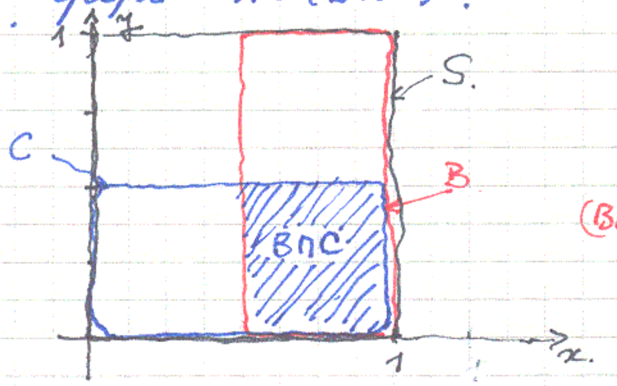
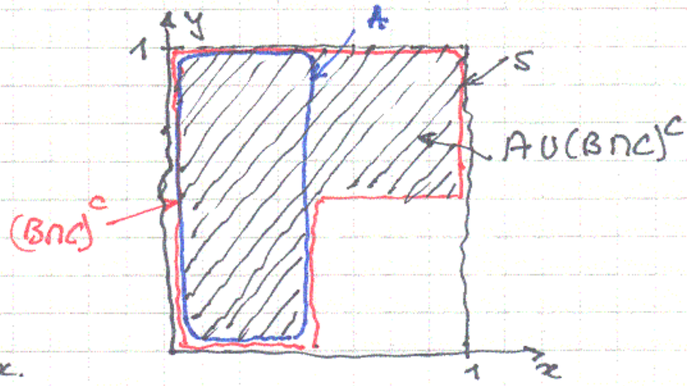
1. Mulțimile A, B, C sunt submulțimi ale lui $S = \{(x,y) : 0 \le x \le 1$ și $0 \le y \le 1.\}$ Ele se definesc prin $A = \{(x,y) : x \le \frac{1}{2},\ 0 \le y \le 1\}$ $B = \{(x,y) : x \ge 1/2,\ 0 \le y \le 1\}$ și $C = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y \le \frac{1}{2}\}$. Determinați grafic $A \cup (B \cap C)^c$.





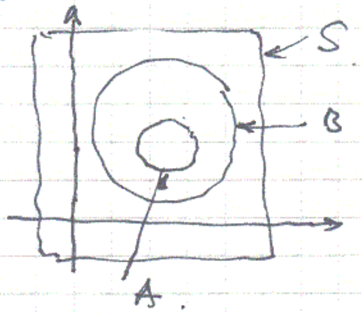
2. Dacă mulțimea $S = \{A, B, C\}$ conține trei evenimente elementare, care sunt toate evenimentele posibile?

Se știe că sunt $2^N = 2^3 = 8$ evenimente posibile. Ele sunt:

$\{\Phi \quad \{A\} \quad \{B\} \quad \{C\} \quad \{A,B\} \quad \{A,C\} \quad \{B,C\} \quad \{A,B,C\}.\}$

3. Dacă $A \subset B$ determinați $P\{B|A\}$. Explicați rezultatul.

$$P\{B|A\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}$$



Așa cum se vede și din figură

$A \cap B = AB = A$ și deci $P\{AB\} = P\{A\}$

În consecință

$P\{B|A\} = 1$, dacă $A \subset B$.

Dacă evenimentul A s-a produs, cum $A \subset B$, rezultă că s-a produs și evenimentul B. De aici $P\{B|A\} = 1$

3. Un punct $x \in (0,1)$ este ales la întâmplare. Probabilitatea ca el să cadă într-un interval de lungime l este $\frac{l}{1} = l$. Știind că s-a produs evenimentul $x \ge \frac{1}{2}$, determinați probabilitatea ca $x \ge \frac{7}{8}$

$$P\{x \ge \tfrac{7}{8} | x \ge \tfrac{1}{2}\} = \frac{P\{x \ge \frac{7}{8} \cap x \ge \frac{1}{2}\}}{P\{\frac{1}{2}\}} = \frac{P\{\frac{7}{8}\}}{P\{\frac{1}{2}\}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{4}.$$

4. Un sistem de comunicații digitale transmite unul din următoarele trei niveluri continue, -1, 0, 1. Ca urmare a zgomotului din canal apar erori. Probabilitățile acestor erori sunt: $\frac{1}{8}$ când se transmite -1, sau 1 și $\frac{3}{4}$ când se transmite 0.

$P\{eroare \mid -1\} = P\{eroare \mid 1\} = \frac{1}{8}$

$P\{eroare \mid 0\} = \frac{3}{4}$.

Dacă probabilitățile apriorice de transmitere a celor trei niveluri sunt $P\{-1\} = P\{1\} = \frac{1}{4}$ și $P\{0\} = \frac{1}{2}$, determinați probabilitatea medie statistică a erorii de transmisie.

Repetați calculul și pentru $P\{-1\} = P\{0\} = P\{1\} = \frac{1}{3}$.

$$P_e = P\{eroare \mid -1\} P\{-1\} + P\{eroare \mid 0\} P\{0\} + P\{eroare \mid 1\} P\{1\}$$

Pentru primul caz:

$$P_{e1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$$

Pentru al doilea caz:

$$P_{e2} = \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < P_{e1}$$

Se vede că transmiterea lui zero comportă un număr mare de erori. În al doilea caz probabilitatea de transmitere a lui zero este mai mică, ceea ce explică și rata mai redusă a erorilor.

5. Arătați că:

i) $\operatorname{cov}\{X, cY\} = c \operatorname{cov}\{X, Y\}$; $\operatorname{cov}\{cX, Y\} = c \operatorname{Cov}\{X, Y\}$

ii) $\operatorname{cov}\{X, X+Y\} = \operatorname{cov}\{X, Y\} + \operatorname{cov}\{X, Y\}$;

$\operatorname{cov}\{X+Y, Y\} = \operatorname{cov}\{X, X\} + \operatorname{cov}\{Y, X\}$

i) $$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\{X, cY\} &= E_{X,Y}\{(X - E_X\{X\})(cY - E_Y\{cY\})\} \\ &= E_{X,Y}\{(X - E_X\{X\})(cY - cE_Y\{Y\})\} \\ &= c E_{X,Y}\{(X - E_X\{X\})(Y - E_Y\{Y\})\} \\ &= c \operatorname{Cov}\{X, Y\}\end{aligned}$$

La fel perechea ei.

ii) $$\begin{aligned}\operatorname{Cov}\{X, X+Y\} &= E_{X,Y}\{(X - E_X\{X\})(X + Y - E_{X,Y}\{X+Y\})\} \\ &= E_{X,Y}\{(X - E_X\{X\})(X - E_X\{X\} + Y - E_Y\{Y\})\}\end{aligned}$$

$$= E_{X,Y}\{(X-E_X\{X\})^2\} + E_{X,Y}\{(X-E_X\{X\})(Y-E_Y\{Y\})\}$$

$$= \mathrm{cov}\{X,X\} + \mathrm{cov}\{X,Y\}$$

La fel se demonstrează și perechea ei.

6. Două v.a. X și Y sunt corelate, având $\mathrm{cov}\{X,Y\}$ cunoscută. Pentru decorelare putem transforma X, Y în W, Z cu

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad a = -\frac{\mathrm{cov}\{X,Y\}}{\mathrm{cov}\{X,X\}}$$

Calculați $\mathrm{cov}\{W,Z\}$ și arătați că s-a produs decorelarea.

a) Avem

$$W = X$$

$$Z = aX + Y$$

$$\mathrm{Cov}\{W,Z\} = \mathrm{cov}\{X, aX+Y\} = \mathrm{cov}\{X, aX\} + \mathrm{cov}\{X,Y\}$$

$$= a\,\mathrm{cov}\{X,X\} + \mathrm{cov}\{X,Y\}$$

$$= -\frac{\mathrm{cov}\{X,Y\}}{\mathrm{cov}\{X,X\}}\mathrm{cov}\{X,X\} + \mathrm{cov}\{X,Y\} = 0$$

Cum covarianța mutuală e nulă, cele două v.a. W și Z sunt necorelate.

b) Fie $\vec{U} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, $\vec{V} = \begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$ și $\vec{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$

Avem $\vec{V} = \vec{G}\vec{U}$ și $\vec{C}_V = \vec{G}\vec{C}_U\vec{G}^T$

$$\vec{C}_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{cov}\{X,X\} & \mathrm{cov}\{X,Y\} \\ \mathrm{cov}\{Y,X\} & \mathrm{cov}\{Y,Y\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;;\; \mathrm{cov}\{X,Y\} = \mathrm{cov}\{Y,X\}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{cov}\{X,X\} & \mathrm{cov}\{X,Y\} \\ a\,\mathrm{cov}\{X,X\} + \mathrm{cov}\{X,Y\} & \mathrm{cov}\{Y,Y\} + a\,\mathrm{cov}\{X,Y\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{cov}\{X,X\} & a\,\mathrm{cov}\{X,X\} + \mathrm{cov}\{X,Y\} \\ a\,\mathrm{cov}\{X,X\} + \mathrm{cov}\{X,Y\} & a^2\mathrm{cov}\{X,X\} + 2a\,\mathrm{cov}\{X,Y\} + \mathrm{cov}\{Y,Y\} \end{bmatrix}$$

Obținem că

$$\mathrm{Cov}\{W,Z\} = \mathrm{cov}\{X,Y\} + a\,\mathrm{cov}\{X,X\} = 0$$

7. Calculați pentru v.a. Y $\mu_Y = E\{Y\}$ și $\sigma_Y^2 = E\{\overset{\circ}{Y}^2\}$ unde $\overset{\circ}{Y} = Y - \mu_Y$, cunoscând că

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad ; \mu_X = E\{X\} \text{ și } \sigma_X^2 = E\{\overset{\circ}{X}^2\}$$

$$E\{Y\} = E\left\{ \frac{1}{\sigma_X} X - \frac{\mu_X}{\sigma_X} \right\} = \frac{1}{\sigma_X} E\{X\} - \frac{\mu_X}{\sigma_X} = \frac{\mu_X}{\sigma_X} - \frac{\mu_X}{\sigma_X} = 0$$

adică $\mu_Y = 0$.

$$E\{\overset{\circ}{Y}^2\} = E\{(Y-0)^2\} = E\left\{\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right\} = E\left\{\frac{\overset{\circ}{X}^2}{\sigma_X^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_X^2} E\{\overset{\circ}{X}^2\} = \frac{1}{\sigma_X^2}\sigma_X^2 = 1$$

adică $\sigma_Y^2 = 1$

8. Arătați că, dacă $Y = aX + b$, a și b fiind constante, pentru $a > 0$ $\rho_{X,Y} = 1$ iar pentru $a < 0$ $\rho_{X,Y} = -1$

Avem $\text{cov}\{X, aX+b\} = a\,\text{cov}\{X,X\} + \text{cov}\{X, b\}$

Dar $\text{cov}\{X, b\} = E\{(X - E\{X\})(b - E\{b\})\}$

$$= E\{(X - E\{X\})(b - b)\}$$

$$= 0$$

așa că:

$$\text{cov}\{X, aX+b\} = a\,\text{cov}\{X,X\}$$

$$\text{Disp}\{X\} = \text{cov}\{X, X\}$$

$$\text{Disp}\{Y\} = \text{Disp}\{aX+b\} = a^2\,\text{Disp}\{X\}$$

Conform definiției:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}\{X,Y\}}{\sqrt{\text{Disp}\{X\}\,\text{Disp}\{Y\}}} = \frac{a\,\text{cov}\{X,X\}}{\sqrt{a^2\,\text{Disp}^2\{X\}}}$$

$$= \frac{a}{|a|} \cdot \frac{\text{cov}\{X,X\}}{\text{Disp}\{X\}} = \text{sgn}\, a.$$

9. În tabel se definește un cuplu de v.a. discrete, X și Y ce pot lua valorile 0 și 1 fiecare.

$X \backslash Y$	$j=0$	$j=1$	$P_X\{i\}$
$i=0$	$P_{X,Y}\{0,0\}=\frac{1}{8}$	$P_{X,Y}\{0,1\}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$
$i=1$	$P_{X,Y}\{1,0\}=\frac{1}{4}$	$P_{X,Y}\{1,1\}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$
$P_Y\{j\}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$	

Calculați $E_X\{X\}$, $E_Y\{Y\}$, $Cov\{X,Y\}$, $Disp\{X\}$, $Disp\{Y\}$ și $\rho_{X,Y}$.

$$P_X\{i\} = \sum_{j=0}^{1} P_{X,Y}\{i,j\} \qquad i=0,1$$

$$P_Y\{j\} = \sum_{i=0}^{1} P_{X,Y}\{i,j\} \qquad j=0,1$$

Valorile se văd în tabel. Vom verifica corectitudinea sa:

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{X,Y}\{i,j\} = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1 \text{ , corect.}$$

$$\sum_{i=0}^{1} P_X\{i\} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1 \text{ , corect}$$

$$\sum_{j=0}^{1} P_Y\{j\} = \frac{3}{8}+\frac{5}{8} = 1 \text{ , corect.}$$

$$E_X\{X\} = \sum_{i=0}^{1} i P_X\{i\} = P_X\{1\} = \frac{3}{4}.$$

$$E_Y\{Y\} = \sum_{j=0}^{1} j P_Y\{j\} = P_Y\{1\} = \frac{5}{8}$$

$$E_{X,Y}\{XY\} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} ij P_{X,Y}\{i,j\} = P_{X,Y}\{1,1\} = \frac{1}{2}.$$

$$Cov\{X,Y\} = E_{X,Y}\{X,Y\} - E_X\{X\}E_Y\{Y\}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8} = \frac{1}{32}$$

$$Disp\{X\} = E_X\{X^2\} - E_X^2\{X\} = \sum_{i=0}^{1} i^2 P_X\{i\} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = P_X\{1\} - \frac{3^2}{4^2}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$$

$$Disp\{Y\} = E_Y\{Y^2\} - E_Y^2\{Y\} = \sum_{j=0}^{1} j^2 P_Y\{j\} - \frac{5^2}{8^2} = P_Y\{1\} - \frac{25}{64} = \frac{5}{8} - \frac{25}{64} = \frac{15}{64}$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov\{X,Y\}}{\sqrt{Disp\{X\}Disp\{Y\}}} = \frac{\frac{1}{32}}{\sqrt{\frac{3}{16}\cdot\frac{15}{64}}} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{3\sqrt{5}}{32}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \approx 0,149.$$

10. În tabel se dă repartiția unui cuplu de v.a. X și Y ce pot lua doar valorile 0 și 1. Determinați repartițiile marginale, $P_X\{i\}$, $P_Y\{j\}$ și coeficientul de corelație, $\rho_{X,Y}$.

X \ Y	j=0	j=1
i=0	$P_{X,Y}\{0,0\}=\frac{3}{8}$	$P_{X,Y}\{0,1\}=\frac{1}{8}$
i=1	$P_{X,Y}\{1,0\}=\frac{1}{8}$	$P_{X,Y}\{1,1\}=\frac{3}{8}$

$$P_X\{i\} = \sum_{j=0}^{1} P_{X,Y}\{i,j\} \quad i=0,1; \quad P_Y\{j\} = \sum_{i=0}^{1} P_{X,Y}\{i,j\} \quad j=0,1.$$

$$P_X\{0\} = \frac{3}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}; \quad P_X\{1\} = \frac{1}{8}+\frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$P_Y\{0\} = \frac{3}{8}+\frac{1}{8} = \frac{1}{2}; \quad P_Y\{1\} = \frac{1}{8}+\frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$E_X\{X\} = \sum_{i=0}^{1} i P_X\{i\} = P_X\{1\} = \frac{1}{2}; \quad E_Y\{Y\} = \sum_{j=0}^{1} j P_Y\{j\} = P_Y\{1\} = \frac{1}{2}.$$

$$E_{X,Y}\{XY\} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} ij P_{X,Y}\{i,j\} = P_{X,Y}\{1,1\} = \frac{3}{8}$$

$$Cov\{X,Y\} = E_{X,Y}\{XY\} - E_X\{X\}E_Y\{Y\} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$E_X\{X^2\} = \sum_{i=0}^{1} i^2 P_X\{i\} = P_X\{1\} = \frac{1}{2}; \quad E_Y\{Y^2\} = \sum_{j=0}^{1} j^2 P_Y\{j\} = P_Y\{1\} = \frac{1}{2}$$

$$Disp\{X\} = E_X\{X^2\} - E_X^2\{X\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$Disp\{Y\} = E_Y\{Y^2\} - E_Y^2\{Y\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov\{X,Y\}}{\sqrt{Disp\{X\}Disp\{Y\}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Ca verificare

$$\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} P_{X,Y}\{i,j\} = \frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{8} = 1, \text{ corect.}$$

11. În tabel se dă repartiția a două v.a. ce pot lua, fiecare, valorile 1, 2 și 3. În căsuțe sunt înscrise valorile probabilităților $P_{X,Y}\{i,j\}$

X \ Y	j = 1	j = 2	j = 3
i = 1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
i = 2	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
i = 3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

Determinați $P_{Y|X}\{j|i\}$

Sunt cele două v.a. X și Y independente statistic?

Avem

$$P_{Y|X}\{j|i\} = \frac{P_{X,Y}\{i,j\}}{P_X\{i\}}$$

$$P_X\{i\} = \sum_{j=1}^{3} P_{X,Y}\{i,j\} \quad , i = 1,2,3$$

$$P_X\{1\} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10}; \; P_X\{2\} = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10}; \; P_X\{3\} = \frac{3}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{10}$$

$$P_{Y|X}\{j|1\} = \frac{P_{X,Y}\{1,j\}}{P_X\{1\}} \qquad j = 1,2,3.$$

adică

$$P_{Y|X}\{1|1\} = \frac{P_{X,Y}\{1,1\}}{P_X\{1\}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}; \; P_{Y|X}\{2|1\} = \frac{P_{X,Y}\{1,2\}}{P_X\{1\}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$$

$$P_{Y|X}\{3|1\} = \frac{P_{X,Y}\{1,3\}}{P_X\{1\}} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{Y|X}\{j|2\} = \frac{P_{X,Y}\{2,j\}}{P_X\{2\}} \qquad j = 1,2,3$$

$$P_{Y|X}\{1|2\} = \frac{P_{X,Y}\{2,1\}}{P_X\{2\}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{2}{10}} = \frac{1}{4}; \; P_{Y|X}\{2|2\} = \frac{P_{X,Y}\{2,2\}}{P_X\{2\}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{2}{10}} = \frac{1}{4};$$

$$P_{Y|X}\{3|2\} = \frac{P_{X,Y}\{2,3\}}{P_X\{2\}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}} = \frac{1}{2}$$

$$P_{Y|X}\{j|3\} = \frac{P_{X,Y}\{3,j\}}{P_X\{3\}}$$

$$P_{Y|X}\{1|3\} = \frac{P_{X,Y}\{3,1\}}{P_X\{3\}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{4}; \; P_{Y|X}\{2|3\} = \frac{P_{X,Y}\{3,2\}}{P_X\{3\}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{8}; \; P_{Y|X}\{3|3\} = \frac{P_{X,Y}\{3,3\}}{P_X\{3\}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{8}$$

Avem $P_Y\{j\} = \sum_{i=1}^{3} P_{X,Y}\{i,j\}$, $j = 1,2,3$ și deci

$$P_Y\{1\} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{3}{10} = \frac{9}{20}; \; P_Y\{2\} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{4}{20}; \; P_Y\{3\} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$$

Pentru ca v.a. X și Y să fie statistic independente ar fi necesar ca

$$P_{Y|X}\{j|i\} = P_Y\{j\} \quad , \forall i = 1,2,3.$$

Dar $P_{Y|X}\{j|1\}$ este $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ în timp ce $P_Y\{j\}$ este $\{\frac{9}{20}, \frac{4}{20}, \frac{7}{20}\}$ deci X și Y nu sunt statistic independente

12. Poate fi

$$P_{X_1,X_2,X_3}\{k_1,k_2,k_3\} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_2} \qquad \begin{array}{l} k_1 = 0, 1, 2, \dots \to \infty \\ k_2 = 0, 1, 2, \dots \to \infty \\ k_3 = -1, 0, 1. \end{array}$$

o funcție de repartiție a unei probabilități pentru vectorul aleator $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$?

Condițiile sunt: 1. $P_{X_1,X_2,X_3}\{k_1,k_2,k_3\} \geq 0$, $\forall k_1, \forall k_2, \forall k_3$ care este, evident, îndeplinită și

2. $$\sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{k_3} P_{X_1,X_2,X_3}\{k_1,k_2,k_3\} = 1$$

suma fiind efectuată pentru toate valorile posibile ale variabilelor k_i.

În cazul de față:

$$\sum_{k_3=-1}^{1}\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_2} = 3\cdot\frac{1}{8}\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k_2}$$

$$= \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{8}\cdot 2\cdot\frac{4}{3} = 1$$

Concluzia este că $P_{X_1,X_2,X_3}\{k_1,k_2,k_3\}$ dată este o repartiție.

13. Matricea de covarianță a vectorului $\vec{X} = [X_1 \;\; X_2 \;\; X_3]^T$ este

$$\vec{C}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Verificați că $\vec{C}_X$ dat poate fi o matrice de covarianță. Determinați apoi coeficienții de corelație între componentele vectorului, ρ_{X_1,X_2}, ρ_{X_2,X_3}, ρ_{X_3,X_1}.

$\vec{C}_X$ are o formă de matrice simetrică, cu elementele de pe diagonală (dispersii) pozitive. Rămâne să vedem dacă este pozitiv semidefinită. Calculăm determinanții

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6-4 = 2 > 0$$

$\vec{C}_X$ este deci simetrică pozitiv definită deci poate fi matrice de covarianță.

Elementele de pe diagonală sunt $\sigma_1^2 = 1$, $\sigma_2^2 = 2$ și $\sigma_3^2 = 4$.

$Cov\{X_1, X_2\} = 0$ (linia 1-a, coloana 2-a) $\Rightarrow \rho_{X_1,X_2} = 0$ (necorelate)

$Cov\{X_2, X_3\} = 2$ (linia 2-a, coloana 3-a).

$$\rho_{X_2,X_3} = \frac{\mathrm{cov}\{X_2,X_3\}}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{2\cdot 4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$$

$\mathrm{Cov}\{X_3, X_1\} = 1$ $\qquad \rho_{X_3,X_1} = \dfrac{\mathrm{cov}\{X_3,X_1\}}{\sqrt{\sigma_3^2\sigma_1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}.$

14. Vectorul aleator $\vec{X} = [X_1 \; X_2]^T$ are media $\vec{\mu}_X = [3 \; 4]^T$ și matricea de covarianță $\vec{C}_X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vectorul aleator $\vec{X}$ se transformă în vectorul aleator $\vec{Y} = [Y_1 \; Y_2]^T$ conform regulii

$$Y_1 = X_1$$
$$Y_2 = X_1 + X_2$$

Determinați $\vec{\mu}_Y$ și $\vec{C}_Y$ și ρ_{Y_1,Y_2}

Avem
$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \vec{Y} = \vec{G}\vec{X}$$

$$E_Y\{\vec{Y}\} = \vec{A}E_X\{\vec{X}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \vec{\mu}_Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\vec{C}_Y = \vec{G}\vec{C}_X\vec{G}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$\sigma_{Y_1}^2 = 2 \qquad \sigma_{Y_2}^2 = 6$ și $\mathrm{Cov}\{Y_1, Y_2\} = 3$

Rezultă $\rho_{Y_1,Y_2} = \dfrac{\mathrm{cov}\{Y_1,Y_2\}}{\sqrt{\sigma_{Y_1}^2\sigma_{Y_2}^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2\cdot 6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866.$

15. Vectorul aleator $\vec{X} = [X_1 \; X_2]^T$ are matricea de covarianță $\vec{C}_X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Determinați matricea de transformare $\vec{G}$ care conduce la decorelarea componentelor vectorului $\vec{Y} = \vec{G}\vec{X}$

Se determină vectorii proprii ai matricei $\vec{C}_X$.

$$\det(\vec{C}_X - \lambda\vec{I}_n) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 1 = 0$$

sau $\quad 4-\lambda = \pm 1 \qquad \lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 3.$

Apoi
$$[\vec{C}_X - \lambda_1\vec{I}_n]\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_{11} = v_{12} \text{ și } v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1$$

Rezultă $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

Apoi $[\vec{C}_X - \lambda_2 \vec{I}_n]\vec{v}_2 = \vec{0}$ $\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\ v_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$

$v_{21} = -v_{22}$ și $v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$ $\quad v_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad v_{22} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Matricea modală este

$$\vec{V} = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

$$\vec{V}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\vec{V}^T\vec{C}_X\vec{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & 5\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

Luăm

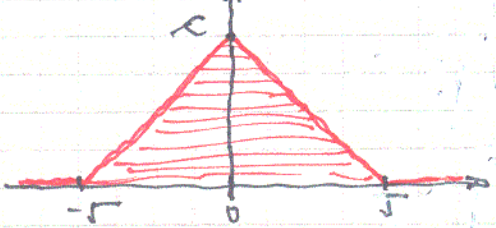
$$\vec{G} = \vec{V}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Se definește transformarea care conduce la decorelarea componentelor Y_1 și Y_2:

$$\vec{C}_Y = \vec{V}^T\vec{C}_X\vec{V} = \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}; \quad \sigma_{Y_1}^2 = 5, \ \sigma_{Y_2}^2 = 3 \quad \rho_{Y_1,Y_2} = 0.$$

16. Determinați constanta c astfel încât $g(x) = c\left(1 - \left|\frac{x}{5}\right|\right)$, $|x| < 5$ și zero în rest, să fie o densitate de probabilitate.

Trebuie ca $p(x) \geq 0$, ceea ce este îndeplinit pentru $c>0$, iar aria de sub curbă să fie unitară. Funcția $g(x)$ este reprezentată în figură, pentru $c>0$.



Aria este $10 \cdot c$. Impunem $10c = 1$ și deci $c = 5^{-1}$.

17. Dacă X este o v.a cu repartiție gaussiană de medie nulă și dispersie $\sigma_X^2 = 1$ determinați $P\{X > 3\}$. Dacă Y este o v.a cu distribuție laplaceană și dispersie unitară, $\sigma_Y^2 = 1$ determinați $P\{Y > 3\}$

$$P\{X > 3\} = Q(3) \cong 1{,}35 \cdot 10^{-3}$$

$$P\{Y > 3\} = \int_3^\infty \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}x} dx = -\frac{1}{2}\int_3^\infty e^{-\sqrt{2}x} d(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}x}\Big|_\infty^3$$

$$= \frac{1}{2} e^{-3\sqrt{2}} = 7{,}18 \cdot 10^{-3}$$

Se vede că $P\{Y > 3\} > P\{X > 3\}$ coada distribuției Laplace fiind mai accentuată ca a distribuției normale.

18. Fie $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Arătați că

$$P\{a \leq X \leq b\} = Q\left(\frac{b-\mu}{\sqrt{\sigma}}\right) - Q\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

$$P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} d\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \phi^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - Q\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \left[1 - Q\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$= Q\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

19. Dacă v.a X este repartizată exponențial, cu parametrul λ,

$$p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

determinați $p_Y(y)$ dacă $Y = X^4 + 1$.

Transformarea este dată de $y = x^4 + 1$, $y = g(x)$. Funcția inversă este $x = (y-1)^{\frac{1}{4}} = g^{-1}(y)$.

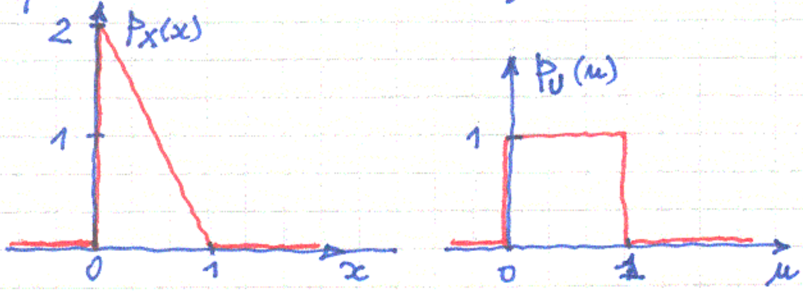
Avem :
$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{4}(y-1)^{-\frac{3}{2}} \geq 0.$$

$$p_Y(y) = p_X\left(g^{-1}(y)\right) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|$$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda (y-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{4}(y-1)^{-\frac{3}{4}} & y \geq 1 \quad (x \geq 0) \\ 0 & y < 1 \quad (x \leq 0) \end{cases}$$

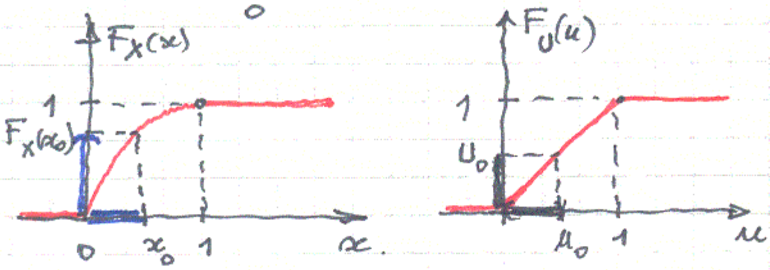
$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{4(y-1)^{\frac{3}{4}}} e^{-\lambda (y-1)^{\frac{1}{4}}} & y > 1 \\ 0 & y \leq 0. \end{cases}$$

20. Determinați transformarea g, a.î. $X = g(U)$, $U \sim \mathcal{U}[0,1]$, să aibă densitatea de probabilitate din figură



$$F_X(x) = \int_0^x p_X(t)\,dt = \int_0^x 2(1-t)\,dt = 2t - t^2 \Big|_0^x = 2x - x^2$$

$$F_U(u) = \int_0^u dt = u$$



$F_X(x) = P\{X \leq x\}$

$F_U(u) = P\{U \leq u\}$

$P\{X \leq x\} = P\{U \leq u\}$

$2x - x^2 = u$

$x^2 - 2x + u = 0 \qquad x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-u^2}$. Dar $x \in (0,1)$ și

deci $\quad x = 1 - \sqrt{1-u^2}, \quad u \in (0,1).$

Prin urmare

$$X = 1 - \sqrt{1-U^2}$$

Dacă se generează un număr aleator uniform distribuit între 0 și 1, cu relația stabilită se generează X cu $p_X(x)$ din figură.

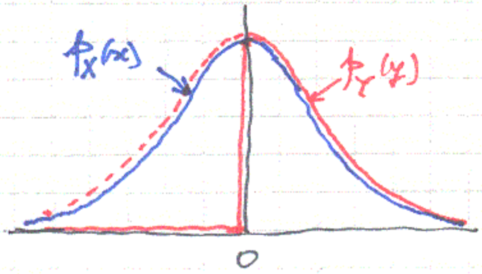
21. Dacă $X \sim \mathcal{U}[0,1]$, determinați $p_Y(y)$ pentru $Y = X^3$.

$$y = g(x) = x^3 \qquad x = g^{-1}(y) = y^{\frac{1}{3}} \qquad x \in [0,1] \Rightarrow y \in [0,1].$$

$$\frac{dg^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$p_Y(y) = p_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| = 1 \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 y^{\frac{2}{3}}} \qquad y \in (0,1).$$

22. Un detector permite trecerea componentei continue și a valorilor pozitive. Dacă la intrarea sa se aplică o tensiune $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ care este puterea medie a semnalului de la ieșire?



$$E\{Y^2\} = \int_0^\infty y^2 p_Y(y)\,dy$$

$$= \int_0^\infty x^2 p_X(x)\,dx = \frac{\sigma^2}{2}.$$

$$E\{Y^2\} = \frac{1}{2} E\{X^2\}.$$

23. O densitate de probabilitate de tipul mixtură între o distribuție $\delta(x)$ – Dirac – și o distribuție gaussiană pentru $x > 0$ este

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} u(x) \; ; \quad u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Determinați puterea medie a v.a. X și dați o interpretare fizică pentru X.

$$E\{X^2\} = \int_0^\infty \frac{x^2}{2}\delta(x) + \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{0}{2} + \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

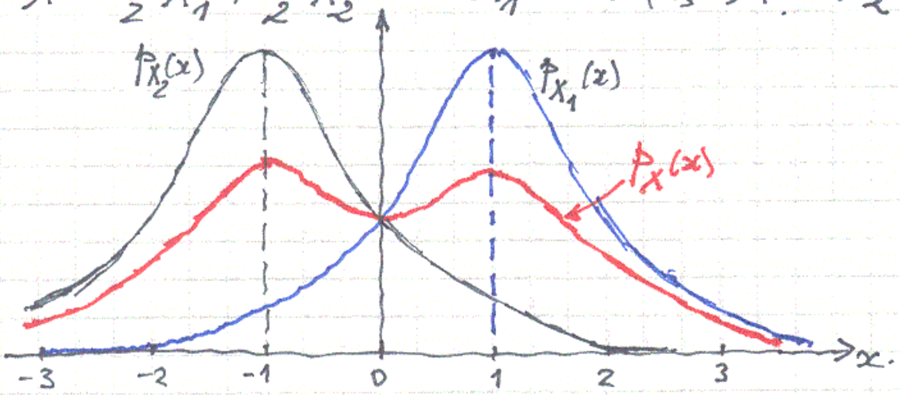
Densitatea de repartiție este corespunzătoare detectorului, $\frac{1}{2}\delta(x)$ fiind componenta continuă (mai precis repartiția ei).

24. Pentru mixtura gaussiană X,

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$$

determinați media și dispersia. Schițați $f_X(x)$.

$X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$ $\quad X_1 \sim N(1, 1)$ și $X_2 \sim N(-1, 1)$



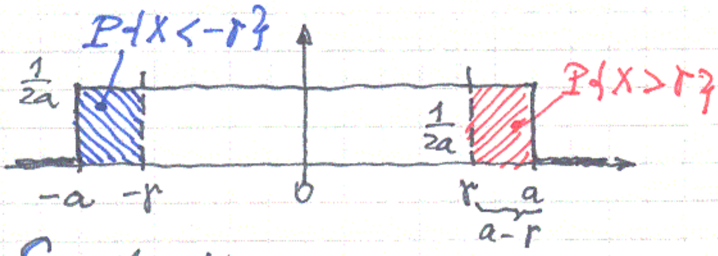
$$E\{X\} = \frac{1}{2}E\{X_1\} + \frac{1}{2}E\{X_2\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} dx}_{\sigma^2+\mu^2 = 1+1} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} dx}_{\sigma^2+\mu^2 = 1+1} = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 2.$$

25. Dacă $X \sim U[-a, a]$ determinați $P\{|X| > r\}$, $r > 0$.
Determinați o limită superioară pentru $P\{|X| > r\}$ folosind Inegalitatea lui Cebîșev. Pentru $a = 2$ trasați $P\{|X| > r\}$ și limita.

1. $r \leq a$ $\quad P\{|X| < r\} = P\{X < -r\} + P\{X > r\}$



$\mu_X = 0$

$$E\{X^2\} = \int_{-a}^{a} \frac{x^2}{2a}dx = \frac{x^3}{6a}\Big|_{-a}^{a} = \frac{a^2}{3}$$

Se vede că

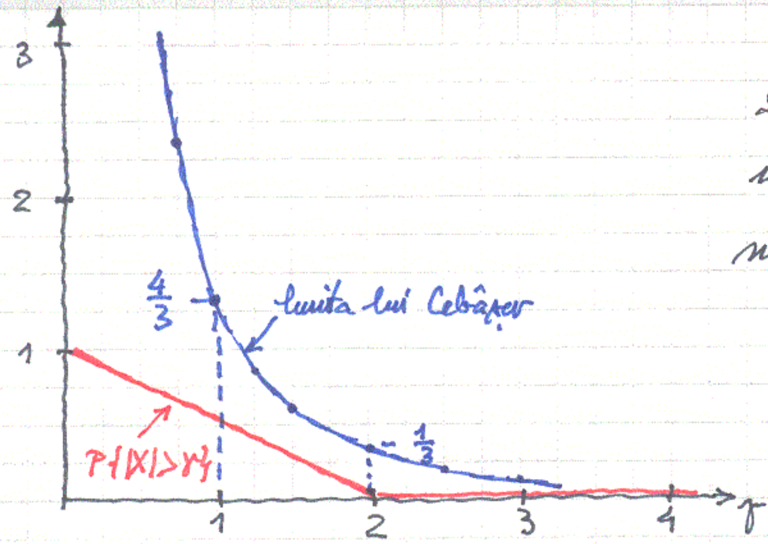
$$P\{|X| > r\} = (a - r)\cdot\frac{1}{2a}\cdot 2 = 1 - \frac{r}{a}, \quad 0 < r \leq a$$

Cum $|X| \leq a$ $\quad P\{|X| > r\} = 0$ dacă $r > a$.

$$P\{|X| > r\} = \begin{cases} 1 - \frac{r}{a}, & 0 < r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Conform inegalității lui Cebîșev, cu $\sigma_X^2 = a^2/3$

$$P\{|X| > r\} \leq \frac{\sigma_X^2}{r^2} = \frac{a^2}{3r^2}$$

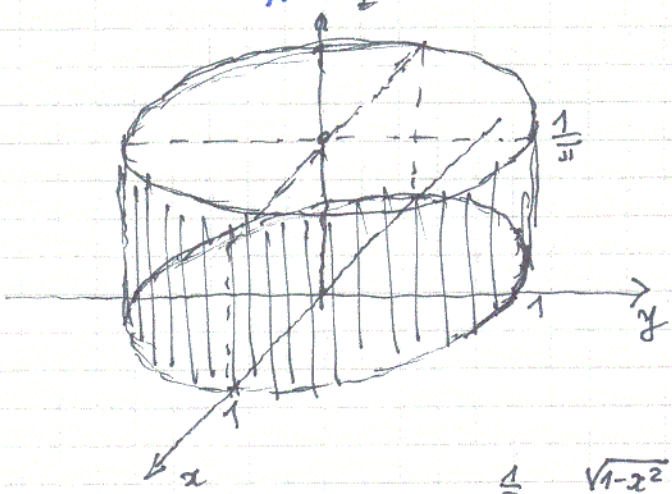


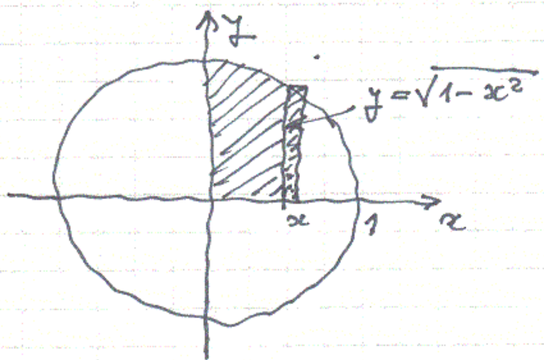
După cum se vede limita dată de inegalitatea lui Cebîşev este mult acoperitoare.

26. Dacă v.a X şi Y au repartiţia uniformă

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

schiţaţi $p_{X,Y}(x,y)$ şi determinaţi $P\{|X| \le \frac{1}{2}\}$.





$$P\{|X| \le \tfrac{1}{2}\} = 4 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x \quad \text{(din tabelele de integrale)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$$

$$P\{|X| \le \tfrac{1}{2}\} = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \simeq 0{,}61.$$

27. Determinați repartițiile marginale pentru vectorul aleator $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ ale cărui componente au o repartiție mutuală normală cu media $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ și matricea de covarianță $\vec{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-1 & y-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{x-1}{3} & \frac{y-2}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{3}\right] \quad ; \quad |\vec{C}| = 6$$

$$p_{X,Y} = \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3} - \frac{(y-2)^2}{2\cdot 2}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3}}}_{p_X(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2\cdot 2}}}_{p_Y(y)}$$

Repartițiile marginale sunt $N(1,3)$ și $N(2,2)$. Se vede că X și Y sunt necorelate și statistic independente.

28. Dacă $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ au densitatea de repartiție mutuală $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ determinați densitatea de repartiție mutuală pentru $\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix}$ unde

$$\begin{bmatrix} W \\ Z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\vec{G}}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Avem

$$\begin{bmatrix} E\{W\} \\ E\{Z\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

și

$$\vec{C}_{W,Z} = \vec{G}\vec{C}_{X,Y}\vec{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

29. Dacă $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ determinați media și dispersia pentru $Z = X + Y$.

$$E_{X,Y}\{X+Y\} = E_X\{X\} + E_Y\{Y\} = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{Disp}\{X+Y\} = \text{Disp}\{X\} + \text{Disp}\{Y\} + 2\,\text{Cov}\{X,Y\} = 2 + 2 + 2\cdot 1 = 6.$$

30. Vectorul $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ are matricea de covarianță $\vec{C}_{X,Y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Găsiți matricea $\vec{G}$ a.î. $\vec{G}\vec{X}$ să aibă componentele decorelate.

$$\mathrm{Det}\,(\vec{C} - \lambda \vec{I_u}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$\lambda_1 = 1$ și $\lambda_2 = 3$.

$$\left[\vec{C} - \lambda_1 \vec{I_u}\right]\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_{11}^2 + v_{12}^2 = 1$$

avem $v_{11} = -v_{12} \Rightarrow v_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $v_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\left[\vec{C} - \lambda_2 \vec{I_u}\right]\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_{21}^2 + v_{22}^2 = 1$$

avem $v_{21} = v_{22} \Rightarrow v_{21} = v_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{V} = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ este matricea modală

$$\vec{G} = \vec{V}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ca verificare

$$\vec{G}\vec{C}\vec{G}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Noua matrice de covarianță arată că vectorul $\vec{G}\vec{X}$, cu matricea de covarianță de mai sus, are componentele necorelate.

31. Dacă $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$ determinați $P\{X+Y > 2\}$.

$$E\{X+Y\} = E\{X\} + E\{Y\} = 0$$

$$Z = X + Y = [1\ \ 1]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \vec{G}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\vec{C}_{Z} = \vec{G}\vec{C}_{X,Y}\vec{G}^T = [1\ \ 1]\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [2\ \ 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Cum matricea se reduce la un scalar, $\sigma_Z^2 = 4$. Prin urmare

$$Z \sim N(0, 4).$$

$$P\{Z > 2\} = Q\left(\frac{2-0}{2}\right) = Q(1) = 0{,}159.$$

32. Pentru a genera două v.a. gaussiene standard (medie nulă și dispersie unitară) folosind calculatorul, se pot utiliza transformările Box-Mueller:

$$W = \sqrt{-2\ln X}\ \cos(2\pi Y) \qquad X, Y \sim \mathcal{U}[0, 1]$$
$$Z = \sqrt{-2\ln X}\ \sin(2\pi Y)$$

X și Y fiind statistic independente și uniform distribuite în [0, 1]. Arătați că afirmația este corectă.

Punem

$$W = \sqrt{-2\ln X}\ \cos 2\pi Y \ ;\ Z = \sqrt{-2\ln X}\ \sin 2\pi Y$$

$$W^2 + Z^2 = -2\ln X \quad \text{sau} \quad X = \exp\left\{-\frac{W^2+Z^2}{2}\right\}$$

Avem

$$x = e^{-\frac{w^2+z^2}{2}}$$

și

$$\frac{z}{w} = \operatorname{tg} 2\pi$$

adică $y = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{z}{w}$

Apoi

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)} = \begin{bmatrix} -w e^{-\frac{w^2+z^2}{2}} & -z e^{-\frac{w^2+z^2}{2}} \\ \frac{1}{2\pi} \frac{-\frac{z}{w^2}}{1+\left(\frac{z}{w}\right)^2} & \frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{w}}{1+\left(\frac{z}{w}\right)^2} \end{bmatrix}$$

val. absolută

$$\left|\underbrace{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)}\right]}_{\text{det.}}\right| = \left| -\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{w^2+z^2}{2}} \underbrace{\left[\frac{1}{1+\left(\frac{z}{w}\right)^2} + \frac{\left(\frac{z}{w}\right)^2}{1+\left(\frac{z}{w}\right)^2}\right]}_{=1} \right| = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{w^2+z^2}{2}}$$

$$p_{W,Z}(w,z) = p_{X,Y}\left(g^{-1}(w,z)\ \ h^{-1}(w,z)\right) \left|\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(w,z)}\right)\right|$$

Dar $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ și $Y \sim \mathcal{U}[0,1]$ așa că $p_{X,Y}(\cdot,\cdot) = 1$

Rezultă că

$$p_{W,Z}(w,z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{w^2+z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = p_W(w)\, p_Z(z)$$

Cele două v.a. W și Z sunt statistic independente și repartizate $W, Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

33. Repartiția mutuală a două v.a. X și Y este

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & , x \geq 0 \text{ și } 0 \leq y \leq x. \\ 0 & , \text{în rest.} \end{cases}$$

Determinați $p_{Y/X}(y/x)$

$$p_{Y/X}(y/x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}$$

Dar

$$p_X(x) = \int_0^x p_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^x 2e^{-x} e^{-y} dy = 2e^{-x}\, e^{-y}\Big|_x^0$$

$$p_X(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x}).$$

Rezultă

$$p_{Y/X}(y/x) = \frac{2e^{-x}e^{-y}}{2e^{-x}(1-e^{-x})} = \frac{e^{-y}}{1-e^{-x}} \qquad x \geq 0 \text{ și } x \geq y \geq 0$$

34. Dacă repartiția mutuală a v.a. X și Y este

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x & ; x,y \in (0,1) \\ 0 & ; \text{ în rest} \end{cases}$$

determinați $P\{Y > \frac{1}{2} / X = 0\}$.

$$P\{Y > \tfrac{1}{2} / X = 0\} = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} p_{Y/X}(y/0)\,dy$$

Dar

$$p_{Y/X} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} \quad ; \; p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$p_X(x) = \int_0^1 2x\,dy = 2x.$$

și deci

$$p_{Y/X} = \frac{2x}{2x} = 1 \qquad x,y \in (0,1).$$

Rezultă că

$$P\{Y > \tfrac{1}{2} / X = 0\} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \cdot dy = \frac{1}{2}.$$

35. Dacă $X \sim \mathcal{U}[0,1]$ și $Y/(X = x) \sim \mathcal{U}[0,x]$ determinați repartiția mutuală a celor două v.a., $p_{X,Y}(x,y)$ precum și repartiția marginală $p_Y(y)$.

Avem

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{Y/X}(y/x)\,p_X(x) = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}; \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < x \end{matrix}$$

$$p_Y(y) = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_y^1 = 0 - \ln y = \ln\frac{1}{y}$$

36. $Y = X_1 + X_2 + X_3$ unde $\vec{X} = [X_1\ X_2\ X_3]^T \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \vec{C})$

cu $\vec{\mu} = [1\ 2\ 3]^T$ și $\vec{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Determinați μ_Y și $Disp\{Y\}$.

$$E\{Y\} = E\{X_1\} + E\{X_2\} + E\{X_3\} = 1+2+3 = 6$$

a) $Disp\{Y\} = E\{\mathring{Y}^2\} = E\{(\mathring{X}_1 + \mathring{X}_2 + \mathring{X}_3)^2\}$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} E\{\mathring{X}_i \mathring{X}_j\} = \sum_{i=1}\sum_{j=1} Cov\{X_i, X_j\} = (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{2} + 1 + \tfrac{1}{2})$$

$+(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1) = \frac{11}{2}$, suma tuturor elementelor din $\vec{C}$

Cu $\mathring{X}_i = X - \mu_i$ s-a notat variabila centrată.

b)

$$Y = \underbrace{[1\ \ 1\ \ 1]}_{\vec{G}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \vec{G}\vec{X}$$

$$\vec{C}_Y = \vec{G}\vec{C}\vec{G}^T = [1\ \ 1\ \ 1] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [\tfrac{7}{4}\ \ 2\ \ \tfrac{7}{4}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{7}{4} + 2 + \frac{7}{4} = \frac{11}{2}$$

și cum e un singur element e dispersia lui Y.

37. Dacă $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \sigma^2 \vec{I}_2)$, determinați $P\{X_1^2 + X_2^2 > R^2\}$.

Din forma matricii se deduce necorelarea v.a. X_1 și X_2. Avem

$$[x_1\ \ x_2] \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$P\{X_1^2 + X_2^2 > R^2\} = \iint\limits_{\{(x_1,x_2):\, x_1^2 + x_2^2 > R^2\}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy$$

$x_1 = r\cos\theta \qquad x_2 = r\sin\theta \qquad x_1^2 + x_2^2 = r^2 \qquad dxdy = r dr d\theta$

$$P\{X_1^2 + X_2^2 > R^2\} = \iint\limits_{\substack{r^2 > R^2 \\ \theta \in (0, 2\pi]}} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi\sigma^2} \int_R^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr$$

$$= \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} \left. \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}}{2(-\frac{1}{2\sigma^2})} \right|_R^{\infty} = e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$$

38. Dacă $Y = X_1 + X_2 + X_3$, $\vec{X} \sim N(\vec{0}, \vec{C})$ unde $\vec{C} = \mathrm{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2\}$ determinați densitatea de repartiție pentru Y.

Cum X_1, X_2, X_3 sunt gaussiene și independente ($\vec{C}$ are o formă diagonală) iar Y depinde liniar de X_i, rezultă că și Y este repartizată gaussian.

$$\mu_Y = E\{X_1\} + E\{X_2\} + E\{X_3\} = 0$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \vec{G}\vec{X}$$

$$\vec{C}_Y = \vec{G}\vec{C}\vec{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$$

adică $\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$

$$Y \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)$$

39. Determinați media și dispersia v.a. Y

$$Y = \sum_{i=1}^{12} \left(U_i - \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad U_i \sim \mathcal{U}(0,1)$$

termenii U_i fiind identic distribuiți și independenți statistic (IID).

$$E\{U_i\} = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{Disp}\{U_i\} = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$E\{Y\} = \sum_{i=1}^{12} \left[E\{U_i\} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\mathrm{Disp}\{Y\} = \sum_{i=1}^{12} \mathrm{Disp}\left\{U_i - \frac{1}{2}\right\} = \sum_{i=1}^{12} \mathrm{Disp}\, U_i = \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{12} = 1.$$

40. Procesul IID $X[n]$ are repartiția $p_X(x) = e^{-x} u(x)$. Determinați $P\{X[0] > 1, X[1] > 1, X[2] > 1\}$

Cum eșantioanele $X[0], X[1], X[2]$ sunt statistic independente

$$P\{X[0] > 1, X[1] > 1, X[2] > 1\} = P\{X[0] > 1\} P\{X[1] > 1\} P\{X[2] > 1\}$$

Cum sunt și identic distribuite

$$P\{X[0] > 1, X[1] > 1, X[2] > 1\} = (P\{X > 1\})^3 = \left(\int_1^\infty e^{-x} dx\right)^3 = \frac{1}{e^3} \cong 0{,}05.$$

41. Un proces aleator IID, $X[n]$ se transformă în procesul aleator $Y[n] = X^2[n]$. Este și $Y[n]$ un proces IID?

Dacă $X[0]$, $X[1]$, $X[2]$, ... sunt independente atunci și $g(X[0])$, $g(X[1])$, $g(X[2])$ sunt independente. Dacă eșantioanele din X au aceeași repartiție, iar $g(\cdot)$ este aceeași pentru toate eșantioanele atunci și repartițiile eșantioanelor din Y sunt identice (vezi relația de transformare).

Răspunsul este DA!.

42. Arătați că procesul $X[n] = a^{|n|} U[n]$, $0<a<1$, unde $U[n]$ este un zgomot alb, gaussian, de medie nulă și dispersie σ_U^2, nu este staționar.

$\mu_X[n] = E\{X[n]\} = E\{a^{|n|} U[n]\} = a^{|n|} E\{U[n]\} = 0$ deci este o constantă, staționaritatea mediei e asigurată.

$$C_X[n_1, n_2] = E\{X[n_1] X[n_2]\} = E\{a^{|n_1|} U[n_1] a^{|n_2|} U[n_2]\}$$
$$= a^{|n_1|+|n_2|} E\{U[n_1] U[n_2]\}$$
$$= a^{|n_1|+|n_2|} \sigma_U^2 \delta[n_1 - n_2]$$

Se observă că $C_X[n_1, n_2] \neq C_X[n_1 - n_2]$ și deci procesul nu este staționar.

43. Fie procesul de mediere alunecătoare $X[n] = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} U[n-i]$ unde $U[n]$ este un $\overset{\text{proces}}{\text{zgomot}}$ alb gaussian de medie nulă și dispersie σ_U^2. Determinați $\rho_{X[0], X[1]}$. Ce se întâmplă atunci când N crește?

$$E\{X[n]\} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} E\{U[n-i]\} = 0.$$

$$\mathrm{Cov}\{X[0], X[1]\} = E\{X[0] X[1]\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} U[-i] \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} U[1-j]\right\}$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \underbrace{E\{U[-i] U[1-j]\}}_{\sigma_U^2 \delta[i-j+1]}$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} \sigma_U^2 \delta[\underbrace{i-j+1}_{j=i+1}]$$
$$= \frac{\sigma_U^2}{N^2}\Big(\underset{i=0\ j=1}{1} + \underset{i=1\ j=2}{1} + \underset{i=2\ j=3}{1} + \dots + \underset{i=N-2\ j=N-1}{1}\Big)$$
$$= \sigma_U^2 \frac{N-1}{N^2}$$

$$Disp\{X[n]\} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1} Disp\{U[n-i]\} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sigma_U^2 = \frac{\sigma_U^2}{N}$$

$$\rho_{X[0],X[1]} = \frac{Cov\{X[0],X[1]\}}{\sqrt{Disp\{X[0]\}\,Disp\{X[1]\}}}$$

$$= \frac{\sigma_U^2\frac{N-1}{N^2}}{\frac{\sigma_U^2}{N}} = \frac{N-1}{N}$$

Atunci când N crește $\rho_{X[0],X[1]} \to 1$, arătând că cele două eșantioane sunt tot mai puternic corelate.

44. Un proces aleator $Y[n]$ este o sumă între un proces gaussian alb, de medie nulă și dispersie σ_X^2, $X[n]$, și o sinusoidă deterministă:

$$Y[n] = X[n] + \sin(2\pi f_0 n) \qquad f_0 \in (0, \tfrac{1}{2}).$$

Determinați media și covarianța pentru $Y[n]$.

$$E\{Y[n]\} = E\{X[n]\} + E\{\sin 2\pi f_0 n\} = \sin 2\pi f_0 n$$

$$C_Y[n_1,n_2] = E\left\{\left(Y[n_1]-\sin 2\pi f_0 n_1\right)\left(Y[n_2]-\sin 2\pi f_0 n_2\right)\right\}$$

$$= E\{X[n_1]X[n_2]\}$$

$$= \sigma_X^2\,\delta[n_2-n_1].$$

45. Un proces aleator $X[n] = a_0U[n] + a_1U[n-1]$ este definit pentru $-\infty<n<\infty$, a_0 și a_1 fiind constante iar $U[n]$ este un proces aleator IID de medie nulă și dispersie σ_U^2. Este $X[n]$ un proces aleator în sens larg (WSS)?. Dacă da, determinați media și secvența de autocorelație.

$U[n]$ și $U[n-1]$ sunt cu aceeași distribuție, deoarece $U[n]$ este un proces IID. În consecință, cu a_0 și a_1 constante, $X[n]$ va fi un proces cu distribuția identică a eșantioanelor și deci și staționar.

$$E\{X[n]\} = a_0E\{U[n]\} + a_1E\{U[n-1]\} = 0.$$

$$E\{X[n]X[n+k]\} = E\left\{\left(a_0U[n]+a_1U[n-1]\right)\left(a_0U[n+k]+a_1U[n+k-1]\right)\right\}$$

$$= E\{a_0^2U[n]U[n+k] + a_0a_1U[n-1]U[n+k] + a_0a_1U[n]U[n+k-1]$$

$$+ a_1^2U[n-1]U[n+k-1]\}$$

$$= a_0^2\sigma_U^2\delta[k] + a_0a_1\sigma_U^2\left(\delta[k+1]+\delta[k-1]\right) + a_1^2\sigma_U^2\delta[k].$$

$$Disp\{X[n]\} = (a_0^2+a_1^2)\sigma_U^2.$$

46. Un proces sinusoidal are forma $X[n] = A\cos 2\pi f_0 n$, $f_0 \in (0, \frac{1}{2})$ iar A este o v.a. cu repartiția $A \sim \mathcal{N}(0,1)$. (amplitudinea odată fixată procesul se derulează cu amplitudinea constantă. În altă experiență ea se schimbă însă). Este $X[n]$ un proces aleator staționar în sens larg? Dacă da determinați media și secvența de autocorelație a procesului.

$$E\{X[n]\} = E\{A\}\cos 2\pi f_0 n = 0$$

$$E\{X[n_1]X[n_2]\} = E\{A^2\}\cos 2\pi f_0 n_1 \cos 2\pi f_0 n_2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 2\pi f_0(n_2 - n_1) + \cos 2\pi f_0 (n_2 + n_1)\right]$$

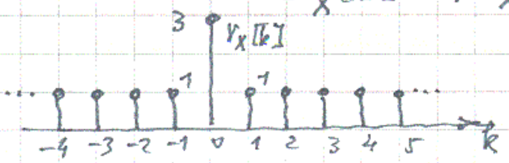
Cum nu este o funcție numai de $n_2 - n_1 = k$, procesul $X[n]$ nu este WSS (staționar în sens larg). Oricum media și autocorelația sunt determinate.

47. Un proces aleator staționar în sens larg, $X[n]$, are $E\{X[0]\} = 1$ și secvența de covarianță $C_X[n_1, n_2] = 2\delta[n_2 - n_1]$. Determinați secvența de autocorelație a procesului. Desenați secvența $r_X[k]$.

Cum procesul este staționar în sens larg $E\{X[n]\} = \text{cst.}$ ceea ce ne conduce la

$$\mu_X = E\{X[n]\} = E\{X[0]\} = 1.$$

Dar $$r_X[k] = C_X[k] + \mu_X^2 = 2\delta[k] + 1$$



48. Procesul aleator $X[n]$ constă din două v.a. statistic independente

$$X[n] \sim \begin{cases} \mathcal{N}(0,1) & ; n \text{ par} \\ \mathcal{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) & ; n \text{ impar.} \end{cases}$$

Este procesul staționar în sens larg (WSS)? Este procesul strict staționar?

$$E\{X[n]\} \sim \begin{cases} E\{\mathcal{N}(0,1)\} = 0 & ; n \text{ par} \\ E\{\mathcal{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})\} = 0 & ; n \text{ impar} \end{cases} \qquad \mu_X[n] = 0 = \text{cst.}$$

$$\text{Disp}\{\mathcal{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})\} = \frac{(2\sqrt{3})^2}{12} = 1 \text{ ; } \text{Disp}\{\mathcal{N}(0,1)\} = 1$$

Cum eșantioanele sunt necorelate $r_X[k] = \delta[k]$ și deci procesul $X[n]$ este staționar în sens larg.

Cum $p_{X[0]} \neq p_{X[1]}$, spre exemplu, procesul $X[n]$ nu este strict staționar.

49. Procesele $X[n]$ și $Y[n]$ sunt, fiecare staționare în sens larg (WSS). Fiecare eșantion din $X[n]$ este independent de fiecare eșantion din $Y[n]$. Este $Z[n] = X[n] + Y[n]$ un proces WSS?

$\mu_X = E\{X[n]\} = ct$; $\mu_Y = E\{Y[n]\} = ct$ (procesele sunt WSS)

$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y = ct$

$$E\{Z[n]Z[n+k]\} = E\{(X[n]+Y[n])(X[n+k]+Y[n+k])\}$$

$$= r_X[k] + r_Y[k] + E\{X[n]Y[n+k]\} + E\{Y[n]X[n+k]\}$$

$$= r_X[k] + r_Y[k] + 2E\{X[n]\}E\{Y[n]\}$$

$$= r_X[k] + r_Y[k]$$

Cum r_Z este funcție numai de k și media e constantă, $Z[n]$ este un proces WSS.

50. Un proces aleator este definit prin $X[n] = AU[n]$ unde A este o v.a. $A \sim \mathcal{N}(0, \sigma_A^2)$ iar $U[n]$ este un zgomot alb de medie nulă și cu dispersie σ_U^2. Variabila aleatoare A este independentă de toate eșantioanele $U[n]$. Determinați densitatea spectrală de putere (PSD) a procesului $X[n]$.

$$E\{X[n]\} = E\{AU[n]\} = E\{A\}E\{U[n]\} = 0.$$

$$r_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} = E\{AU[n]AU[n+k]\}$$

$$= E\{A^2\}E\{U[n]U[n+k]\} = \sigma_A^2\sigma_U^2\delta[k].$$

Dar
$$\delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1\ (f).$$

așa că
$$r_X[k] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_X(f) = \sigma_A^2\sigma_U^2 = ct$$

Procesul este deci un "zgomot alb" având PSD constantă cu frecvența.

51. Determinați densitatea spectrală de putere pentru procesul aleator $X[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n]$, $-\infty < n < \infty$, $U[n]$ fiind un zgomot alb de medie nulă și dispersie σ_U^2.

$$E\{X[n]\} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n E\{U[n]\} = 0$$

$$E\{X[n]X[n+k]\} = E\left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+k}U[n]U[n+k]\right\} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n+k}\sigma_U^2\delta[k]$$

și nu depinde numai de k. Procesul nu este staționar și deci noțiunea de densitate spectrală de putere nu are sens. Ea există (PSD) numai dacă procesul este WSS.

52. Determinați densitatea spectrală de putere a procesului aleator $X[n] = a_0 U[n] + a_1 U[n-1]$ unde a_0 și a_1 sunt constante iar $U[n]$ este un zgomot alb, de medie nulă și dispersie σ_U^2.

$$E\{X[n]\} = a_0 E\{U[n]\} + a_1 E\{U[n-1]\} = 0$$

$$E\{X[n]X[n+k]\} = E\{(a_0 U[n] + a_1 U[n-1])(a_0 U[n+k] + a_1 U[n+k-1])\}$$

$$= a_0^2 \sigma_U^2 \delta[k] + a_0 a_1 \sigma_U^2 \delta[k+1] + a_0 a_1 \sigma_U^2 \delta[k-1] + a_1^2 \delta[k]$$

$$r_X[k] = (a_0^2 + a_1^2)\sigma_U^2 \delta[k] + a_0 a_1 \sigma_U^2 \delta[k+1] + a_0 a_1 \sigma_U^2 \delta[k-1]$$

$$\delta[k] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1(f) \qquad f \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\delta[k+1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{j2\pi f}$$

$$\delta[k-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f}$$

$$S_X(f) = (a_0^2 + a_1^2)\sigma_U^2 + a_0 a_1 (e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f})\sigma_U^2$$

$$= 2a_0 a_1 \sigma_U^2 \cos 2\pi f + (a_0^2 + a_1^2)\sigma_U^2 \qquad f \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

53. Un proces $X[n]$ este definit prin $X[n] = U[n] + \mu$, $-\infty < n < \infty$, unde $U[n]$ este un zgomot alb, de medie nulă și dispersie σ_U^2. Determinați secvența de autocorelație și densitatea spectrală de putere. Reprezentați și grafic.

$$E\{X[n]\} = E\{U[n]\} + \mu = \mu.$$

$$r_X[k] = E\{X[n]X[n+k]\} = E\{(U[n]+\mu)(U[n+k]+\mu)\}$$

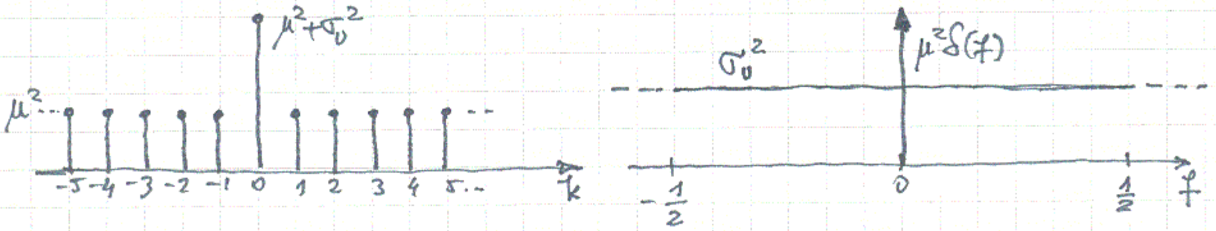
$$= E\{U[n]U[n+k]\} + \mu E\{U[n]\} + \mu E\{U[n+k]\} + \mu^2$$

$$= \sigma_U^2 \delta[k] + \mu^2$$

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(f)$$

$$\delta[k] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1(f)$$

$$r_X[k] = \mu^2 + \sigma_U^2 \delta[k] \longleftrightarrow \mu^2 \delta(f) + \sigma_U^2 \qquad f \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

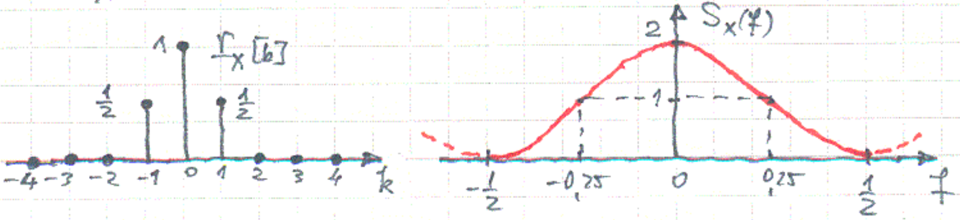


54. Un proces aleator are densitatea spectrală de putere $S_X(f) = 1 + \cos 2\pi f$. Determinați $r_X[k]$. Reprezentați grafic $r_X[k]$ și $S_X(f)$.

$$S_X(f) = 1 + \cos 2\pi f = 1 + \frac{e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}}{2}$$

Transformata Fourier inversă este

$$r_X[k] = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k+1] + \frac{1}{2}\delta[k-1].$$



55. Un proces aleator are densitatea spectrală de putere $S_X(f) = \left|1 + e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}\right|^2$. Determinați secvența de autocorelație a procesului și reprezentați-o grafic.

Știm că $|z|^2 = z \cdot z^*$. În consecință:

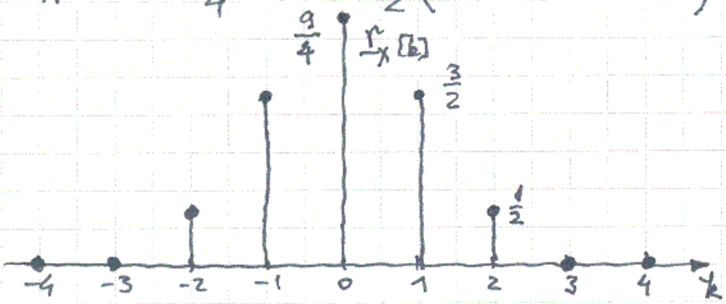
$$S_X(f) = \left[1 + e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}\right]\left[1 + e^{j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{j4\pi f}\right]$$

$$= \frac{9}{4} + e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{j4\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f} + \frac{1}{2}e^{j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}$$

$$= \frac{9}{4} + \frac{1}{2}e^{j4\pi f} + \frac{3}{2}e^{+j2\pi f} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi f}$$

Luând transformarea inversă în timp discret obținem:

$$r_X[k] = \frac{9}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\left(\delta[n+2] + \delta[n-2]\right) + \frac{3}{2}\left(\delta[n+1] + \delta[n-1]\right).$$



56. O sinusoidă definită în timp continuu are faza inițială o v.a. $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$
$X(t) = \cos(2\pi f t + \Theta)$ $\quad f \in (-\infty, \infty)$ (se măsoară în Hz!). Determinați funcțiile mediei și autocorelației procesului $X(t)$.

Avem $p_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ $\quad \theta \in (0, 2\pi)$.

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\} = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta = \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi f t + \theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

$$R_X(\tau) = E\{X(t)X(t+\tau)\} = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f t + \theta)\cos[2\pi f(t+\tau) + \theta]\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos 2\pi f \tau \, d\theta + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos[2\pi f(2t+\tau) + 2\theta]\,d\theta = \frac{1}{2}\cos 2\pi f \tau$$

57 Un proces aleator în timp continuu are densitatea spectrală de putere $S_X(f) = e^{-|f|}$, $f \in (-\infty, \infty)$ și se măsoară în Hz. Determinați puterea medie a semnalului, în banda 10 Hz ÷ 100 Hz.

$$P_{med} = 2\int_{10}^{100} e^{-f}\,df = 2e^{-f}\Big|_{100}^{10} = 2\left(e^{-10} - e^{-100}\right) = 9{,}08 \cdot 10^{-5}\ W$$

$$= 90{,}8\ \mu W.$$

58. Un SLIT având funcția de transfer $H(z) = 1 - z^{-1} - z^{-2}$ filtrează un zgomot alb în timp discret, cu medie nulă și dispersie σ_U^2. Determinați secvența de autocorelație și densitatea spectrală de putere pentru semnalul discret de la ieșirea sistemului. Reprezentați grafic $r_X[k]$ și $S_X(f)$.

$$U \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow X.$$

$U[n]$ fiind zgomot alb are $\overbrace{r_X[k] = \sigma_U^2\,\delta[k]}^{\text{autocorelația}}$ și $\overbrace{S_U(f) = \sigma_U^2}^{\text{PSD}}$

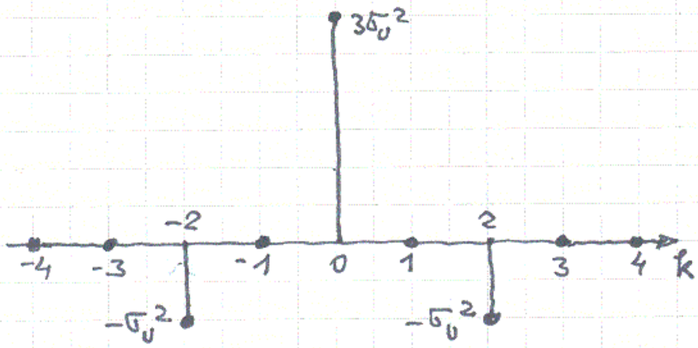
$$S_X(f) = |H(f)|^2 S_U(f) = \left|1 - e^{-j2\pi f} - e^{-j4\pi f}\right|^2 \sigma_U^2$$

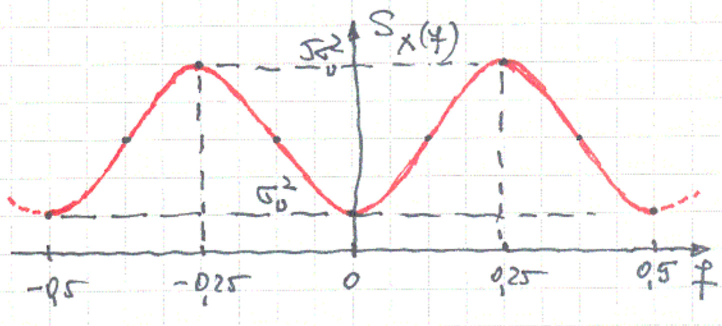
$$S_X(f) = \left(1 - e^{-j2\pi f} - e^{-j4\pi f}\right)\left(1 - e^{j2\pi f} - e^{j4\pi f}\right)\sigma_U^2$$

$$= \left(3 - e^{j4\pi f} - e^{-j4\pi f}\right)\sigma_U^2$$

$$= \left(3 - 2\cos 4\pi f\right)\sigma_U^2 \qquad f \in \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right).$$

$$r_X[k] = \left(3\delta[k] - \delta[k+2] - \delta[k-2]\right)\sigma_U^2$$





59. Sinusoida $x[n] = \cos(2\pi \cdot 0{,}25 \cdot n + \Theta)$, $\Theta \sim U[0, 2\pi]$, se aplică la intrarea sistemului cu $H(z) = 1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}$. Determinați b_1, b_2 a.î. sinusoida să fie rejectată.

La $f = 0{,}25$ (frecvența digitală) e necesar ca $H(e^{j2\pi 0{,}25}) = 0$

$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ așa că $1 - b_1\frac{1}{j} - b_2\frac{1}{j^2} = 0 \Rightarrow 1 + b_1 j + b_2 = 0$ adică

$1 + b_2 = 0$ și $b_1 = 0$. $H(z) = 1 + z^{-2}$ va bloca (rejecta) sinusoida de frecvență (digitală) 0.25.

60. Un proces aleator $X[n]$, staționar în sens larg, este definit de ecuația cu diferențe finite $X[n] = 0.5X[n-1] + U[n] - 0,5U[n-1]$, $U[n]$ fiind un zgomot alb de medie nulă și dispersie σ_U^2. Determinați secvența de autocorelație și densitatea spectrală de putere.

Dacă se aplică transformarea Z ecuației cu diferențe finite obținem:

$$X(z) = 0,5X(z)\cdot z^{-1} + U(z) - 0,5U(z)\cdot z^{-1}$$

de unde

$$\mathcal{H}(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1-0,5z^{-1}}{1-0,5z^{-1}} = 1 \quad ; \quad X[n] = U[n].$$

$|\mathcal{H}(f)|^2 = 1$ și deci $S_X(f) = \sigma_U^2$, un zgomot alb.

$$r_X[k] = \sigma_U^2\delta[k].$$

61. La ieșirea unui SLIT se generează $X[n] = U[n] - U[n-1]$. Procesul $U[n]$ are densitatea spectrală de putere $S_U(f) = 1 - \cos 2\pi f$, $f \in [-0.5, 0.5]$. Determinați secvența de autocorelație și densitatea spectrală de putere a procesului $X[n]$

$$X(z) = U(z) - z^{-1}U(z) \qquad \mathcal{H}(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = 1 - z^{-1}$$

$$S_U(f) = 1-\cos 2\pi f \qquad |\mathcal{H}(e^{j2\pi f})|^2 = (1-e^{-j2\pi f})(1-e^{j2\pi f})$$

$$|\mathcal{H}(e^{j2\pi f})|^2 = 2 - (e^{j2\pi f} + e^{-j2\pi f}) = 2 - 2\cos 2\pi f.$$

$$S_X(f) = 2(1-\cos 2\pi f)(1-\cos 2\pi f) = 2(1-\cos 2\pi f)^2$$

$$S_X(f) = 2(1 - 2\cos 2\pi f + \cos^2 2\pi f) = 2\left(1 - 2\cos 2\pi f + \frac{1+\cos 4\pi f}{2}\right)$$

$$S_X(f) = 3 - 4\cos 2\pi f + \cos 4\pi f.$$

Dar $\displaystyle S_X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_X[k]\cos 2\pi f k$

și deci $r_X[0] = 3 \qquad r_X[1] = r_X[-1] = -\frac{4}{2} = -2$

și $r_X[2] = r_X[-2] = \frac{1}{2}$

$$r_X[k] = \frac{1}{2}\delta[n+2] - 2\delta[n+1] + 3\delta[n] - 2\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2].$$

62. Un proces aleator are densitatea spectrală de putere:

$$S_X(f) = \frac{1}{|1-0,5e^{-j2\pi f}|^2}$$

trebuie filtrat cu un SLIT, pentru a produce un proces aleator $Y[n]$ de tip zgomot alb, cu dispersia σ_U^2. Determinați ecuația cu diferențe finite pentru filtrul cerut.

$$S_Y(f) = |\mathcal{H}(e^{j2\pi f})|^2\, S_X(f) = \sigma_Y^2 = 4.$$

$$|\mathcal{H}(e^{j2\pi f})|^2 \frac{1}{|1-0{,}5e^{-j2\pi f}|^2} = 4$$

$$|\mathcal{H}(e^{j2\pi f})|^2 = 4\,|1-0{,}5e^{-j2\pi f}|^2$$

$$\mathcal{H}(e^{j2\pi f})\,\mathcal{H}(e^{-j2\pi f}) = 4(1-0{,}5e^{-j2\pi f})(1-0{,}5e^{j2\pi f})$$

$$\mathcal{H}(e^{j2\pi f}) = 2(1-0{,}5e^{-j2\pi f}) = 2-e^{-j2\pi f}$$

$$\mathcal{H}(z) = 2-z^{-1} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$Y(z) = 2X(z) - z^{-1}X(z)$$

$$Y[n] = 2X[n] - X[n-1].$$

63. Un SLIT în timp continuu are funcția pondere $h(\tau)=\begin{cases} e^{-\tau}, & \tau\geq 0\\ 0, & \tau<0\end{cases}$. Un zgomot alb, de medie nulă și având dispersia $\frac{N_0}{2}$ se aplică la intrarea sistemului. Determinați densitatea spectrală de putere de la ieșirea sistemului. Schițați $S_Y(f)$.

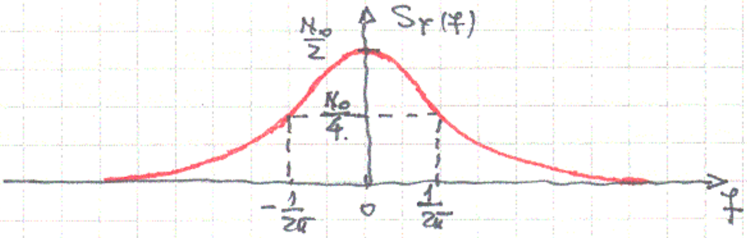
Zgomotul de la intrare fiind alb, $\Gamma_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$ și deci

$$\Gamma_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_X(f) = \frac{N_0}{2}.$$

Cu $u(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\geq 0\\ 0, & \tau<0\end{cases}$

$$e^{-\tau}u(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1+j2\pi f}, \quad f\in(-\infty,\infty) \text{ măsurată în Hz.}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi f)^2}; \quad S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \frac{\frac{N_0}{2}}{1+(2\pi f)^2}$$



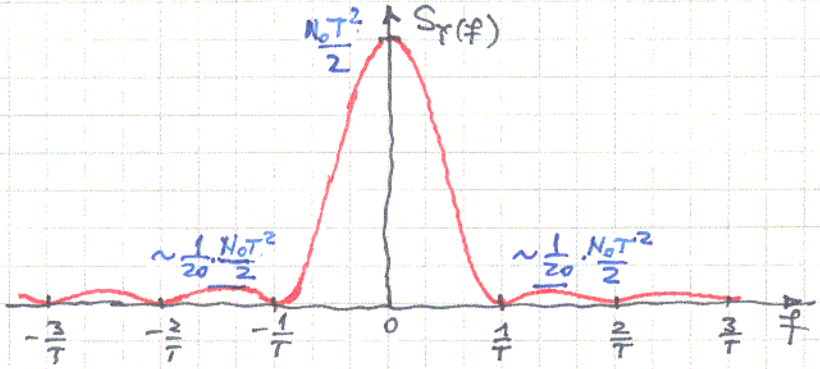
64. Un SLIT în timp continuu are răspunsul la impuls $h(t)=\begin{cases}1, & 0<t<T\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$. La intrarea sa se aplică un zgomot alb cu dispersia $\frac{N_0}{2}$. Determinați și schițați densitatea spectrală de putere a procesului de ieșire $Y(t)$.

$$\Gamma_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(t) \longleftrightarrow S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$h(t) = u(t) - u(t-T) \longleftrightarrow 2\,\frac{\sin 2\pi f\frac{T}{2}}{2\pi f}\, e^{-j2\pi f\frac{T}{2}} = T\cdot\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\, e^{-j\pi f T}; \quad f\in R.$$

$$|H(f)|^2 = T^2\left|\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right|^2$$

$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ adică $S_Y(f) = \frac{N_0 T^2}{2}\left|\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right|^2$



65. Un circuit RC are răspunsul în frecvență $H(f) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}+j2\pi f}$; $f\in\mathbb{R}$. și filtrează un zgomot alb având funcția de autocorelație $\Gamma_X(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$. Determinați puterea totală a procesului de la ieșirea filtrului.

$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$. $\quad H(f) = \frac{2\pi f_0}{2\pi f_0 + j2\pi f} = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$; $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$, $f\in(-\infty,\infty)$

$$S_Y(\ ) = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\cdot\frac{N_0}{2}$$

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}\frac{N_0}{2}\,df = \frac{N_0 f_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{N_0 f_0}{2}\operatorname{arctg} v\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{N_0 f_0}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{N_0\pi f_0}{2} = \frac{N_0 2\pi f_0}{4} = \frac{N_0}{4RC}$$