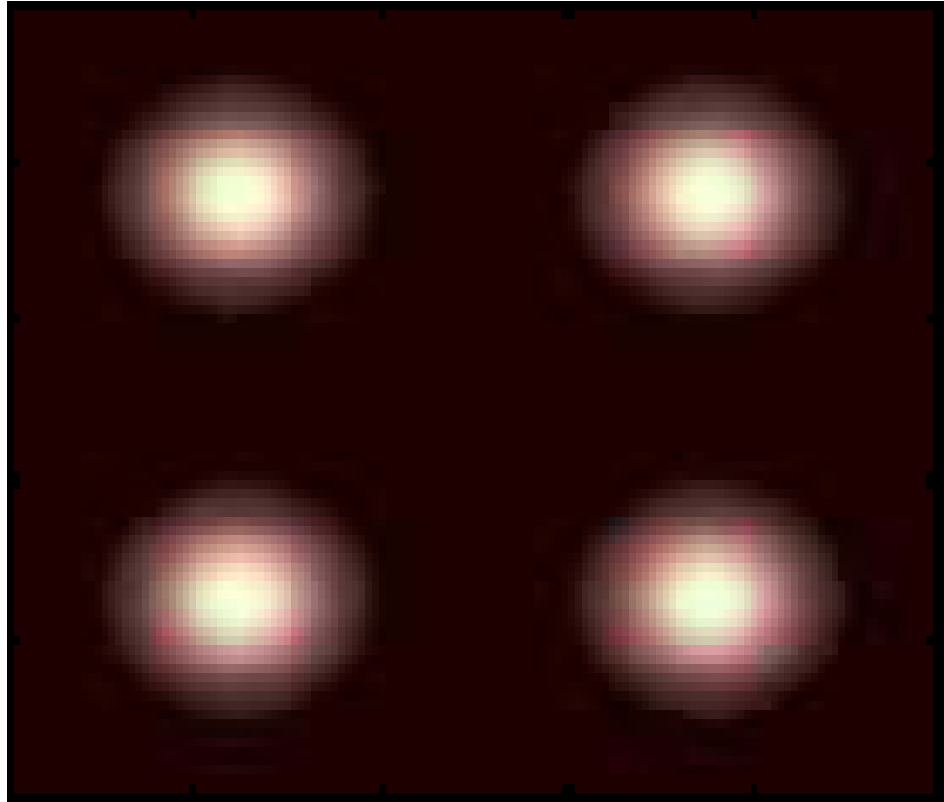
Diagrame de impartiire în jurul unui punct de mesaj. Cele două componente, X_I (în foto) și X_Q (în coordonată) au repartiții identice, $\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = \sigma^2$ și sunt statistic independente. Diagrama de impartiire are o simetrie aproximativ circulară.



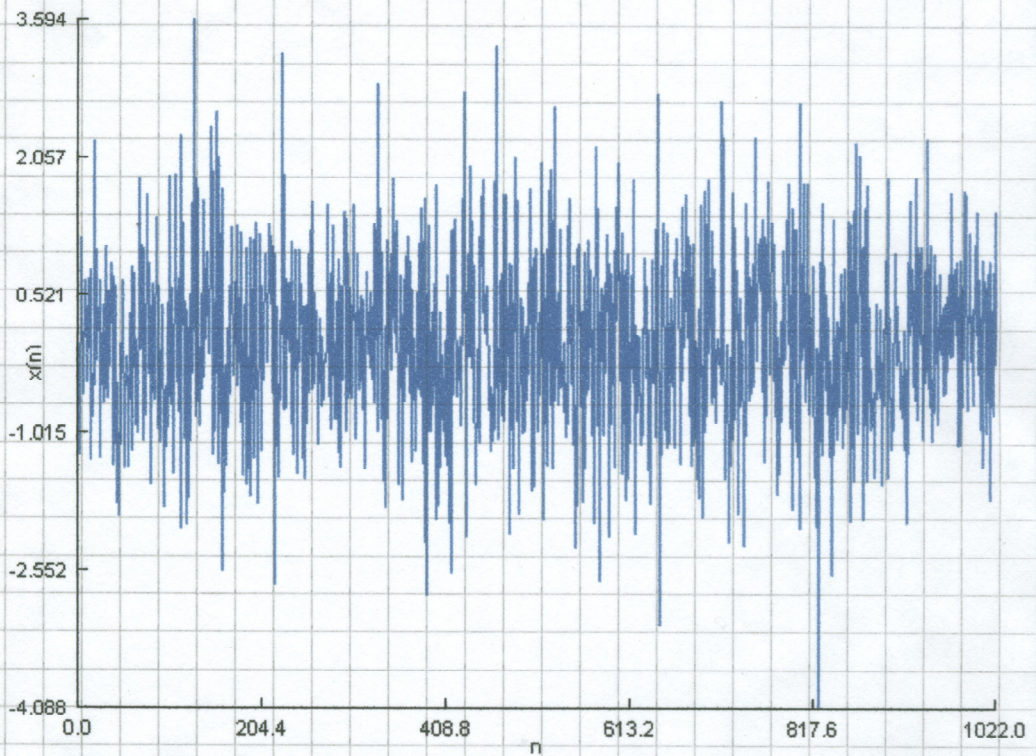
Dacă pe vremea cercului cu deschiderea $\Delta r \rightarrow 0$ ni se deter-
 mină probabilitatea ca un punct de impact să aibă proprietatea
 $r < \sqrt{x_I^2 + x_Q^2} < r + \Delta r$ se obține curba de densitate Rayleigh a
 anvelopei. Cât putea ține ea are o repartiție uniformă, învelișul fiind circular.



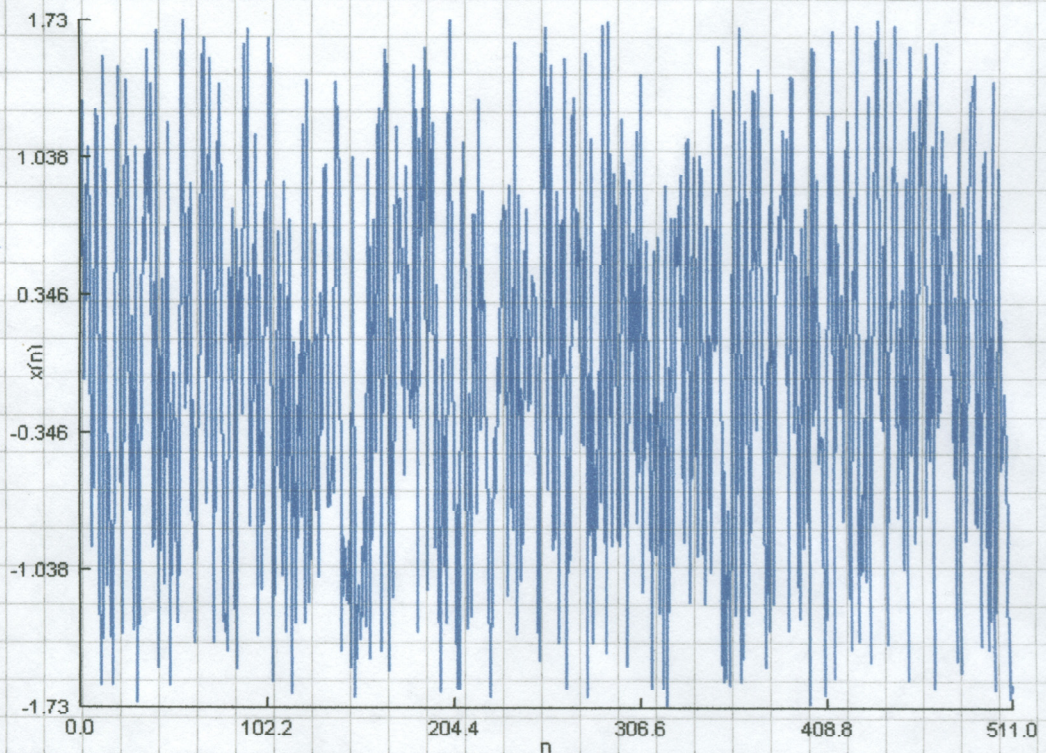
Repartiția Rayleigh a modulelor (anvelopei) în cazul celor două
 componente, X_I, X_Q , identic distribuite, ambele cu media nulă și
 statistic independente. Putem pune puncte (x, y) la o
 distanță medie de 3σ de punctul de mesaj.



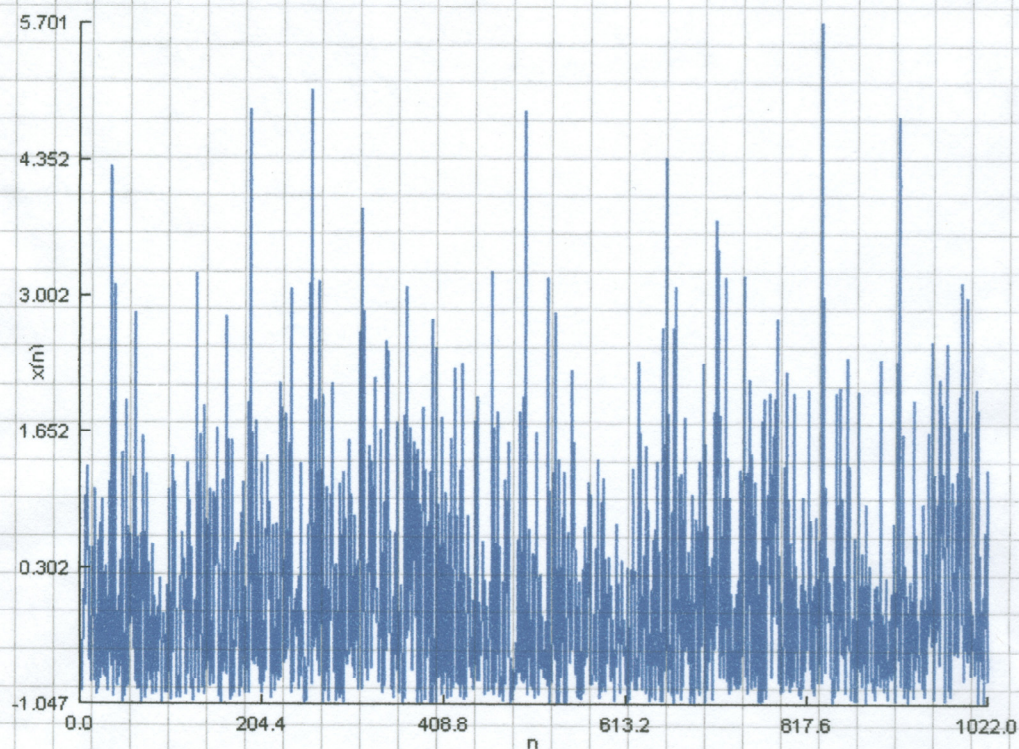
Sistem QPSK afectat de zgomot



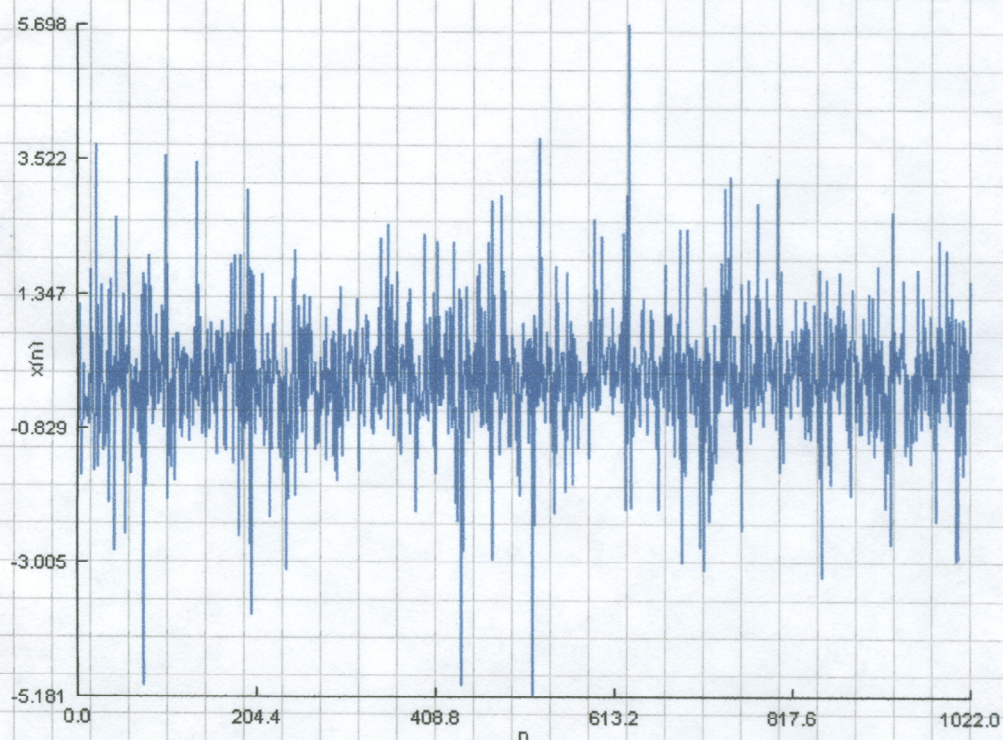
Zgomot alb, gaussian



Zgomot alb cu repartiție uniformă.



Zgomot cu repartiție exponențială



Zgomot alb cu repartiție Laplace. Se vede că valorile
mari afară sunt frecvent decât în cazul zgomotului alb
gaussian.

Table 5.1

Valeurs de la fonction de répartition normale

$$\Phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
-0,00	0,5000	40	-0,30	0,3821	38	-0,60	0,2743	34	-0,90	0,1841	27
-0,01	4960	40	-0,31	3783	38	-0,61	2709	33	-0,91	1814	26
-0,02	4920	40	-0,32	3745	38	-0,62	2676	33	-0,92	1788	26
-0,03	4880	40	-0,33	3707	38	-0,63	2643	32	-0,93	1762	26
-0,04	4840	39	-0,34	3669	37	-0,64	2611	33	-0,94	1736	25
-0,05	4801	40	-0,35	3632	38	-0,65	2578	32	-0,95	1711	26
-0,06	4761	40	-0,36	3594	37	-0,66	2546	32	-0,96	1685	25
-0,07	4721	40	-0,37	3557	37	-0,67	2514	31	-0,97	1660	25
-0,08	4681	40	-0,38	3520	37	-0,68	2483	32	-0,98	1635	24
-0,09	4641	39	-0,39	3483	37	-0,69	2451	31	-0,99	1611	24
-0,10	0,4602	40	-0,40	0,3446	37	-0,70	0,2420	31	-1,00	0,1587	24
-0,11	4562	40	-0,41	3409	37	-0,71	2389	31	-1,01	1563	24
-0,12	4522	39	-0,42	3372	36	-0,72	2358	31	-1,02	1539	24
-0,13	4483	40	-0,43	3336	36	-0,73	2327	30	-1,03	1515	23
-0,14	4443	39	-0,44	3300	36	-0,74	2297	31	-1,04	1492	23
-0,15	4404	40	-0,45	3264	36	-0,75	2266	30	-1,05	1469	23
-0,16	4364	39	-0,46	3228	36	-0,76	2236	30	-1,06	1446	23
-0,17	4325	39	-0,47	3192	36	-0,77	2206	29	-1,07	1423	22
-0,18	4286	39	-0,48	3156	35	-0,78	2177	29	-1,08	1401	22
-0,19	4247	40	-0,49	3121	36	-0,79	2148	29	-1,09	1379	22
-0,20	0,4207	39	-0,50	0,3085	35	-0,80	0,2119	29	-1,10	0,1357	22
-0,21	4168	39	-0,51	3050	35	-0,81	2090	29	-1,11	1335	21
-0,22	4129	39	-0,52	3015	34	-0,82	2061	28	-1,12	1314	22
-0,23	4090	38	-0,53	2981	35	-0,83	2033	28	-1,13	1292	21
-0,24	4052	39	-0,54	2946	34	-0,84	2005	28	-1,14	1271	20
-0,25	4013	39	-0,55	2912	35	-0,85	1977	28	-1,15	1251	21
-0,26	3974	38	-0,56	2877	34	-0,86	1949	27	-1,16	1230	20
-0,27	3936	39	-0,57	2843	33	-0,87	1922	28	-1,17	1210	20
-0,28	3897	38	-0,58	2810	34	-0,88	1894	27	-1,18	1190	20
-0,29	3859	38	-0,59	2776	33	-0,89	1867	26	-1,19	1170	19

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
-1,20	0,1151	20	-1,65	0,0495	10	-3,00	0,0014	4	0,35	0,6368	38
-1,21	1131	19	-1,66	0485	10	-3,10	0010	3	0,36	6406	37
-1,22	1112	19	-1,67	0475	10	-3,20	0007	2	0,37	6443	37
-1,23	1093	18	-1,68	0465	10	-3,30	0005	2	0,38	6480	37
-1,24	1075	19	-1,69	0455	9	-3,40	0003	1	0,39	6517	37
-1,25	1056	18	-1,70	0,0446	10	-3,50	0002	0	0,40	0,6554	37
-1,26	1038	18	-1,71	0436	9	-3,60	0002	1	0,41	6591	37
-1,27	1020	17	-1,72	0427	9	-3,70	0001	0	0,42	6628	36
-1,28	1003	18	-1,73	0418	9	-3,80	0001	1	0,43	6664	36
-1,29	0985	17	-1,74	0409	8	-3,90	0000		0,44	6700	36
-1,30	0,0968	17	-1,75	0401	9	0,00	0,5000	40	0,45	6736	36
-1,31	0951	17	-1,76	0392	8	0,01	5040	40	0,46	6772	36
-1,32	0934	16	-1,77	0384	9	0,02	5080	40	0,47	6808	36
-1,33	0918	17	-1,78	0375	8	0,03	5120	40	0,48	6844	35
-1,34	0901	16	-1,79	0367	8	0,04	5160	39	0,49	6879	36
-1,35	0885	16	-1,80	0,0359	8	0,05	5199	40	0,50	0,6915	35
-1,36	0869	16	-1,81	0351	7	0,06	5239	40	0,51	6950	35
-1,37	0853	15	-1,82	0344	8	0,07	5279	40	0,52	6985	34
-1,38	0838	15	-1,83	0336	7	0,08	5319	40	0,53	7019	35
-1,39	0823	15	-1,84	0329	7	0,09	5359	39	0,54	7054	34
-1,40	0,0808	15	-1,85	0322	8	0,10	0,5398	40	0,55	7088	35
-1,41	0793	15	-1,86	0314	7	0,11	5438	40	0,56	7123	34
-1,42	0778	14	-1,87	0307	6	0,12	5478	39	0,57	7157	33
-1,43	0764	15	-1,88	0301	7	0,13	5517	40	0,58	7190	34
-1,44	0749	14	-1,89	0294	6	0,14	5557	39	0,59	7224	33
-1,45	0735	14	-1,90	0,0288	7	0,15	5596	40	0,60	0,7257	34
-1,46	0721	13	-1,91	0281	7	0,16	5636	39	0,61	7291	33
-1,47	0708	14	-1,92	0274	6	0,17	5675	39	0,62	7324	33
-1,48	0694	13	-1,93	0268	6	0,18	5714	39	0,63	7357	32
-1,49	0681	13	-1,94	0262	6	0,19	5753	40	0,64	7389	33
-1,50	0,0668	13	-1,95	0256	6	0,20	0,5793	39	0,65	7422	32
-1,51	0655	12	-1,96	0250	6	0,21	5832	39	0,66	7454	32
-1,52	0643	13	-1,97	0244	5	0,22	5871	39	0,67	7486	31
-1,53	0630	12	-1,98	0239	6	0,23	5910	38	0,68	7517	32
-1,54	0618	12	-1,99	0233	5	0,24	5948	39	0,69	7549	31
-1,55	0606	12	-2,00	0,0228	49	0,25	5987	39	0,70	0,7580	31
-1,56	0594	12	-2,10	0179	40	0,26	6026	38	0,71	7611	31
-1,57	0582	11	-2,20	0139	32	0,27	6064	39	0,72	7642	31
-1,58	0571	12	-2,30	0107	25	0,28	6103	38	0,73	7673	30
-1,59	0559	11	-2,40	0082	20	0,29	6141	38	0,74	7703	31
-1,60	0,0548	11	-2,50	0062	15	0,30	0,6179	38	0,75	7734	30
-1,61	0537	11	-2,60	0047	12	0,31	6217	38	0,76	7764	30
-1,62	0526	10	-2,70	0035	9	0,32	6255	38	0,77	7794	29
-1,63	0516	11	-2,80	0026	7	0,33	6293	38	0,78	7823	29
-1,64	0505	10	-2,90	0019	5	0,34	6331	37	0,79	7852	29

x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ	x	$\Phi^*(x)$	Δ
0,80	0,7881	29	1,15	0,8749	21	1,50	0,9332	13	1,85	0,9678	8
0,81	7910	29	1,16	8770	20	1,51	9345	12	1,86	9686	7
0,82	7939	28	1,17	8790	20	1,52	9357	13	1,87	9693	6
0,83	7967	28	1,18	8810	20	1,53	9370	12	1,88	9699	7
0,84	7995	28	1,19	8830	19	1,54	9382	12	1,89	9706	7
0,85	8023	28	1,20	0,8849	20	1,55	9394	12	1,90	0,9713	6
0,86	8051	27	1,21	8869	19	1,56	9406	12	1,91	9719	7
0,87	8078	28	1,22	8888	19	1,57	9418	11	1,92	9726	6
0,88	8106	27	1,23	8907	18	1,58	9429	12	1,93	9732	6
0,89	8133	26	1,24	8925	19	1,59	9441	11	1,94	9738	6
0,90	0,8159	27	1,25	8944	18	1,60	0,9452	11	1,95	9744	6
0,91	8186	26	1,26	8962	18	1,61	9463	11	1,96	9750	6
0,92	8212	26	1,27	8980	17	1,62	9474	10	1,97	9756	5
0,93	8238	26	1,28	8997	18	1,63	9484	11	1,98	9761	6
0,94	8264	25	1,29	9015	17	1,64	9495	10	1,99	9767	5
0,95	8289	26	1,30	0,9032	17	1,65	9505	10	2,00	0,9772	49
0,96	8315	25	1,31	9049	17	1,66	9515	10	2,10	9821	40
0,97	8340	25	1,32	9066	16	1,67	9525	10	2,20	9861	32
0,98	8365	24	1,33	9082	17	1,68	9535	10	2,30	9893	25
0,99	8389	24	1,34	9099	16	1,69	9545	9	2,40	9918	20
1,00	0,8413	24	1,35	9115	16	1,70	0,9554	10	2,50	9938	15
1,01	8437	24	1,36	9131	16	1,71	9564	9	2,60	9953	12
1,02	8461	24	1,37	9147	15	1,72	9573	9	2,70	9965	9
1,03	8485	23	1,38	9162	15	1,73	9582	9	2,80	9974	7
1,04	8508	23	1,39	9177	15	1,74	9591	8	2,90	9981	5
1,05	8531	23	1,40	0,9192	15	1,75	9599	9	3,00	0,9986	4
1,06	8554	23	1,41	9207	15	1,76	9608	8	3,10	9990	3
1,07	8577	22	1,42	9222	14	1,77	9616	9	3,20	9993	2
1,08	8599	22	1,43	9236	15	1,78	9625	8	3,30	9995	2
1,09	8621	22	1,44	9251	14	1,79	9633	8	3,40	9997	1
1,10	0,8643	22	1,45	9265	14	1,80	0,9641	8	3,50	9998	0
1,11	8665	21	1,46	9279	13	1,81	9649	7	3,60	9998	1
1,12	8686	22	1,47	9292	14	1,82	9656	8	3,70	9999	0
1,13	8708	21	1,48	9306	13	1,83	9664	7	3,80	9999	1
1,14	8729	20	1,49	9319	13	1,84	9671	7	3,90	1,0000	