

Modulația cu undă continuă

Modulația cu undă continuă constituie un procedeu esențial în comunicațiile analogice. Se studiază reprezentările în domeniile timp și frecvență a două tipuri de modulație cu undă continuă:

- ▶ modulația de amplitudine, în cadrul căreia amplitudinea unui purtător sinusoidal este modificată, conform unui semnal mesaj, purtător de informație; acesta se mai numește și semnal modulator.
- ▶ modulația de unghi, în cadrul căreia frecvența instantanee sau faza unui purtător sinusoidal sunt modificate, conform cu semnalul modulator.

1. Introducere.

Un sistem de comunicație transmite semnalele purtătoare de informație printr-un canal de comunicație ce cuprinde transmițătorul (emitorul) de receptor. Semnalele purtătoare de informație, așa cum sunt ele generate de către surse sunt înzestrate și semnale în banda de bază (baseband signals).

Utilizarea corectă a canalului de comunicație impune o translație a semnalelor din banda de bază într-o altă gamă de frecvențe, adecvată canalului; la recepție, semnalul din canal trebuie retranslatat în banda de bază. Spre exemplu, un sistem radio operează eficient într-o gamă de frecvențe ce depășește 30 kHz, în vreme ce semnalele din banda de bază sunt, în cele mai multe cazuri, semnale din banda audio de sub 20 kHz.

Translația de frecvență este realizată utilizând

modulație.

- ▶ Prin procedul de modulație (modulare), anumite caracteristici esențiale ale unui semnal purtător pot fi modificate în acord (conform) cu un semnal modulator.
- ▶ O formă uzuală pentru semnul purtător este unda sinusoidală. Se vorbește, în cazul folosirii ei, de modulație cu (în) undă continuă.
- ▶ Semnul din banda de bază pe numește semnal modulator iar ceea ce rezultă în urma aplicării procedurii de modulare pe numește semnal modulat.
- ▶ Procedul invers modulației, prin care din semnalul modulat se reconstituie semnalul din banda de bază (modulatorul) se numește demodulație (demodulare).

Conform cu cele expuse, un sistem de comunicație poate fi reprezentat ca în figura 1. La intrarea

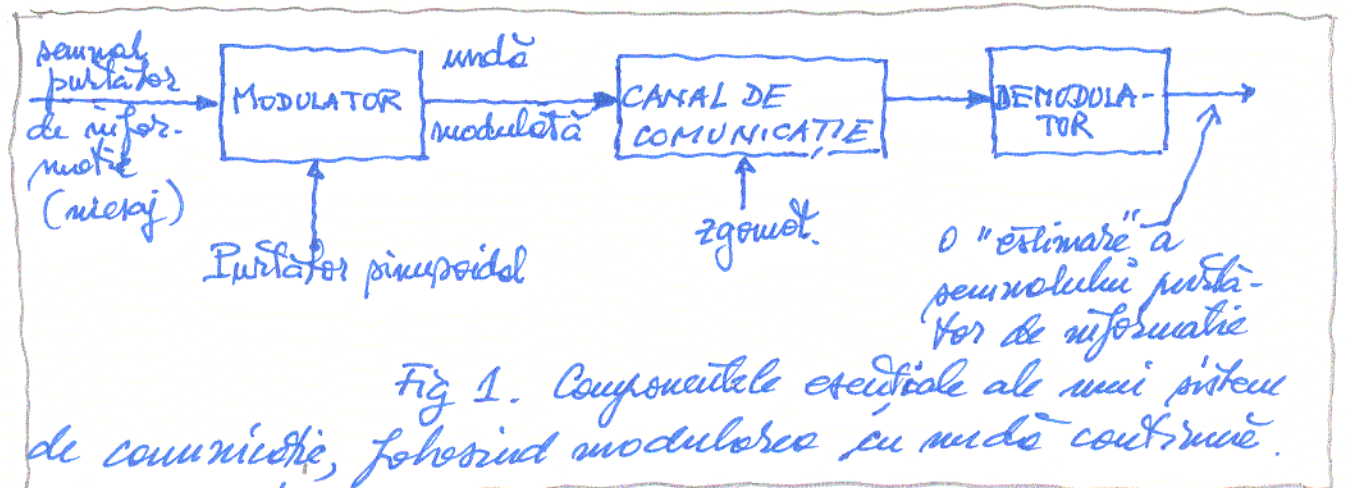


Fig 1. Componentele esențiale ale unui sistem de comunicație, folosind modularea cu undă continuă.

în canal se află un modulator iar la ieșirea din canal un demodulator; acesta din urmă generează o "estimare" a semnelului din banda de bază, purtătorul de informație sau "mesaj". Zgomotul din canal face ca performanțele de ansamblu să fie afectate.

Ne vom ocupa de două procedee esențiale de modulație în undă continuă :

- ▶ modulația de amplitudină cu undă continuă ;
- ▶ modulația de frecvență cu undă continuă. Ea se mai numește și modulație "exponențială"

În fig. 2 se prezintă un semnal purtător (a), un semnal modulator, purtător de informație (b) precum și semnalele modulate în amplitudină (c) și în frecvență (d).

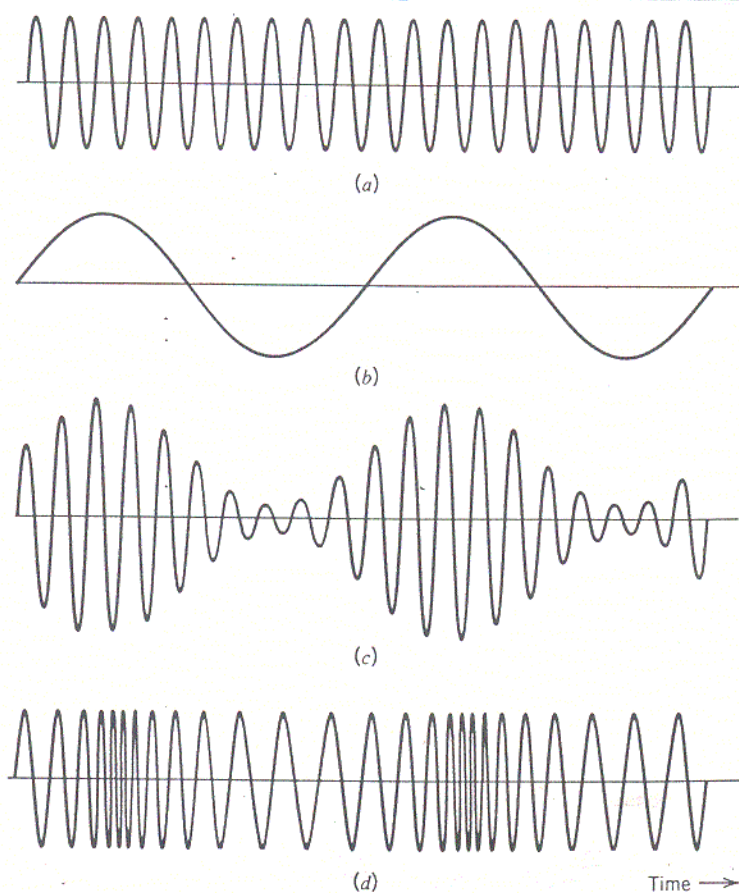


Fig 2. Semnalul purtător (a) este modulată de către semnalul modulator (b). Rezultă, în cazul modulației de amplitudină semnalul (c) iar în cazul modulației de frecvență semnalul (d).

2. Modulația de amplitudină.

Se consideră un semnal purtător (carrier) de forma:

$$p(t) = A_p \cos \omega_p t = A_p \cos 2\pi f_p t. \quad (1)$$

Vom menționa că în literatură se utilizează în mod frecvent indicele "c", de la "carrier", motiv pentru

Vom presupune (1) sub forma:

$$x(t) = A_c \cos \omega_c t = A_c \cos(2\pi f_c t) \tag{1'}$$

Fie că semnalul modulator este $x(t)$. Expresia semnalului modulat în amplitudine se poate scrie:

$$s(t) = A_c [1 + k_a x(t)] \cos(2\pi f_c t) \tag{2}$$

Constanta k_a , cu dimensiunea $[V^{-1}]$, se numește sensibilitatea de amplitudine a modulatorului.

În fig. 3 se arată un semnal modulator (a) precum și două cazuri de modulare. În primul (b) $|k_a x(t)| \leq 1$, în timp ce în al doilea (c), condiția nu mai este îndeplinită și $|k_a x(t)| > 1$. Se vede că apar distorsiuni ale "amvelopii" de modulare, ca urmare a faptului că se intersectează faza semnalului purtător.

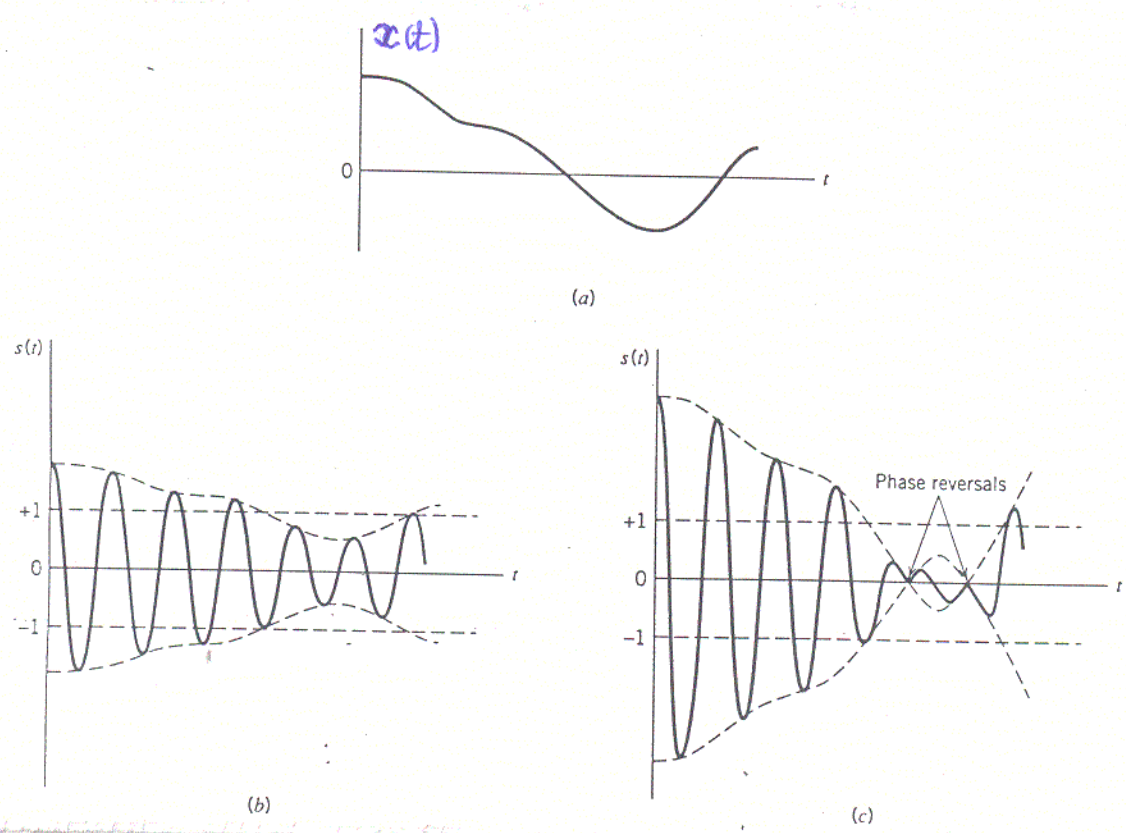


Fig 3. Modulație de amplitudine cu modulator $x(t)$ (a); Semnal modulat pentru $|k_a x(t)| \leq 1$, (b) și $|k_a x(t)| > 1$, (c)

- Deoarece amplitudinea unei unde sinusoidale este o mărime ne-negativă, rezultă că este necesar să avem

$$A_c [1 + k_a x(t)] \geq 0$$

din care deducem că trebuie îndeplinită condiția:

$$|k_a x(t)| \leq 1, \forall t \quad (3)$$

Dacă condiția nu este îndeplinită modulul produsului depășește 1, se vorbește despre "supramodulare" (overmodulation).

- Valoarea maximă a produsului, în modul, se numește "gradul de modulație", notat cu m în literatura de limbă română:

$$m = |k_a x(t)|_{\max} \cdot 100 [\%]. \quad (3')$$

- Dacă ω_m (f_m) este frecvența maximă a semnalului modulator (din banda de bază), frecvența purtătoare f_c trebuie să îndeplinească condiția:

$$f_c \gg f_m; \quad \omega_c \gg \omega_m \quad (4)$$

Reamintim că banda mesajului este egală chiar cu f_m :

$$B_f = f_m; \quad B_\omega = \omega_m.$$

Așa cum se vede în din fig. 3.6, condiția pentru a recepționa semnalul modulator din amplitudinea semnalului modulat este ca frecvența purtătoare să fie suficient de mare în raport cu viteza maximă de variație a semnalului modulator.

Spektrul semnalului modulat, $S(\omega)$, se deduce aplicând transformarea Fourier relației de definiție (2):

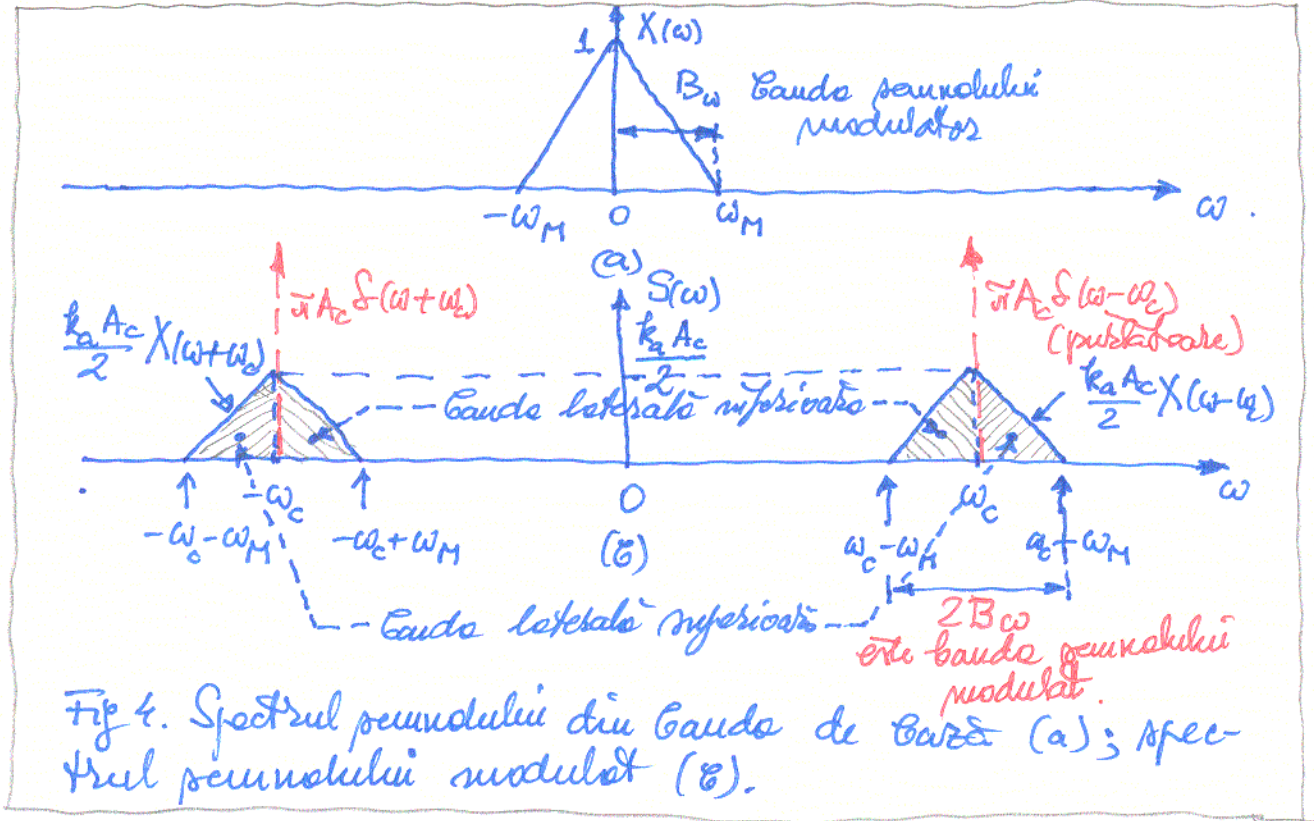
$$\begin{aligned} S(\omega) &= \mathcal{F}\{A_c \cos \omega_c t\} + \mathcal{F}\{A_c k_a x(t) \cos \omega_c t\} = \\ &= A_c \cdot \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{1}{2} A_c k_a X(\omega) * \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] \end{aligned}$$

Se efectuează convoluțiile și găsim că:

$$S(\omega) = \frac{A_c}{2} [S(\omega - \omega_c) + S(\omega + \omega_c)] + \frac{k_a A_c}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)] \quad (5)$$

În domeniul comunicărilor se mai utilizează și formula:

$$S(f) = \frac{A_c}{2} [S(f - f_c) + S(f + f_c)] + \frac{k_a A_c}{2} [X(f - f_c) + X(f + f_c)] \quad (5')$$



Din figura 4b se poate vedea că lobii laterali inferiori nu se suprapun (nu se întretaie) decât doar dacă $\omega_c - \omega_M > 0$, în acord cu condiția (4).

Tot din figura 4b se deduce că Banda purtătorului modulată este dublul benzii purtătorului modulator. Ca stare, Banda de transmis, B_T , satisface relația:

$$B_T = 2B \quad (6)$$

unde B este Banda mesajului.

Avantaje și dezavantaje ale modulației de amplitudine

► Principala avantaj al modulației de amplitudine este simplitatea în implementare, motiv pentru care metoda a fost utilizată încă de la începutul radiofoniei, atunci când complexitatea circuitului, în special la recepție, determină costul transmisiei; un cost prea ridicat ar fi prăvat de eroarea radiofoniei.

Pentru modulare se poate folosi un dispozitiv cu caracteristică neliniară cum ar fi dioda - fig. 5.

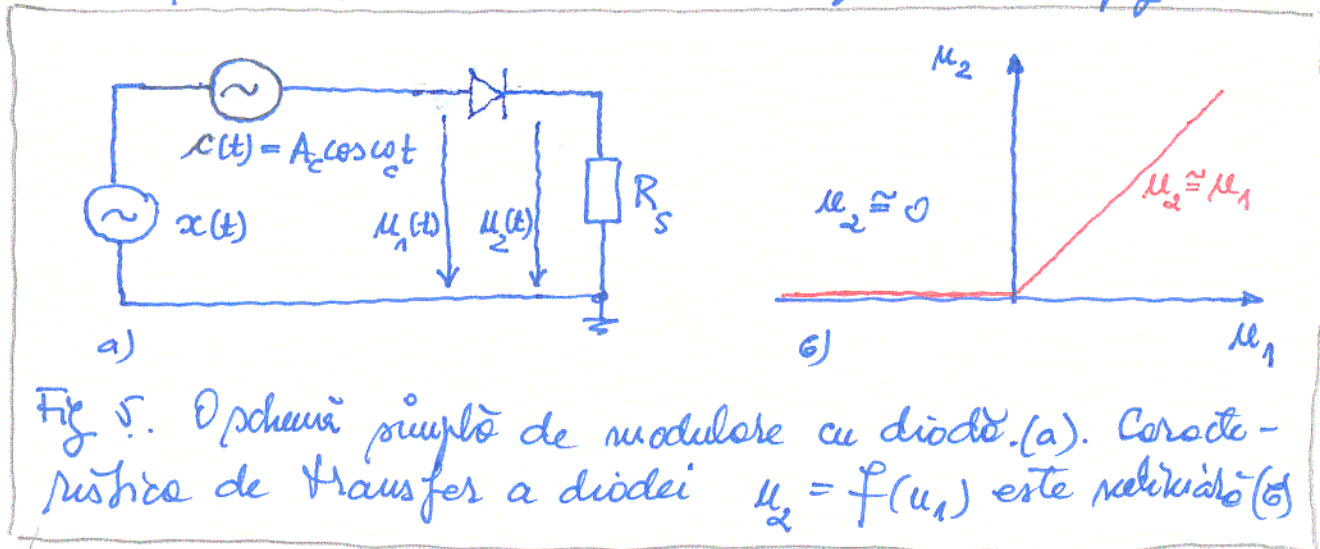


Fig. 5. O schemă simplă de modulare cu diodă. (a). Caracteristica de transfer a diodei $u_2 = f(u_1)$ este neliniară (b)

deci arca $u_2(t) \approx u_1(t)$ pentru $u_1(t) \geq 0$ și $u_2(t) \approx 0$ pentru $u_1(t) < 0$:

$$u_2(t) \approx \begin{cases} u_1(t) & , u_1(t) \geq 0 \\ 0 & , u_1(t) < 0 \end{cases}$$

putem scrie că:

$$u_2(t) \approx \begin{cases} A_c \cos \omega_c t + x(t) & , A_c \cos \omega_c t + x(t) \geq 0 \\ 0 & , A_c \cos \omega_c t + x(t) < 0 \end{cases}$$

sau:

$$u_2(t) = [A_c \cos \omega_c t + x(t)] g(t)$$

relație în care $g(t)$ este o funcție rectangulară cu perioada $T_c = 1/f_c$, așa cum se arată în fig. 6

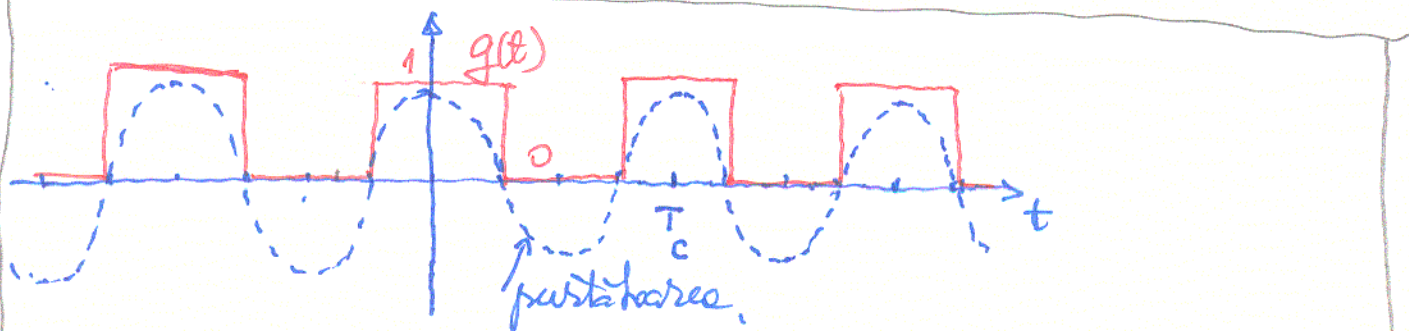


Fig. 6. Undă periodică $g(t)$, în coordonate cu purtătoare.

Pentru $g(t)$ se poate scrie expresia seriei Fourier armonice:

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[(2n-1)\omega_c t]$$

Se poate determina acum $u_2(t)$ ce fiind

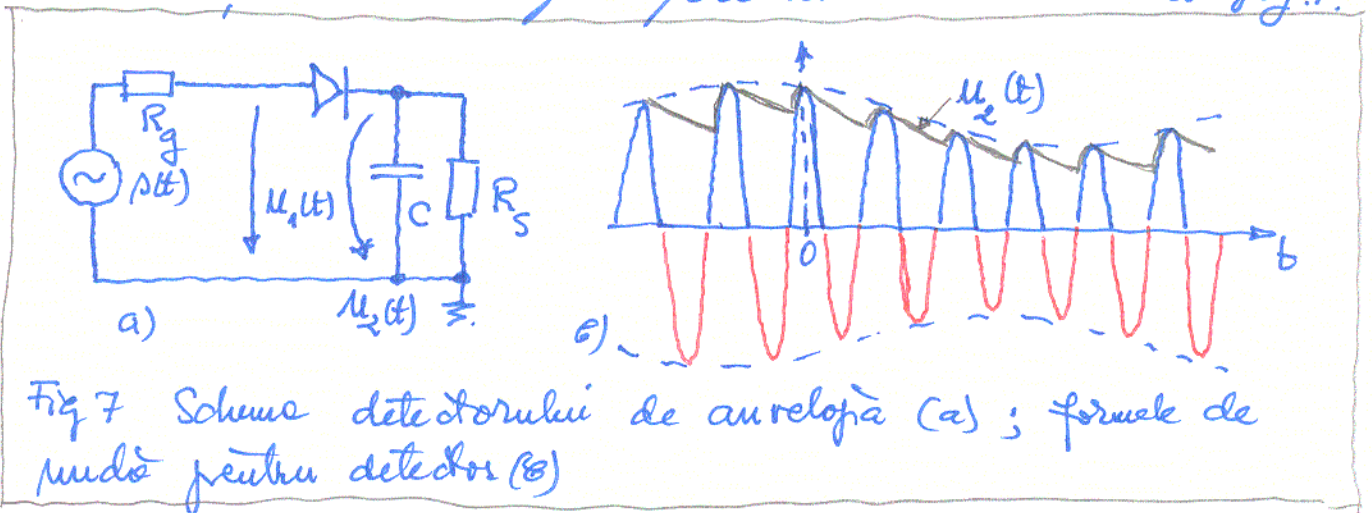
$$u_2(t) \cong \frac{A_c}{2} \cos \omega_c t + \frac{A_c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \left\{ \cos 2n\omega_c t + \cos[(2n-2)\omega_c t] \right\} + \frac{x(t)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x(t) \cos[(2n-1)\omega_c t]$$

Pentru $\omega_c \gg \omega_M$, în furul preveții purtătoare se găsesc termenii:

$$\frac{A_c}{2} \cos \omega_c t + \frac{2}{\pi} x(t) \cos \omega_c t$$

Ei constituie un semnal modulor în amplitudină și se separă de ceilalți prin filtre trece-bandă, centrata pe ω_c .

În ceea ce privește demodularea, ea se poate realiza ca detecție de înveliș folosind circuitul din fig. 7.



Pentru $R_g \ll R_s$ tensionarea de pe condensator, $u_2(t)$ urmează (cu o sumă $u_1(t)$), dacă aceasta din urmă este suficient de mare pentru a angaja conducția diodei. Când dioda este blocată, condensatorul se descarcă peste R_s . O filtrare trece jos a semnalului $u_2(t)$, și înălțarea componentei continue, asigură refacerea semnalului modulor, purtătorul de informație

Observație. În lipsa condensatorului C , scheme poate fi tratată ca și în cazul modulorului. Prezenta

condensatorului asigură o filtrare de tip trece jos.

► Modulația de amplitudine are un randament energetic foarte slab. Deși purtătoarea nu transportă, ea însăși, informații, ea este prezentă în semnalul modulat; apare astfel o pierdere de putere.

Mai mult încă, transmiterea a două benzi laterale, fiecare purtând aceeași informație utilă, face ca randamentul să scadă și mai mult.

Pentru fixarea ideilor fie $x(t) = A_m \cos \omega_m t$ și

$$p(t) = (A_c + k_a A_m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t = A_c (1 + m \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$
 în care gradul de modulație este:

$$m = \frac{k_a A_m}{A_c} ; 0 < m \leq 1$$

Puterea semnalului modulat, putere utilă este

$$P_m = \frac{A_m^2}{2}$$

Cum semnalul modulat are expresia:

$$s(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{m A_c}{2} \cos[(\omega_c - \omega_m)t] + \frac{m A_c}{2} \cos[(\omega_c + \omega_m)t]$$
 poartă puterea

$$\frac{P_s}{S} = \frac{A_c^2}{2} + \frac{m^2 A_c^2}{8} + \frac{m^2 A_c^2}{8} = \frac{A_c^2}{4} (2 + m^2)$$

La receptor se folosește o singură bandă laterală, ce are amplitudinea $m A_c / 2$ și deci puterea utilă este

$$\frac{P_u}{U} = \frac{m^2 A_c^2}{8}$$

Randamentul la recepție devine:

$$\eta = \frac{P_u}{P_s} = \frac{m^2}{2(2 + m^2)} ; 0 < m^2 \leq 1$$

Se vede că valoarea sa maximă se obține pentru $m=1$ și are valoarea

$$\eta_{\max} = \frac{1}{6} \cdot 100 \approx 16,67\%$$

Dacă se consideră ca putere utilă puterea din ambele

Centri laterale, $P_u = m^2 A^2 / 4$, randamentul pe dublele de:

$$\eta = \frac{m^2}{2+m^2}$$

dar valoarea sa maxima nu depaseste 33,33%.

► Modulatia de amplitudine prezinta banda de frecvente, nu dintro resursele cele mai pretioase pe care le avem la indemana in telecomunicatii. Asa cum rezultă si din fig.4, banda de frecvente ocupata de semnalul modulat este dubla fata de banda ocupata de semnalul util, modulator.

In etapa actuala putem dispune sa complicam circuitele, pentru a reduce banda ocupata si puterea necesara. De aceea e bine sa revenim la una dintre cele doua centri laterale si e bine, desigur, sa suprimam purtatorul din semnalul modulat. Se ajunge astfel la procedee de modulare de amplitudine liniare.

Observatie Modulatia de amplitudine cu purtatoare si doua centri laterale, prezentata mai inainte, nu este o modulare liniara:

$$s_1(t) = A_c [1 + k_a x_1(t)] \cos \omega_c t; \quad s_2(t) = A_c [1 + k_a x_2(t)] \cos \omega_c t$$

Daca $s_{1+2}(t)$ rezultă moduland cu suma $x_1(t) + x_2(t)$, avem:

$$s_{1+2}(t) = A_c \{ 1 + k_a [x_1(t) + x_2(t)] \} \cos \omega_c t \neq s_1(t) + s_2(t)$$

3. Modulatia de amplitudine liniara

Intr-un caz general un semnal modulat se poate reprezenta prin

$$s(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] = [a(t) \cos \phi(t)] \cos \omega_c t - [a(t) \sin \phi(t)] \sin \omega_c t$$

sau:

$$s(t) = s_I(t) \cos \omega_c t - s_Q(t) \sin \omega_c t \tag{7}$$

Aici $s_I(t)$ este componenta in-faza iar $s_Q(t)$ este componenta in-cuadratura (de-cuadratura) - veti si amasa.

Forma (7) este reprezentarea canonică a unui semnal de tip Pura-Candă. Pentru a obține o modulație liniară, atât $P_I(t)$ cât și $P_Q(t)$ trebuie să aibă o dependență liniară de semnalul modulator $x(t)$.

Tabelul 1.

Tipul de modulație		Componenta în fază $P_I(t)$	Componenta în cuadratură $P_Q(t)$	Rețineră
Cu două benzi laterale și purtătoare suprimate		$x(t)$	0	$x(t) = \text{semnalul mesaj}$
Cu bandă laterală unică (BLU)	Se transmite BL superioară	$\frac{1}{2} x(t)$	$\frac{1}{2} \hat{x}(t)$	$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$
	Se transmite BL inferioară	$\frac{1}{2} x(t)$	$-\frac{1}{2} \hat{x}(t)$	$\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$
Cu bandă laterală vestigială	Se transmite vestigiul BL inferioară	$\frac{1}{2} x(t)$	$\frac{1}{2} x'(t)$	$x'(t)$ este cea filtrului dat în ecuația (16) la excitația $x(t)$
	Se transmite vestigiul BL superioară	$\frac{1}{2} x(t)$	$-\frac{1}{2} x'(t)$	

După cum se aleg componentele $P_I(t)$ și $P_Q(t)$, putem identifica trei tipuri de modulație liniară:

1. Cu două benzi laterale și purtătoare suprimate DBL-PS
2. Modulație cu o singură bandă laterală - sau cu bandă laterală unică (BLU) sau (SSB) - single side band. Numai una din benzi laterale este transmisă, fie cea superioară, fie cea inferioară
3. Cu bandă laterală "vestigială" sau cu "rest" de bandă laterală. Se transmite numai un rest de bandă laterală (un vestigiu) și o versiune corespunzătoare modificată a celeilalte benzi laterale.

În Tabelul 1 sunt prezentate tipurile de modulație liniară

Se pot face două observații:

1. Componenta în-fază depinde numai de semnalul de mesaj
2. Componenta în-cuadratură este o versiune filtrată a semnalului de mesaj. Modificarea spectrală a lui $s(t)$ în raport cu $x(t)$ este dată numai de $P_q(t)$.

Rolul componentei în-cuadratură, dacă există, este să interfereze cu componenta în-fază pentru a elimina sau pentru a reduce puterea dintr-o bandă laterală a semnalului modulat.

Modulația cu două benzi laterale nepurtătoare suprinate

Semnalul modulat se poate pune sub formă:

$$s(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t \tag{8}$$

purtătoare fiind, pur și simplu, multiplicată cu semnalul de mesaj, așa cum se arată în fig. 8.

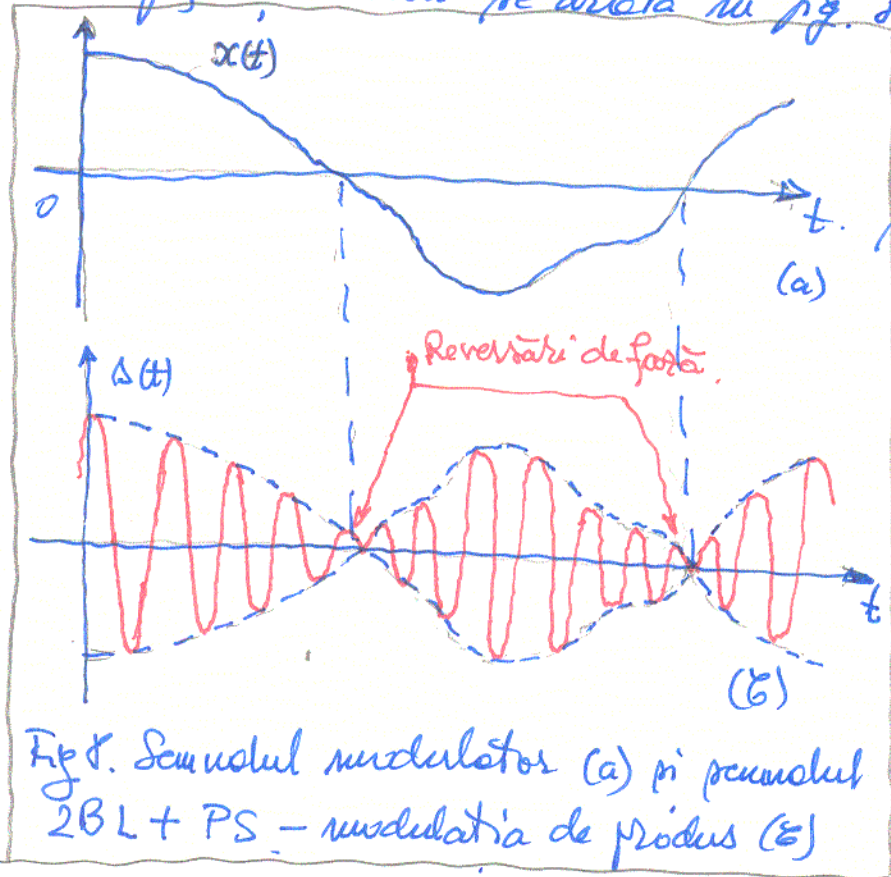


Fig. 8. Semnalul modulat (a) și semnalul 2BL + PS - modulația de produs (b)

Spectrul $S(\omega)$ al semnalului modulat se determină imediat ca fiind:

$$S(\omega) = \frac{A_c}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)] \tag{9}$$

În figura 9 se arată spectrul $X(\omega)$ al semnalului din banda de bază și spectrul $S(\omega)$ al semnalului modulat.

Se remarcă lipsa purtătoare. Aceasta nu înseamnă că nu vom avea în $S(\omega)$ componente spectrale pe frecvența $\omega = \omega_c$. Banda semnalului modulat, banda Carsoniană, este

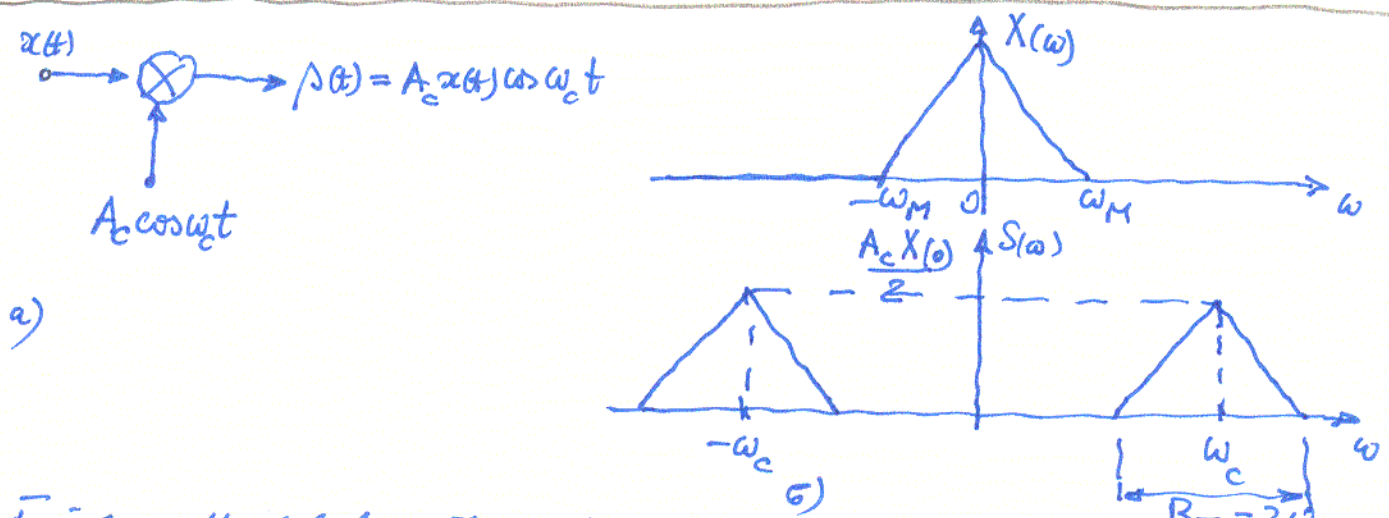


Fig 9. Modelul matematic al modulatorului de produs (a); Spectrul semnalului modulator și spectrul semnalului modulat în cazul modulației de produs.

dublul benzii semnalului modulator.

Detectia coerenta

Semnalul modulator $x(t)$ poate fi reconstituit din semnalul modulat utilizând așa numitul detector coerent cu modelul

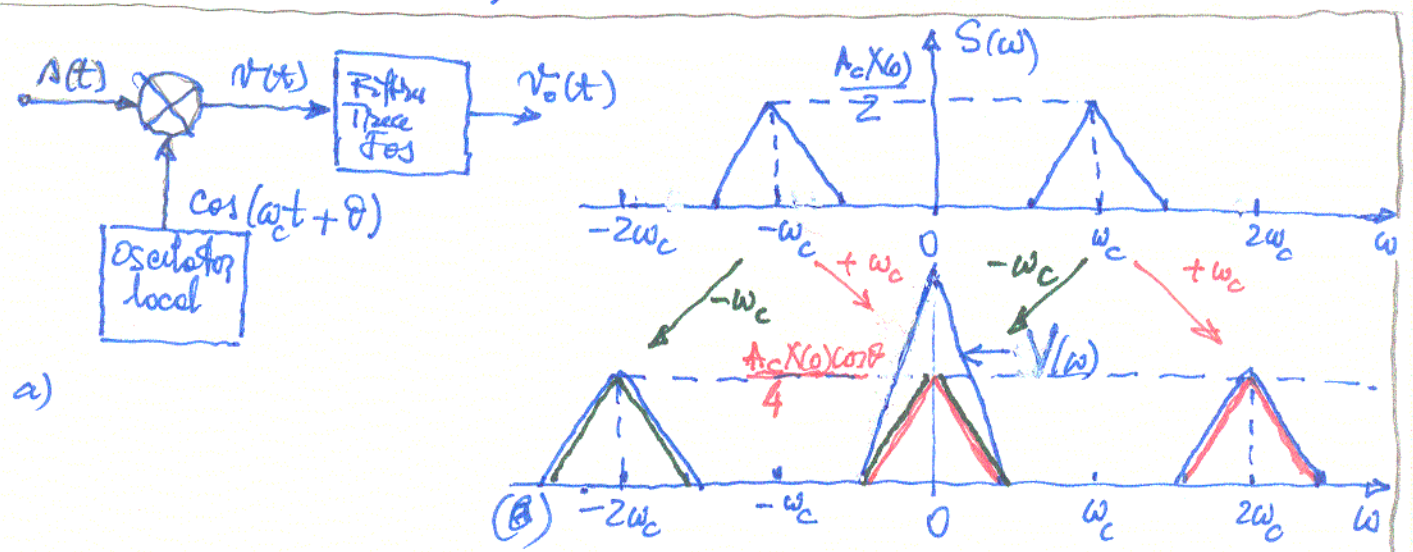


Fig 10. Modelul matematic al detectorului coerent (a); Spectrul semnalului $v(t)$, $V(\omega)$ (c).

matematic arădat în fig 10.a. Pentru $v(t)$ avem

$$v(t) = s(t) \cos(\omega_c t + \theta) = A_c x(t) \cos \omega_c t \cos(\omega_c t + \theta)$$

sau

$$v(t) = \frac{A_c}{2} x(t) \cos \theta + \frac{A_c}{2} x(t) \cos(2\omega_c t + \theta) \tag{10}$$

Primum termen din relația (10) este cu raportul în banda de lață $(-\omega_M, \omega_M)$. Al doilea termen are spectrul grupat în jurul lui $2\omega_c$, $(2\omega_c - \omega_M, 2\omega_c + \omega_M)$. În urma filtrării spre jos acest termen este înlăturat, așa că:

$$v_o(t) = \frac{A_c}{2} x(t) \cos \theta \tag{11}$$

Se vede că urmare a faptului că oscilatorul local, de la recepție, are un defazaj θ față de oscilatorul de la emisie, ce generează purtătoarea, apare o pierdere a răspunsului detectorului sincron. Răspunsul său e maxim pentru $\theta = 0$ și nul pentru $\theta = \pm \pi/2$.

În orice caz, defazajul θ trebuie să rămână constant în timp, altfel apare o modulație suplimentară, nedorită a semnalului recepționat. Oscilatorul local al receptorului trebuie să fie în sincronism perfect cu oscilatorul ce generează purtătoarea de la emisie, atât în frecvență cât și în fază (sinfazic).

O metodă practică pentru realizarea sincronismului receptorului cu emițătorul este metoda lui Costas.

■ Multiplexare cu purtătoare în cuadratură

Pentru $\theta = \pm \pi/2$ ieșirea detectorului sincron este nulă, efect numit și "efect de cuadratură". Se poate construi, pe baza efectului de cuadratură un sistem de multiplexare, în cuadratură două mesaje. Cele două purtătoare la care se recurge trebuie să fie în cuadratură; ele au aceeași frecvență, dar sunt defazate cu $\pm \pi/2$.

Dacă $x_1(t)$ și $x_2(t)$ sunt două semnale mesaj, independente, semnalul modulat, cu purtătoarele în cuadratură este:

$$s(t) = A_c x_1(t) \cos \omega_c t + A_c x_2(t) \sin \omega_c t \tag{12}$$

În figura 11 se arată schema bloc a unui astfel de sistem

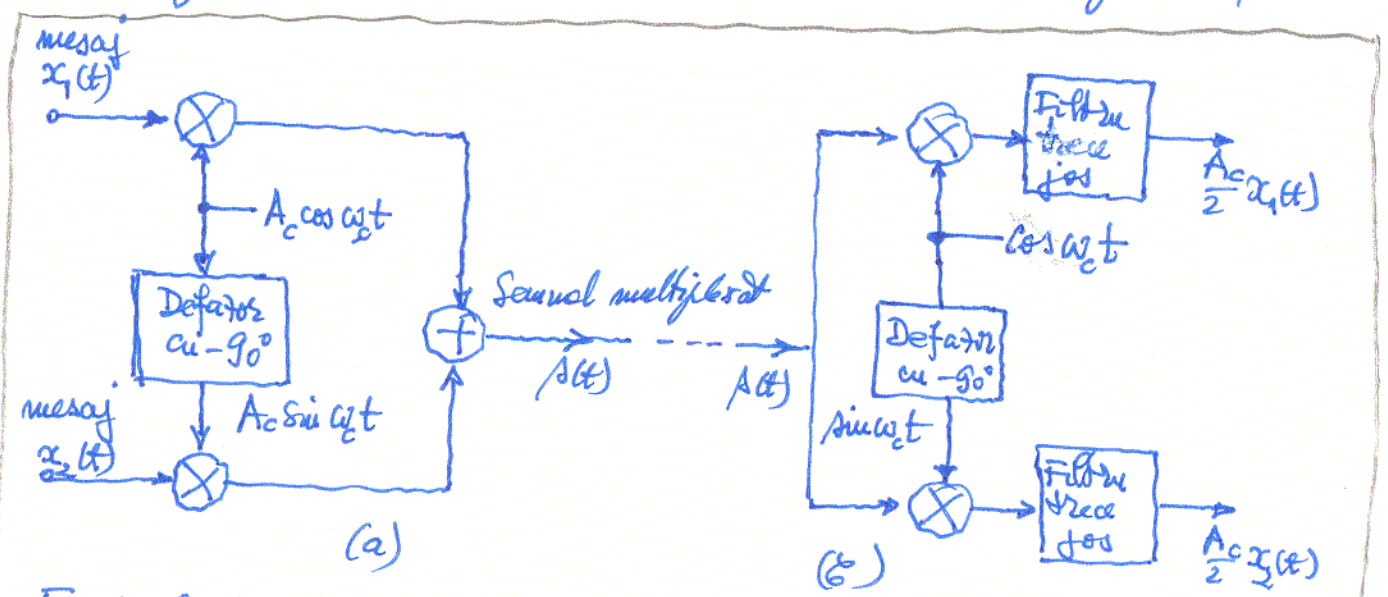


Fig 11. Sistem de multiplexare cu două purtătoare în cuadratură (cu aceeași frecvență); (a) emițătorul; (b) receptorul

cu multiplexare cu două purtătoare în cuadratură. La ieșirea receptorului se obțin, ca urmare a efectului de cuadratură, semnalele independente $A_c x_1(t)/2$ respectiv $A_c x_2(t)/2$.

Modulația cu bandă laterală unică (BLU)

În modulația cu bandă laterală unică se transmite o singură bandă, fie cea superioară, fie cea inferioară. Se poate genera un astfel de semnal modulat, cu bandă laterală unică, recurgând la o metodă de discriminare în frecvență, ce constă în două etape și corespunzător, două etaje:

- ▶ primul etaj constă dintr-un modulator de produs ce generează un semnal modulat, cu două benzi laterale și purtătoare suprimate;
- ▶ al doilea etaj este un filtru trece bandă, ce permite trecerea unei singure benzi laterale din cele două, suprimând cealaltă bandă laterală.

Spectrele semnalelor din banda de cată au, de obicei, o întindere pe un suport ce nu începe de la $\omega=0$. Spre exemplu, pentru semnalele vocale, frecvența minimă este de $\omega_m = 2\pi \cdot 300$ [rad/sec] (300 Hz). În consecință, așa

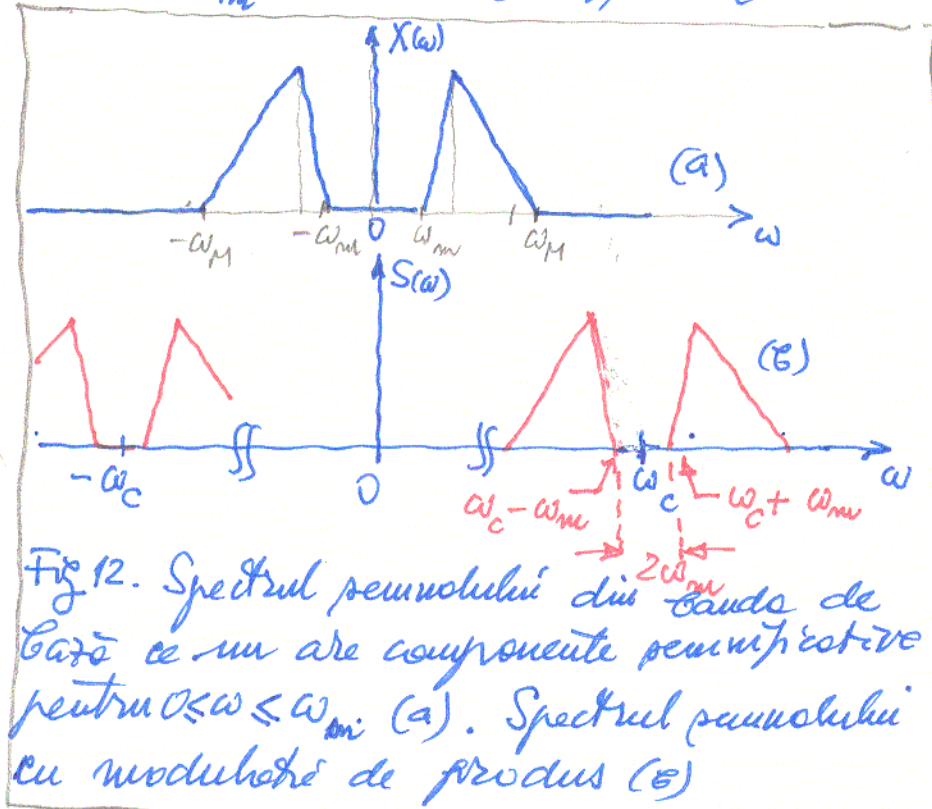


Fig 12. Spectrul semnalului din banda de cată ce nu are componente semnalizate pentru $0 \leq \omega \leq \omega_m$ (a). Spectrul semnalului cu modulație de produs (b)

cum se vede și din fig 12. b, spectrul semnalului modulat are un "gol" de lățime spectrală $2\omega_m$, între lobi spectrali corespunzători celor două benzi laterale.

Putem deci impune, pentru filtrul de

rejecție a benzii laterale nedorite următoarele condiții:

- ▶ Banda laterală dorită trebuie să fie în banda de trecere a filtrului;
- ▶ Banda laterală nedorită trebuie să fie în banda de oprire a filtrului;
- ▶ Banda de tranziție a filtrului, în trecerea de la banda de oprire la banda de trecere trebuie să fie cel mult dublul frecvenței minime din spectrul semnalului modulat, și anume $2\omega_m$.

Filtrele în cauză trebuie să fie deosebit de selectiv, motiv pentru care se recurge la rezonatoare cu cristal.

Pentru a demodula semnalele modulate cu bandă laterală unică se folosește detectorul sincron, format dintr-un multiplicator urmat de un filtru trece-jos și

ceea ce este esențial, dând un oscilator local, perfect sincron cu cel de la emițător.

Observație. Dacă pe lângă doar egalitatea numărată a frecvențelor celor două oscilatoare apar distorsiuni cauzate de defazare, în cursul procesului de demodulare. Deoarece urechea este mai puțin sensibilă la fază decât ochiul, astfel de distorsiuni sunt tolerabile în comunicațiile de voce. Creșterea distorsiunilor cauzate de fază poate de notareaimei voci de tipul celui a protoinului Donald.

■ Modulația cu rest de bandă laterală (Bandă vestigială)

În modulația cu rest de bandă laterală (Vestigial sideband modulation - VSB), una dintre benzile laterale este parțial suprimată și, pentru a compensa efectul se transmite un rest (un "vestigiu") din cealaltă bandă laterală. O metodă uzuală de generare a semnelor VSB recurge la discriminare în frecvență. Așa cum se vede în

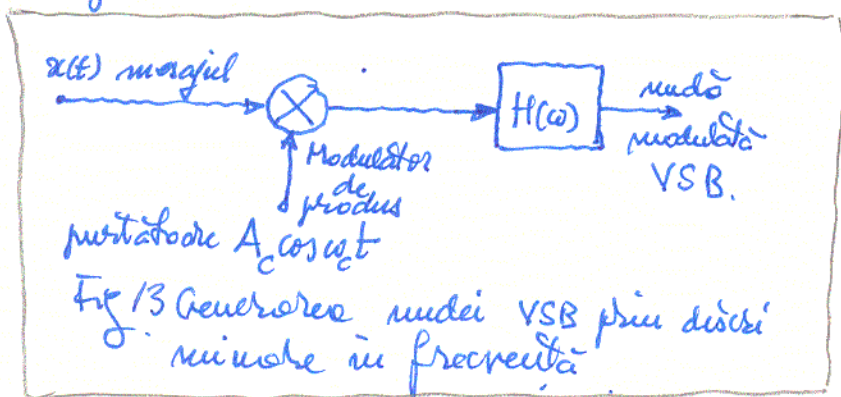
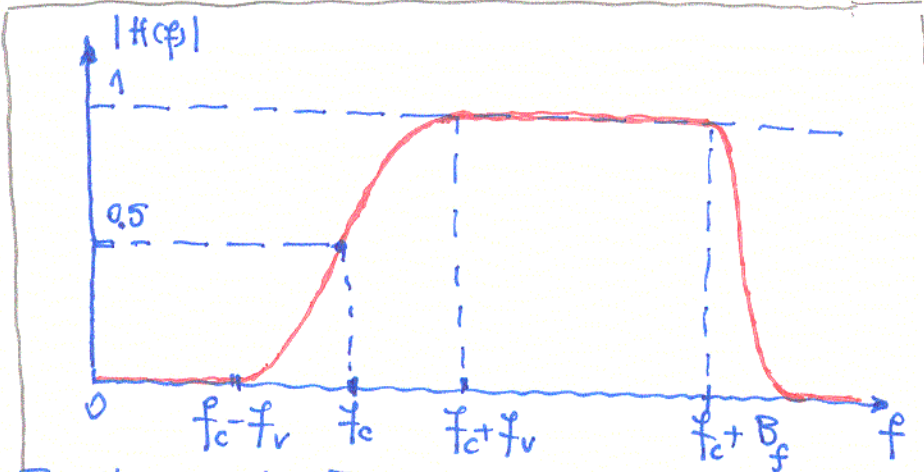


fig. 13, se generează mai întâi, printr-un modulator de produs, un semnal modulat cu două benzi laterale și purtătoare suprimată.

Semnalul se trece printr-un filtru trece bandă, având un răspuns în frecvență potrivit unei modulații VSB. Filtrul este cel ce face distincția, până la urmas între VSB și SSB, modulația cu o singură bandă laterală, obținută tot prin discriminare de frecvență.

Pentru transmiterea unui rest de bandă laterală inferioră, răspunsul în frecvență al filtrului trebuie să fie cel din fig 14, adică numai pentru $\omega > 0$.



Regiunea de tăiere a caracteristicii filtrului, sau, cum i se mai spune zona de tranziție $[f_c - f_v, f_c + f_v]$ trebuie să aibă o simetrie impară în jurul punctului definit de frecvența de tăiere.

Fig. 14. $|H(f)|$ pentru generarea semnalului VSB. În intervalul de tranziție trebuie să fie satisfăcute două condiții:

1. Suma modulelor răspunsului la frecvențe simetrice față de $\omega_c(f_c)$ trebuie să fie unu, în banda de tranziție.
2. Faza răspunsului este liniară în bandă.

Încreștăm că :

$$H(\omega - \omega_c) + H(\omega + \omega_c) = 1 \tag{13}$$

Banda de transmisie B_T este

$$B_T = B + 2f_v \tag{14}$$

unde B este banda mesajului de transmis, iar $f_v = \omega_v / (2\pi)$ este banda vestigială.

Conform cu tabelul 1, semnalul modulată VSB poate fi pus, în domeniul timp, sub forma :

$$s(t) = \frac{1}{2} A_c x(t) \cos \omega_c t \pm \frac{1}{2} A_c x'(t) \sin \omega_c t \tag{15}$$

în care semnul "+" corespunde transmisiei vestigialii din banda laterală superioară iar semnul "-" corespunde transmisiei vestigialii din banda laterală inferioară. Semnalul $x'(t)$ este componenta de cuadratură a semnalului $s(t)$, și se obține precând mesajul $x(t)$ prin filtrul $H_q(\omega)$ ce satisface cerința :

$$H_q(\omega) = j [H(\omega - \omega_c) - H(\omega + \omega_c)] ; \quad -B \leq \omega \leq B \tag{16}$$

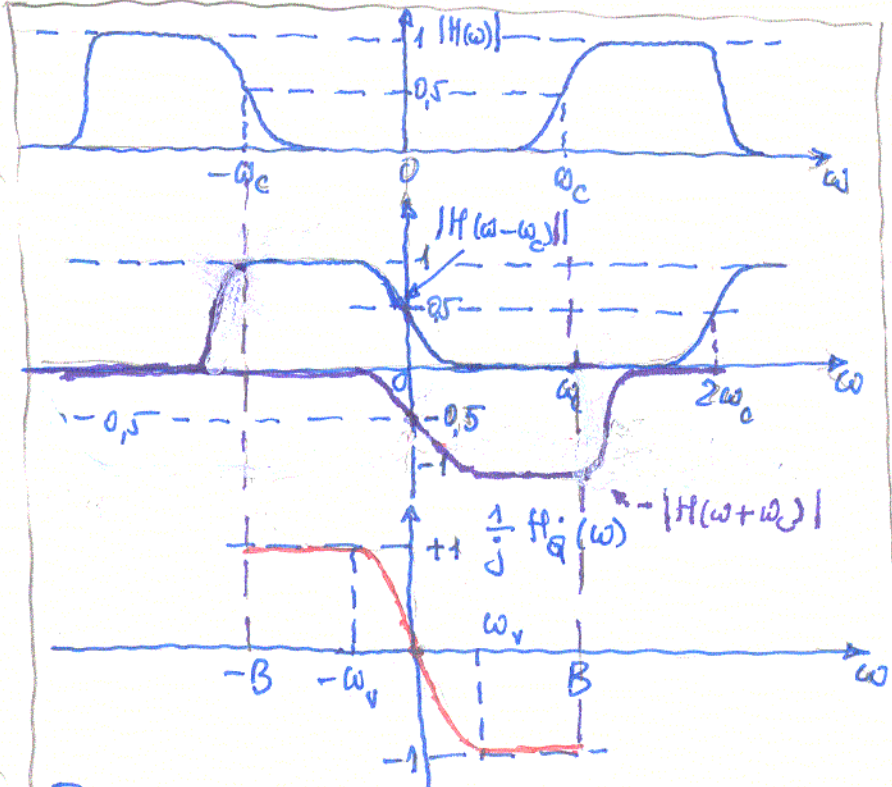


Fig 15. Filtrul de generare a componentei de cuadratură a mesajului, $H_q(\omega)$.

În fig. 15 se arată răspunsul în frecvență al filtrului ce generează componenta de cuadratură a mesajului, $x'(t)$.

Observație. Modulată cu bandă laterale mici poate fi privită ca o modulație cu bandă vestigială, în care vestigiul se reduce la zero. Se vede atunci că :

$$H_q(\omega) = -j \text{Sgn } \omega$$

sau că : $x'(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$.

■ Señalul de televiziune.

Modulația VSB se utilizează în televiziunea comercială. Modulația la care se recurge este determinată de doi factori :

1. Señalul video are o bandă largă, cu componente de joasă frecvență semnificative. Acestea din urmă necesită modulația cu bandă vestigială.
2. Circuitele folosite în construcția demodulatorului trebuie să fie simple, pentru a avea un preț de cost acceptabil (??). Aceasta cerează generarea detecției de amplitudă, care impune însă adăugarea unei părți de bandă pentru VSB.

Trebuie spus, referitor la punctul 1, că desi dorinta de a păstra întreaga bandă există, nu se recurge la o modulație VSB propriu-zisă. Motivul este acela că, la cunoscutul nivel de putere este foarte mare în filtrul ce ar controla

perfect benzile laterale ar fi mult prea scump. In locul sau, fiecare receptor este echipat cu un filtru VSB, in care nivelurile de putere sunt mici si filtrul este relativ ieftin. Performantele globale rezultate sunt aceleasi cu cele care s-ar obtine cu filtrul VSB plasat la emisie, cu exceptia faptului ca se produce o risipa de putere si de banda (la emisie). In fig.

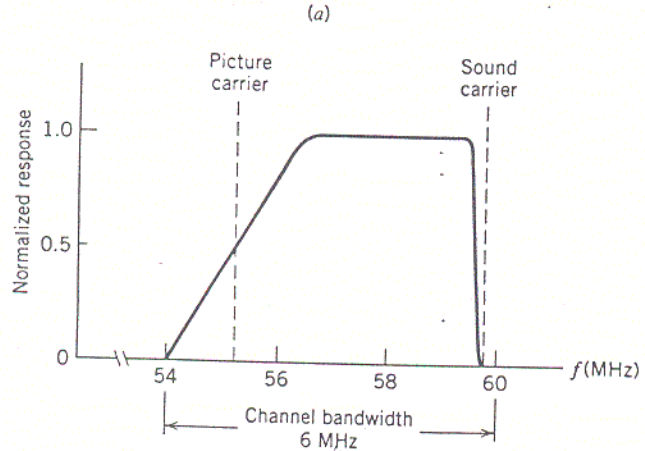
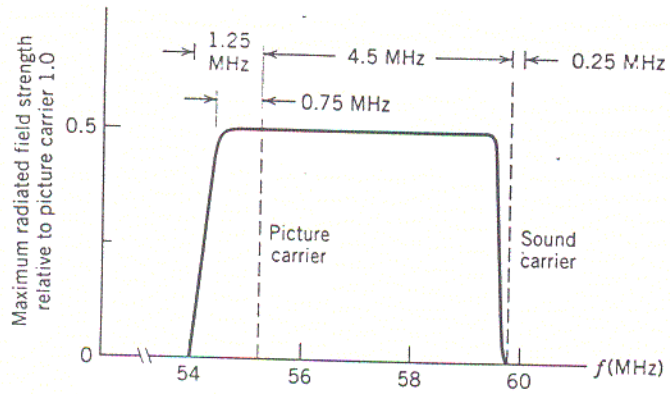


Fig. 16 Spectrul de amplitudini al semnalului TV (a); Raspunsul filtrului VSB din receptor (b)

16a. se arata spectrul (idealizat) al unui semnal TV. Se emite de fapt intreaga banda superioara si 25% din banda laterala inferioara, precum si purtatoarea de imagine. In fig 16 b. se arata raspunsul in frecventa al filtrului din receptor ce se foloseste la formarea semnalului VSB. Aşa cum se vede linies de banda a canalului este

de 6 MHz pentru sistemele TV din America de Nord. Frecventa purtatoarei de semnal este de 55,25 MHz iar frecventa purtatoarei de sunet este de 59,75 MHz. Informatia continuta de semnalul de imagine ocupa un spectru ce se intinde cu 1,25 MHz sub purtatoarea si cu 4,5 MHz peste purtatoarea.

In ceea ce priveste prezenta purtatoarei - punctul 2 - adaugata unui semnal VSB se produce o distorsiune a formei de unda a semnalului de imagine perceput la iesirea detectorului. Distorsiunea este produsa de componenta de cuadratură a semnalului modulată VSB.

Formula (15) permite determinarea distorsiunii, ce apare ca urmare a detecției de amplitudă. Dacă la $s(t)$ dat de (15) - semnal modulată VSB - se adaugă purtătoarea $A_c \cos \omega_c t$, semnalul aplicat detectorului de amplitudă se poate scrie sub formă:

$$s(t) = A_c \left[1 + \frac{1}{2} m x(t) \right] \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m A_c x'(t) \sin \omega_c t \quad (17)$$

relație în care m este gradul de modulație. Funcția $a(t)$ a detectorului de amplitudă este:

$$\begin{aligned} a(t) &= A_c \sqrt{\left[1 + \frac{1}{2} m x(t) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} m x'(t) \right]^2} \\ &= A_c \left[1 + \frac{1}{2} m x(t) \right] \sqrt{1 + \left[\frac{\frac{1}{2} m x'(t)}{1 + \frac{1}{2} m x(t)} \right]^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Se vede că distorsiunea apare ca urmare a existenței lui $x'(t)$, ce determină termenul de cuadratură. Distorsiunea se poate reduce prin două metode:

- ▶ reducând gradul de modulație, m ;
- ▶ ~~creștând~~ lățimea benzii vestigiale, pentru a reduce $x'(t)$.

Ambele metode se folosesc în practică. În televiziunea comercială lățimea benzii vestigiale (care este de 0,75 MHz, sau o pesime din lățimea de bandă) este astfel aleasă încât distorsiunile să rămână în limite tolerabile chiar la un grad de modulație de 100%.

4. Translația de frecvență

Operațiunea esențială implicată de modularea cu bandă laterală unică este de fapt o formă a translației de (în) frecvență, motiv pentru care modularea cu bandă laterală unică este numită și "schimbare de frecvență", "mixare" sau "heterodinare".

Ideea translației de frecvență poate fi generalizată după cum urmează. Presupunem că $s_1(t)$ este un semnal modulată

cu spectrul centrat pe frecvența purtătoare $\omega_1 = 2\pi f_1$, și că pe care să translatăm în sus acest spectru, astfel încât purtătoarea să se schimbe, ca frecvență, de la ω_1 la $\omega_2 = 2\pi f_2$. Aceasta cerință

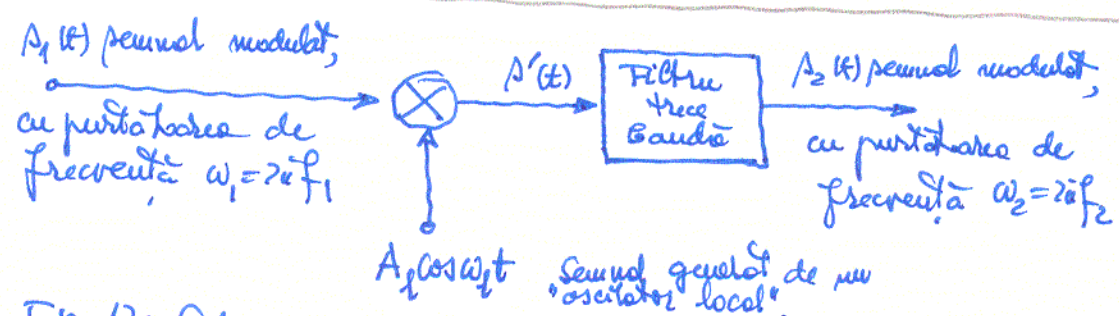


Fig 17 Schema bloc a unui "mixer".

este îndeplinită de "mixerul" sau "amestecătorul" din fig 17.

El constă dintr-un modulor de produs și un filtru trece-bandă.

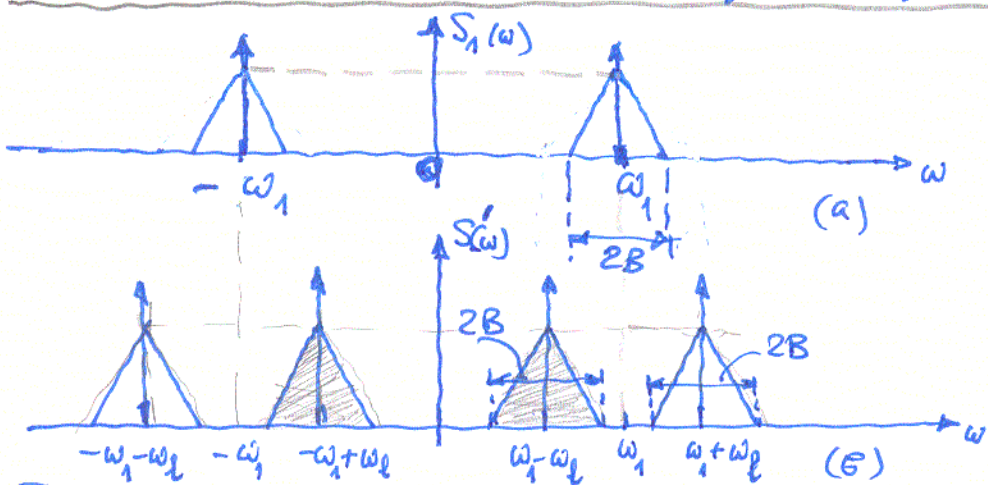


Fig 18. Spectrul semnalului modulor, $S_1(\omega)$, de la intrarea mixerului (a) Spectrul corespunzător al semnalului, $S'(\omega)$ de la ieșirea modulorului de produs din structura mixerului (b).

Explicția funcționării mixerului poate fi dată pe baza figurii 18 în care am presupus, pentru fixarea ideilor, că $A_1(t)$ este un semnal modulor în amplitudină, cu purtătoare pe frecvența $\omega_1 = 2\pi f_1$ și bandă $2B$, presupunând, bineînțeles, că $\omega_1 > B$. După modulorului de produs se obține semnalul $A'(t)$ cu spectru $S'(\omega)$, vizibil în fig 18b. Semnalul $A'(t)$ poate fi privit ca o sumă de două semnale componente, modulate ca și primul semnal, $A_1(t)$. O componentă modulată are spectrul trasat iar cealaltă componentă are spectrul nemodulat.

Descriem două situații diferite și anume:

► Conversie "în sus" (Up conversion). În acest caz $f_2 > f_1$ ($\omega_2 > \omega_1$).
 Frecvența pe care trebuie să funcționeze "oscilatorul local" al
 mixerului, $\omega_2 = 2\pi f_2$ este

$$\omega_2 = \omega_1 + \omega_c \quad (f_c = f_2 - f_1)$$

sau

$$f_c = f_1 + f_2$$

Porțiunea nedorită a spectrului din fig. 18b corespunde semnale-
 lui modulată căuștat (cu conversie în sus) $s_2(t)$; porțiunea dorită
 definește un alt semnal modulată, numit semnal ima-
gine, asociat semnalului $s_2(t)$. Mixerul pe numește în acest
 caz, convertor în sus de frecvență. (Up converter).

► Conversie "în jos" (Down conversion). În acest caz $f_2 < f_1$ ($\omega < \omega_1$).
 Frecvența oscilatorului local $\omega_2 = 2\pi f_2$ este calculabilă cu:

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_c \quad (f_c = f_1 - f_2)$$

sau

$$f_c = f_1 - f_2$$

Porțiunea dorită a spectrului corespunde semnalului modu-
 lat cu conversie în jos, $s_2(t)$; porțiunea nedorită a spectru-
 lui definește un alt semnal modulată, numit semnal imagine,
 asociat semnalului $s_2(t)$. Mixerul pe numește, în acest caz,
convertor în jos de frecvență (down converter).

Observație. Pentru ca să nu apară suprapunerii ale lobilor
 spectrali, este necesar ca :

$$\omega_c > B$$

Altfel spus, translația de frecvență trebuie făcută cu o frecvență
 ce depășește permitându-se semnalului modulată sau banda
 mesajului.

Filtrul trece bandă ce urmează în mixer modulătorului
 de produs are rolul de a reține acea porțiune din spectru
 care este necesară, înlăturând semnalul imagine.

5. Multiplexarea prin divizare în frecvență

O operație importantă de prelucrare a semnelor este "multiplexarea", în cadrul căreia un număr de semnale independente pot fi "combinate" într-un singur semnal compus, ce poate fi transmis prin canalul de comunicație. Semnalele vocale din sistemele de telefonie ocupă un spectru cuprins între 300Hz și 3400Hz. Pentru a transmite un număr de semnale vocale pe același canal, este necesar să le separăm unele de altele pentru a nu se produce suprapunerea (interferența), în așa fel însă încât să le putem reconstitui la recepție. Separarea poate fi făcută fie în frecvență fie în timp. Separarea în frecvență se numește multiplexare prin divizare în frecvență (frequency-division multiplexing, FDM) iar separarea în timp se numește multiplexare prin divizare în timp (Timpului) (time-division multiplexing, TDM). Vom prezenta doar multiplexarea prin divizare în frecvență (FDM).

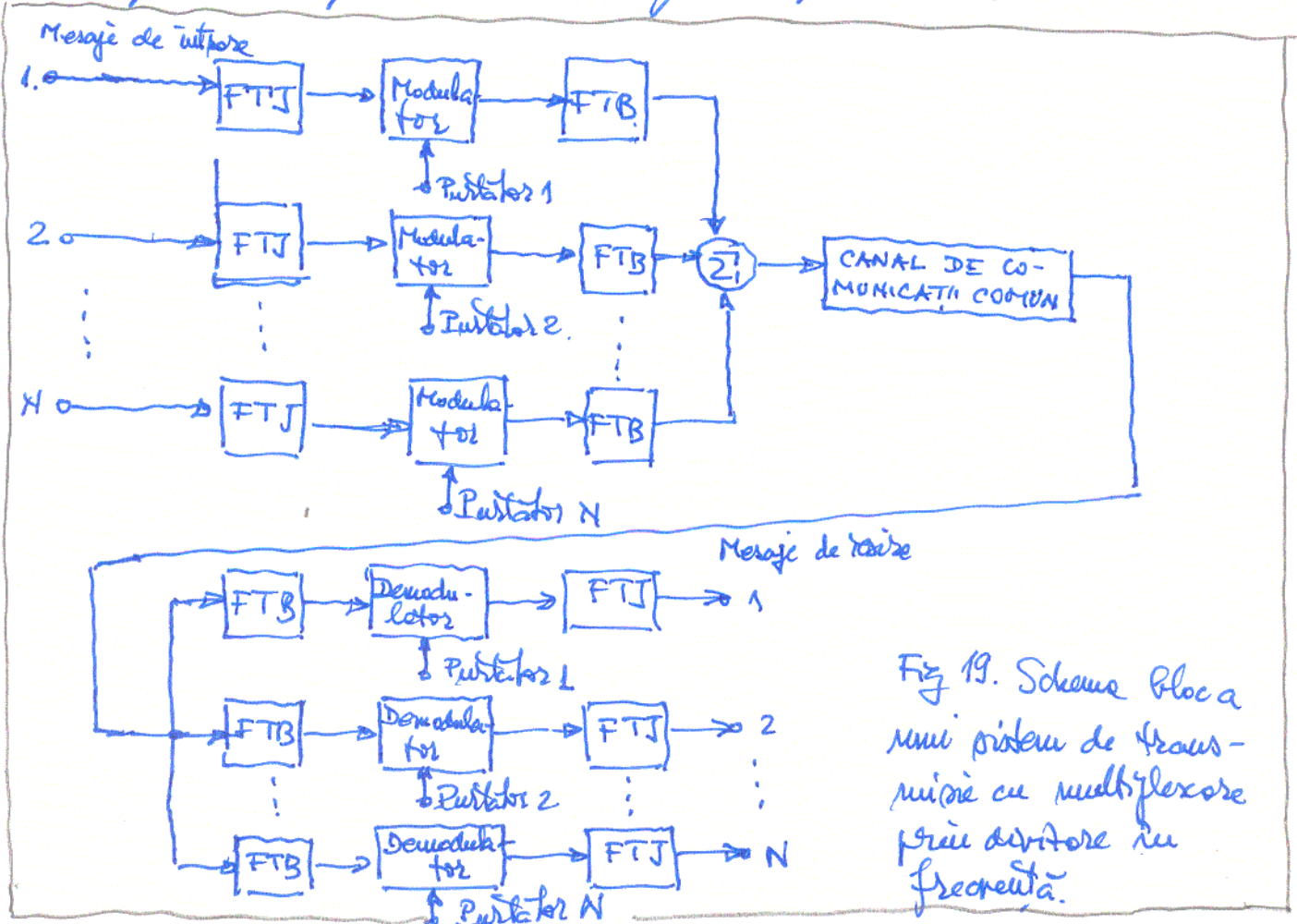


Fig 19. Schema Bloc a unui sistem de transmisie cu multiplexare prin divizare în frecvență.

Scheema bloc a sistemului FDM este cea din fig 19. La intrare cele N mesaje sunt filtrate trece jos (FTJ) pentru a înlătura componentele de înaltă frecvență ce pot deranja. Semnalele filtrate sunt aplicate unor modulatori ce plasează spectrele mesajelor în benzi de frecvențe diferite, fără suprapuneri. Pentru acest lucru sunt necesare N purtătoare de frecvențe potrivit alese. Deși, în principiu, puteam recurge la orice tip de modulație, în sistemele FDM se folosește modulația de amplitudină cu bandă laterală mică. În sistemele pentru transmiterea semnelor telefonice (vocal) se utilizează purtătoare decalate între ele cu câte 4 KHz. Filtrele trece bandă de după modulatori elimină ^{banda} semnelor modulate, la o lățime corespunzătoare (de exemplu 4 KHz). Tesirile filtrate trece-bandă sunt înmate și transmise prin canalul de comunicație.

La recepție, filtrele trece bandă separă este un spectru corespunzător inițial din cele N semnale modulate. Demodulările, urmate de filtre trece jos, asigură refacerea semnelor mesaj. Demodularea are nevoie de purtătoare locale, în sincronism cu cele de la emisie.

Observație.

Pentru un sistem de comunicare vocală (telefonică) în ambele sensuri, se recurge la două sisteme FDM, câte unul pe sens.

Exemplu.

Implementarea practică a unui sistem FDM, simplă, de alt mări multe ori, câteva trepte de modulație, așa cum se arată și în fig 20. Primul pas combină douăsprezece semnale vocale într-un grup primar. Se folosesc 12 purtătoare cu frecvențele $f_c = 60 + 4n$ [kHz], $n = 1, 2, \dots, 12$ și se selectează benzile laterale inferioare. Se ocupă astfel un spectru între 60 KHz și 108 KHz. (108 - 60 = 48 KHz lățime de bandă)

În următorul pas 5 grupuri primare se combină în grupuri secundare, folosind 5 purtătoare cu frecvențele

$f_c = 312 + 48n$ [kHz] ; $n = 1, 2, \dots, 5$, selectând tot benzile laterale inferioare. Se ocupă în acest fel un spectru de la $420 - 108 = 312$ kHz până la $612 - 60 = 552$ kHz, ocupând o bandă de $552 - 312 = 240$ kHz. Mai multe grupuri secundare se asociază în grupuri terțiare etc.

Observații: În America de Nord sînt utilizate pentru grupuri, începînd de jos în sus: Basicgroup ; Supergroup ; Mastergroup ; Very large groups.

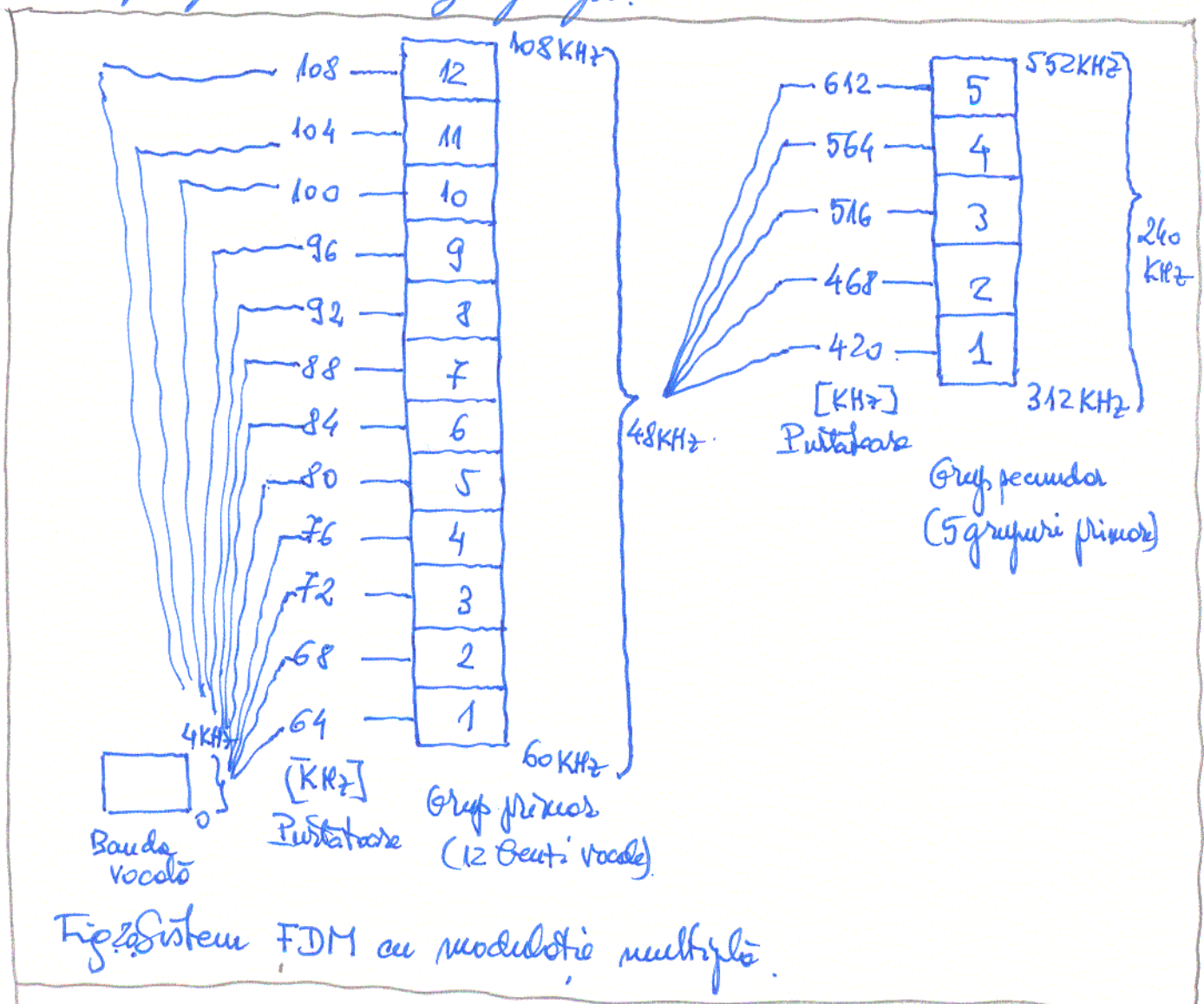


Fig. 2 Sistem FDM cu modulație multiplă.

6. Modulația unghiurilor.

În cele prezentate am analizat efectul modificării lente a amplitudinii unui purtător sinusoidal, în conformitate cu un semnal din banda de bază, purtător al informației.

Un alt mod de a modula și purtătoare sinusoidale se referă la modificarea unghiului - fazei - acesteia, în conformitate cu semnalul din banda de bază. În acest gen de modulație amplitudinea purtătoarei se menține constantă.

O calitate esențială a modulației unghiurilor este modul ei comportare în prezența zgomotului, în sensul unei mai bune discriminări. Aceasta se obține însă pe seama unei creșteri a lățimii benzii de frecvențe transmise. Modulația unghiurilor (exponențială) ne permite să facem concesii privind banda ocupată, în schimbul îmbunătățirii performanțelor în prezența zgomotului. Modulația de amplitudine nu permite acest joc între bandă și performanță.

■ Definiții

Fie $\vartheta_i(t)$ unghiul - fază - unui purtător sinusoidal, o funcție de mesajul de transmis; unde modulația exponențială are expresia:

$$A(t) = A_0 \cos \vartheta_i(t) \quad (19)$$

Oscilații complete are loc atunci când $\vartheta_i(t)$ se schimbă cu 2π .

Deci $\vartheta_i(t)$ variată monoton în timp, frecvența "medie" pe intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ este

$$\omega_{\Delta t}(t) = \frac{\vartheta_i(t+\Delta t) - \vartheta_i(t)}{\Delta t} \quad ; \quad f_{\Delta t}(t) = \frac{1}{2\pi} \omega_{\Delta t}(t) \quad (20)$$

Se definește "frecvența instantanee" a semnalului modulat, cu modulație exponențială prin:

$$\omega_i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vartheta_i(t+\Delta t) - \vartheta_i(t)}{\Delta t} = \frac{d\vartheta_i(t)}{dt} \quad ; \quad f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \omega_i(t) \quad (21)$$

În răstul ecuației (19), semnalul cu modulație un-

gluitor, $\rho(t)$, poate fi interpretat ca fiind un vector rotitor, cu amplitudinea A_c și unghiul $\theta_i(t)$. Viteza unghiurilor a vectorului rotitor este $\omega_i(t) = \theta_i'(t)$ - vezi și relația (21).

Dacă purtătoarea nu este modulată, fara întârziere derivă:

$$\theta_i(t) = \omega_c t + \phi_c = 2\pi f_c t + \phi_c$$

și vectorul pe rotete cu viteza unghiulară constantă, ω_c . Constanta ϕ_c este valoarea inițială a fazei, la momentul $t=0$.

Se pot imagina multe căi prin care $\theta_i(t)$ poate fi modificat în conformitate cu un anumit mesaj. Dintre acestea două sunt mai importante, modulatia de fază și modulatia de frecvență, de fapt după cum urmează:

1. Modulatia de fază (Phase modulation, PM) pentru care mesajul $x(t)$ modifică $\theta_i(t)$ conform relației:

$$\theta_i(t) = \omega_c t + k_p x(t) = 2\pi f_c t + k_p x(t) \quad (22)$$

Constanta k_p , măsurată în radiani/volt, se numește sensibilitatea de fază a modulatorului.

Dacă $\phi_c = 0$, ceea ce nu reduce din generalitate, mesajul MP se exprimă în domeniul timp prin:

$$\rho(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p x(t)] = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p x(t)] \quad (23)$$

2. Modulatia de frecvență (Frequency modulation, FM) pentru care mesajul $x(t)$ modifică frecvența instantaneei conform legii:

$$\omega_i(t) = \omega_c + 2\pi k_f x(t); \quad f_i(t) = f_c + k_f x(t) \quad (24)$$

în care k_f este sensibilitatea de frecvență și se măsoară în Hz/Volt.

În condiția fazei inițiale nule, $\phi_c = 0$, se obține din (24) prin integrare că:

$$\theta_i(t) = \omega_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (25)$$

și deci, expresia temporală a semnalului modulat în frecvență derivă:

$$\theta(t) = A_c \cos \left[\omega_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau \right] = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau \right] \quad (26)$$

Se vede că, în cele două cazuri, $\theta_c(t)$ depinde fie direct de semnalul mesaj $x(t)$, fie de valoarea curentă a integralei sale. Trecurile prin zero ale semnalelor cu modulație unghiulară nu sunt planate la momente de timp cu distribuție uniformă pe axa timpului, așa cum e cazul la semnalele cu modulație de amplitudină.

Dacă pe ambele relații (23) și (26) se vede că semnalul MF poate fi considerat ca fiind un semnal PM în care modularea se face cu $\int_0^t x(\tau) d\tau$, și nu direct cu $x(t)$.

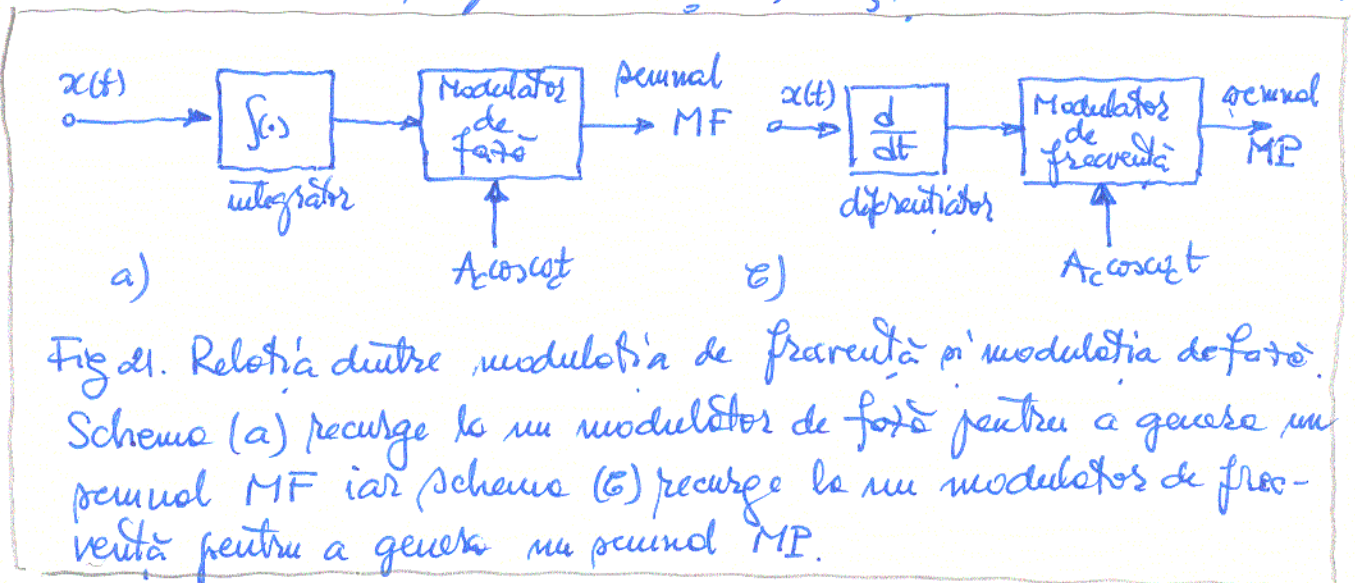


Fig. 21. Relația dintre modulația de frecvență și modulația de fază. Schema (a) recurge la un modulator de fază pentru a genera un semnal MF iar schema (b) recurge la un modulator de frecvență pentru a genera un semnal MP.

Această înseamnă că un semnal MF poate fi generat cu un modulator de fază - fig. 21.a. Un semnal PM poate fi privit ca un semnal FM, în care modularea se face cu derivata semnalului mesaj. Această înseamnă că un semnal MP poate fi generat cu un modulator de frecvență - fig. 21.b.

Ca o consecință proprietățile semnalelor PM pot fi deduse de din cele ale semnalelor FM și invers. De aceea ne vom ocupa, mai ales, de semnalele cu modulație de frecvență FM.

7. Modulația de frecvență

Semnalul FM descris prin relația (26) este o funcție neliniară de semnalul modulator, $x(t)$, ceea ce face ca mo-

dublă de frecvență să fie un proces (profund) neliniar. Ca urmare, relația dintre spectrul semnalului modulat în frecvență și spectrul semnalului modulator nu este atât de simplă cum a fost în cazul modulației de amplitudină.

Pentru a ne face o imagine privind spectrul semnalelor modulate în frecvență vom considera :

- ▶ un caz simplu în care se produce o modulație de frecvență de bandă îngustă
- ▶ un alt caz simplu, în care se produce o modulație de frecvență de bandă largă, dar semnalul modulator este foarte simplu, un semnal unisonal.

Vom urmări să stabilim o relație empirică între banda semnalului modulator și banda semnalului modulat, ce constituie banda de transmisie.

Considerăm un semnal modulator unisonal :

$$x(t) = A_m \cos \omega_m t \tag{27}$$

Frecvența instantanee a semnalului modulat în frecvență este :

$$\omega_i(t) = \omega_c + 2\pi k_f A_m \cos \omega_m t = \omega_c + 2\pi \Delta f \cos \omega_m t \tag{28}$$

unde

$$\Delta f = k_f A_m \text{ sau } \Delta \omega = 2\pi k_f A_m \tag{29}$$

este numită deviația de frecvență și reprezintă maximum depleșorii frecvenței instantanee de la frecvența purtătoare.

O caracteristică esențială a semnalului FM este aceea că deviația de frecvență Δf este proporțională cu amplitudinea semnalului modulator dar nu depinde de frecvența de modulație.

Faza semnalului modulat pe determinăm din (28) prin integrare și este, pentru $\phi_c = 0$:

$$\phi_i(t) = \omega_c t + \frac{\Delta \omega}{\omega_m} \sin \omega_m t = 2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin 2\pi f_m t \tag{30}$$

Raportul $\Delta f/f_m$, între deviația de frecvență și frecvența modula-
toare pe numeste indice de modulație și se notează cu β :

$$\beta = \frac{\Delta \omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \quad [\text{radiani}] \quad (31)$$

Rezultă deci că :

$$\phi_i(t) = \omega_c t + \beta \sin \omega_m t = 2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t \quad (32)$$

de unde rezultă că indicele de modulație β măsoară deviația de fază ^{maximă} a fazei semnalului FM de la faza $2\pi f_c t$ a semnalului nemodulat. Avem :

$$s(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \sin \omega_m t] = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin 2\pi f_m t] \quad (33)$$

În funcție de valoarea lui β se disting două cazuri :

- ▶ Modulația de frecvență de bandă îngustă, pentru care $\beta \ll 1$ radian
- ▶ Modulația de frecvență de bandă largă, pentru care $\beta \gg 1$ radian

■ Modulația de frecvență de bandă îngustă.

Relația (33) poate fi pusă sub formă :

$$s(t) = A_c \cos \omega_c t \cos(\beta \sin \omega_m t) - A_c \sin \omega_c t \sin(\beta \sin \omega_m t) \quad (34)$$

Dacă $\beta < \pi/36$ radiani se pot face aproximațiile :

$$\cos(\beta \sin \omega_m t) \approx 1 \quad \text{și} \quad \sin(\beta \sin \omega_m t) \approx \beta \sin \omega_m t$$

În consecință, semnalul modulat (34) devine :

$$s(t) \approx A_c \cos \omega_c t - \beta A_c \sin \omega_c t \sin \omega_m t \quad (35)$$

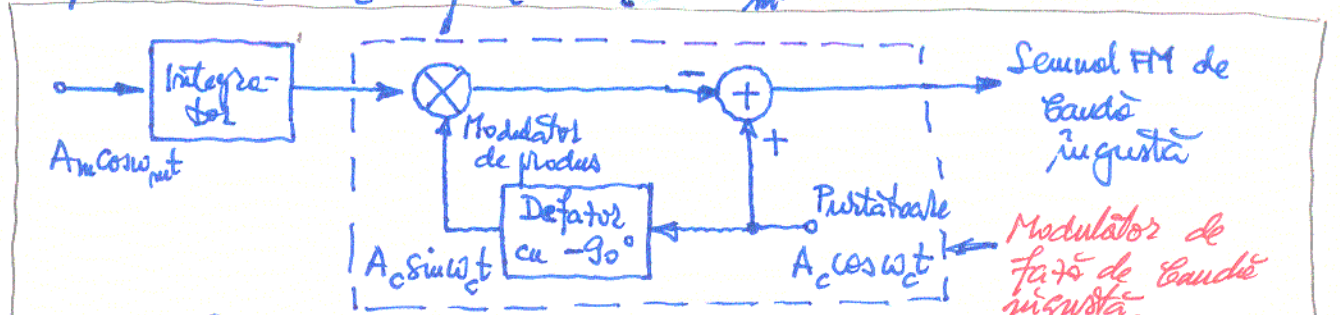


Fig 22. Schema Bloc a unui sistem de generare a semnalelor FM de bandă îngustă.

În fig. 22 se arată o modalitate de implementare a semnalului (35) ce aproximează un semnal FM de bandă îngustă. Trebuie să semnalăm însă că schemele bloc din fig 22 se abate de la un modulator ideal în două aspecte fundamentale:

1. Amvelopa este afectată de o modulație reziduală de amplitudine și de aceea variază în timp.
2. Pentru o modulație pur sinusoidală, unghiul $\theta_i(t)$ conține distorsiuni armonice, sub formă armonică de ordin trei și de ordin superior a frecvenței modulației $\omega_m = 2\pi f_m$.

Revenind la relația (35), ea se poate pune și sub formă:

$$s(t) \approx A_c \cos \omega_c t + \frac{1}{2} \beta A_c [\cos(\omega_c + \omega_m)t - \cos(\omega_c - \omega_m)t] \quad (36)$$

care este asemănătoare cu relația corespunzătoare din cazul modulației în amplitudine

$$s_{AM}(t) = A_c [1 + m \cos \omega_m t] \cos \omega_c t = A_c \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m A_c [\cos(\omega_c + \omega_m)t + \cos(\omega_c - \omega_m)t] \quad (37)$$

Se poate deduce că semnalul FM de bandă îngustă are, practic, aceeași întindere spectrală cu un semnal modulat în amplitudine, dB.

Se poate reprezenta semnalul FM de bandă îngustă recurgând la o diagramă fazorială, așa cum se vede în fig. 23a. Ca

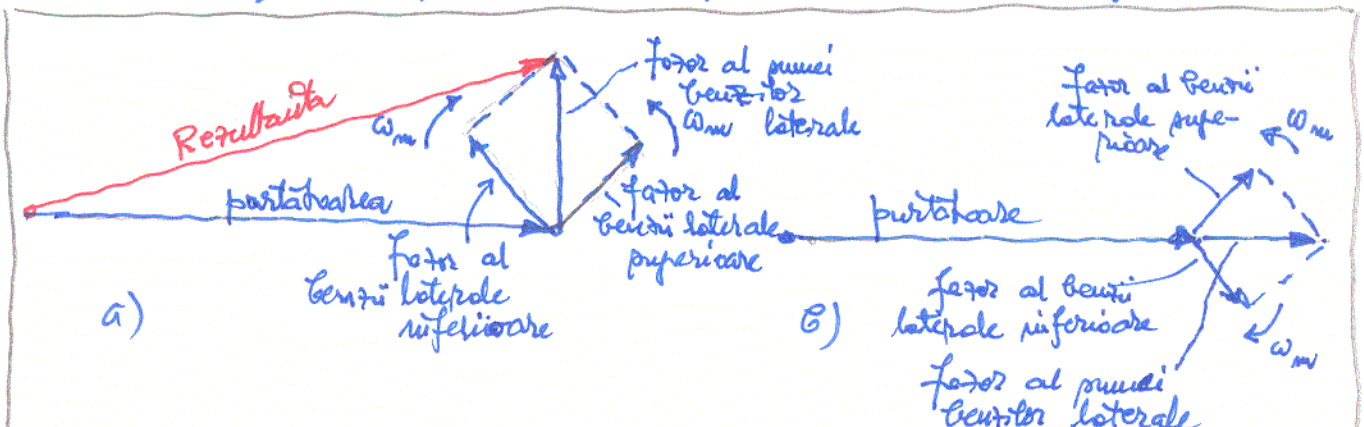


Fig 23 Reprezentarea fazorială a semnalului FM de bandă îngustă (a) și a semnalului MA (b)

referință se utilizează faza purtătoare. Suma fazei celor două laterale este un fazor ce este tot timpul perpendicular pe fazorul corespunzător purtătoare. Rezultanta este semnalul FM de bandă îngustă, de lungime aproximativ egală cu a fazei corespunzător purtătoare.

În fig 236 se arată, pentru comparație reprezentarea prin fazor a semnalului modulată în amplitudine corespunzător.

Vom considera acum cazul mai general al modulației de bandă îngustă, în care $x(t)$ este un semnal oarecare dar care produce o modulație de frecvență de bandă îngustă:

$$p(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau\right) =$$

$$= A_c \cos \omega_c t \cos\left(2\pi k_f y(t)\right) - A_c \sin \omega_c t \sin\left(2\pi k_f y(t)\right)$$

în care am notat

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad \text{cu } |y(t)| \leq A$$

Dacă

$$2\pi k_f A \leq \frac{\pi}{36}$$

se poate scrie că:

$$p(t) \approx A_c \cos \omega_c t - A_c 2\pi k_f y(t) \sin \omega_c t$$

Dacă spectrul semnalului modulător este $X(\omega)$, atunci $Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X(\omega)$ și deci:

$$S(\omega) = \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] - A_c k_f \frac{X(\omega)}{j\omega} * \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)]$$

sau:

$$S(\omega) = \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \pi A_c \left[\frac{X(\omega - \omega_c)}{\omega - \omega_c} - \frac{X(\omega + \omega_c)}{\omega + \omega_c} \right]$$

Se remarcă asemănarea cu spectrul semnalului modulată în amplitudine:

$$S_{MA}(\omega) = \pi A_c [\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] +$$

Modulația de frecvență de bandă largă.

Ne referim la relația (33), pe care o punem sub formă:

$$s(t) = \operatorname{Re} \{ A_c e^{j(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)} \} = \operatorname{Re} \{ \tilde{s}(t) e^{j\omega_c t} \} \quad (38)$$

în care $\tilde{s}(t)$ este anvelopa complexă a semnalului modulată în frecvență, $s(t)$:

$$\tilde{s}(t) = A_c e^{j\beta \sin \omega_m t} \quad (39)$$

Spre descriere de semnalul modulată în frecvență, $s(t)$, semnalul anvelopă complexă este periodic în timp. Frecvența sa fundamentală este ω_m . Se poate, în consecință, dezvoltă în serie Fourier exponențială această anvelopă complexă:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_m t} \quad (40)$$

În care coeficienții C_n se calculează cu relația:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\omega_m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} \tilde{s}(t) e^{-jn\omega_m t} dt = \\ &= \frac{A_c \omega_m}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega_m}}^{\frac{\pi}{\omega_m}} e^{j[\beta \sin \omega_m t - n\omega_m t]} dt \end{aligned} \quad (41)$$

Se pune $x = \omega_m t$, și atunci C_n se calculează cu:

$$C_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta \sin x - nx)} dx \quad (42)$$

Se știe încă că avem

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(x \sin u - nu)} du = J_n(x) \quad (43)$$

unde $J_n(x)$ este funcția Bessel de speța întâia, ordin n , argument x . Ca atare, C_n se exprimă prin:

$$C_n = A_c J_n(\beta) \quad (44)$$

Substituim (44) în (40) și găsim că:

$$\tilde{A}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j n \omega_m t} \quad (45)$$

și apoi:

$$A(t) = A_c \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{j(\omega_c + n\omega_m)t} \right\} \quad (46)$$

Se vede imediat că semnalul modulată în frecvență se poate exprima, în domeniul timp, prin:

$$A(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(\omega_c t + n\omega_m t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos 2\pi \left(\frac{f_c}{T} + n \frac{f_m}{T} \right) t \quad (47)$$

sau, în domeniul frecvență, prin:

$$S(\omega) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \left[\delta(\omega - \omega_c - n\omega_m) + \delta(\omega + \omega_c + n\omega_m) \right] \quad (48)$$

Prin cele 5 funcții Bessel de ordin întâia se poate proceda în

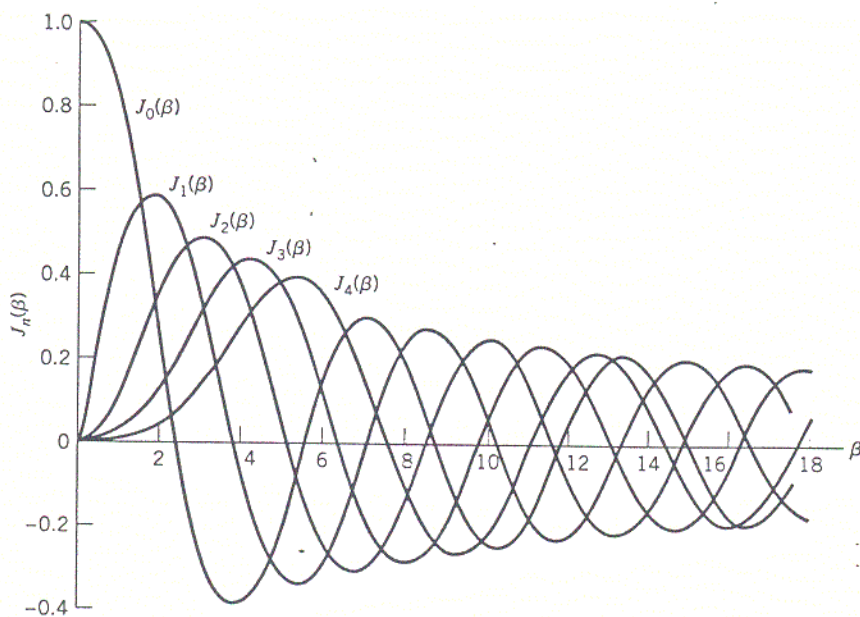


Fig. 24 Funcțiile Bessel de ordin întâia, $J_0(x) \div J_4(x)$

Figura 24. Se reamintesc că avem următoarele relații:

1. $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta)$ pentru $n \in \mathbb{Z}$ (49)

2. Pentru indice de modulată, β , mic, avem:

$$J_0(\beta) \approx 1; \quad J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2}; \quad J_n(\beta) \approx 0, n > 2; \quad |\beta| \ll 1 \quad (50)$$

3. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1.$ (51)

Recurgând la ecuațiile (48) și (51) și ținând seama de curbele din fig. 24, putem face următoarele remarci:

1. Spectrul unui semnal modulată în frecvență conține o componentă pe frecvența purtătoare, ω_c , și o mulțime infinite de frecvențe în benzile laterale decalate cu $\omega_m, 2\omega_m, 3\omega_m$ etc., față de ω_c . Reamintim că pentru semnalul modulată în amplitudine, pe lângă purtătoare mai apar doar două componente spectrale, decalate cu câte $\pm \omega_m$ față de purtătoare (ω_c); în fiecare bandă laterală există câte o componentă spectrală.
2. Pentru $|\beta| \ll 1$, doar $J_0(\beta)$ și $J_1(\beta)$ au valori semnificative și deci spectrul semnalului modulată în frecvență conține doar purtătoarea (ω_c) și două componente spectrale de frecvențe $\omega_c \pm \omega_m$, în cele două benzi laterale. Aceasta este situația ce corespunde modulației de frecvență de bandă îngustă, asemănătoare cu modulația de amplitudine.
3. Amplitudinea componentei cu frecvența purtătoare ω_c depinde de factorul $J_0(\beta)$. Spre deosebire de modulația de amplitudine, în care amplitudinea componentei de frecvență ω_c este constantă, amplitudinea componentei corespunzătoare din spectrul semnalului FM este variabilă, dependentă de indicele de modulație β . Explicația fizică a acestui fapt este aceea că amplitudinea ^{envelopei} semnalului FM este constantă, așa că puterea unui astfel de semnal este constantă:

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \quad (52)$$

Dacă purtătoarea este modulată pentru a se genera semnalul FM, puterea semnalului modulată se exprimă prin:

$$P = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(\beta) \quad (53)$$

► Exemplul 2. Vom prezenta, în acest exemplu, modul în care schimbări ale amplitudinii și frecvenței unui semnal modulator sinusoidal afectează spectrul unui semnal cu modulație de frecvență.

Pentru început vom considera că ω_m , frecvența semnalului modulator, este de valoare constantă, dar se modifică A_m , amplitudinea semnalului modulator. Ca o consecință

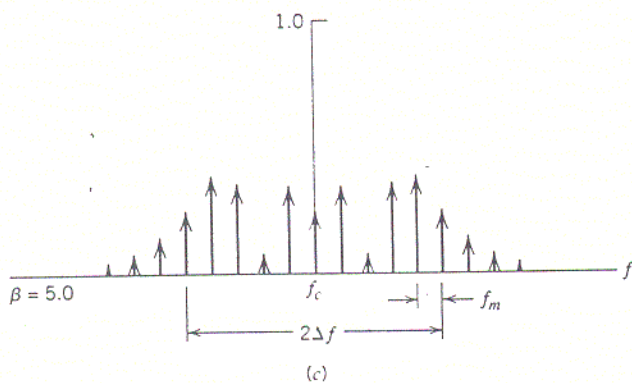
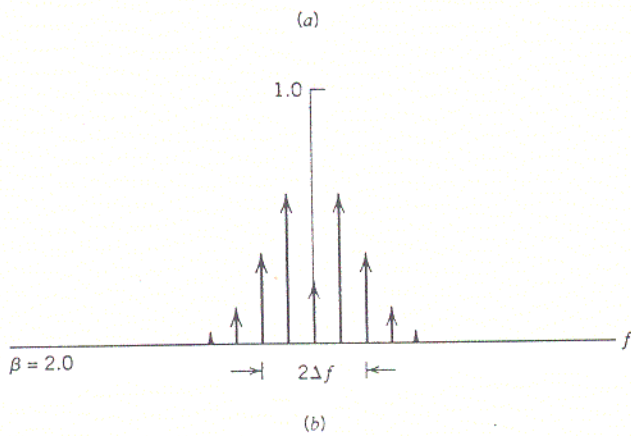
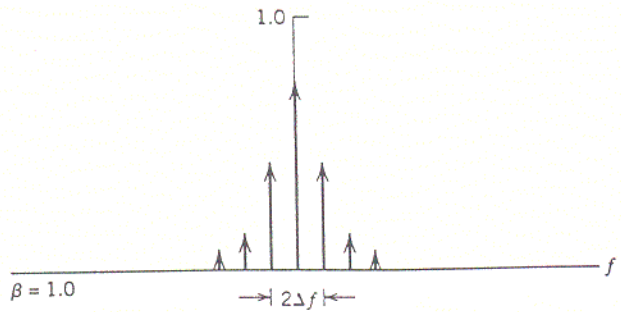


Fig. 25. Spectrul discret al unui semnal FM normalizat la amplitudinea purtătorii, pentru diverse amplitudini ale semnalului modulator sinusoidal, A_m . $f_m = \text{cst}$

constantă în cazul considerat.

Considerăm acum că semnalul modulator are amplitudinea A_m constantă dar că $\omega_m/2\pi = f_m$ este modificată.

Spectrul semnalului modulat este cel din fig. 26, reprezentat tot pentru $\beta = 1; 2$ și 5 . Evident că $A_m = \text{cst}$ implică

ca o consecință $\Delta f = k_f \cdot A_m$ se modifică odată cu A_m . În fig. 25 se arată spectrele semnalelor FM pentru valori de modulație β de valori 1; 2 și 5. Spectrele sunt normalizate prin raportare la amplitudinea semnalului purtător nemonulat - a cărei amplitudine normalizată devine "1".

Se reaminte că liniile sunt distanțate între ele cu $\omega_m/2\pi = f_m$, și

$\Delta f = \omega t$, adică derivata de frecvență nu se modifică. Oarec, în schimb, numărul de linii spectrale ce intră în intervalul $2\Delta f$ [$f_c - \Delta f$, $f_c + \Delta f$], ce urmează a descrește distanței dintre

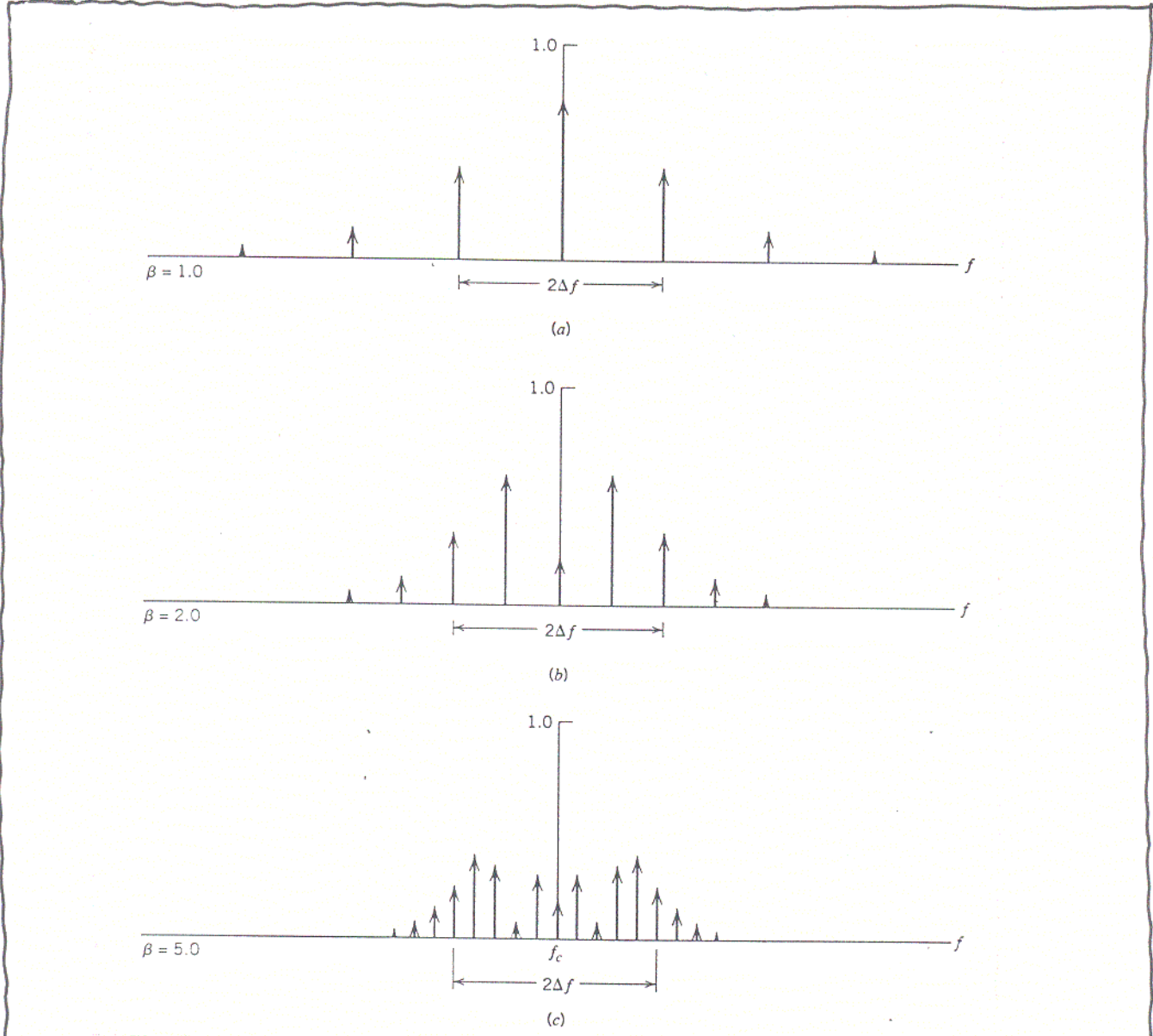


Fig. 26. Spectrul discret al unui semnal FM normalizat la amplitudinea purtătoare, pentru diverse frecvențe f_m ale semnalului modulator, dar amplitudine constantă, $A_m = \text{const}$.

liniile spectrale adiacente. Atunci când $\beta \rightarrow \infty$, banda ocupată de semnalul modulat în frecvență devine spre $2\Delta f$, nu se pot remarca.

Banda de transmisie a semnalelor cu modulație de frecvență:
Teoretic, banda de frecvență a unui semnal MF este infinite. În practică, acceptând un grad de distorsiuni, semnalul FM se reduce ca spectru la un număr de componente

permisivitate sau la o bandă permisivitate.

Considerăm aici încă pe sunetul FM obținut prin modularea cu o singură componentă tonală, de frecvență $f_m = \omega_m / 2\pi$. Se poate observa că acele componente spectrale ce sunt disjuncte față de f_c (frecvența purtătoare) cu mai mult decât $\pm \Delta f$, deviația de frecvență, decresc rapid spre zero. Pentru $\beta \rightarrow \infty$, spectrul tinde spre o bandă de lățime $2\Delta f$, centrată pe frecvența purtătoare f_c .

Conform unei reguli empirice, stabilită de Carson (prin 1937), banda de transmisie pentru un sunet FM modulată cu o singură componentă tonală, este:

$$B_T \cong 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad [\text{Hz}] \quad (55)$$

O altă alternativă pentru definirea benzii de transmisie se poate referi la amplitudinile componentelor spectrale. Putem spune că banda de transmisie a unui sunet FM este ecarsul de frecvențe în afara căruia nici una dintre componentele spectrale nu depășește 1% din amplitudinea purtătoare, în lipsa modulației. Se definește deci B_T ca fiind $2n_{\max} f_m$, unde f_m este frecvența sunetului unitar modulător iar n_{\max} este cel mai mare indice n ce satisface condiția $|J_n(\beta)| > 0,01$. (Evident că pentru $n > n_{\max}$, $|J_n(\beta)| < 0,01$, $\forall n$). Valoarea n_{\max} este dependentă de β , indicele de modulație. În Tabelul 2 se dau valorile $2n_{\max}$

Tabelul 2.

β	$2n_{\max}$	β	$2n_{\max}$
0,1	2	5,0	16
0,3	4	10,0	28
0,5	4	20,0	50
1,0	6	30,0	70
2,0	8		

pentru diverse valori ale indicelui de modulație β . Banda de transmisie, B_T , determinată conform acestei definiții este reprezentată în fig. 27, ce valorează normalizată prin raportare la Δf ,

deviația de frecvență. Se vede că, pe măsură ce β crește, raportul $B_T/\Delta f$ scade, tinerând spre valoarea doi. Se poate

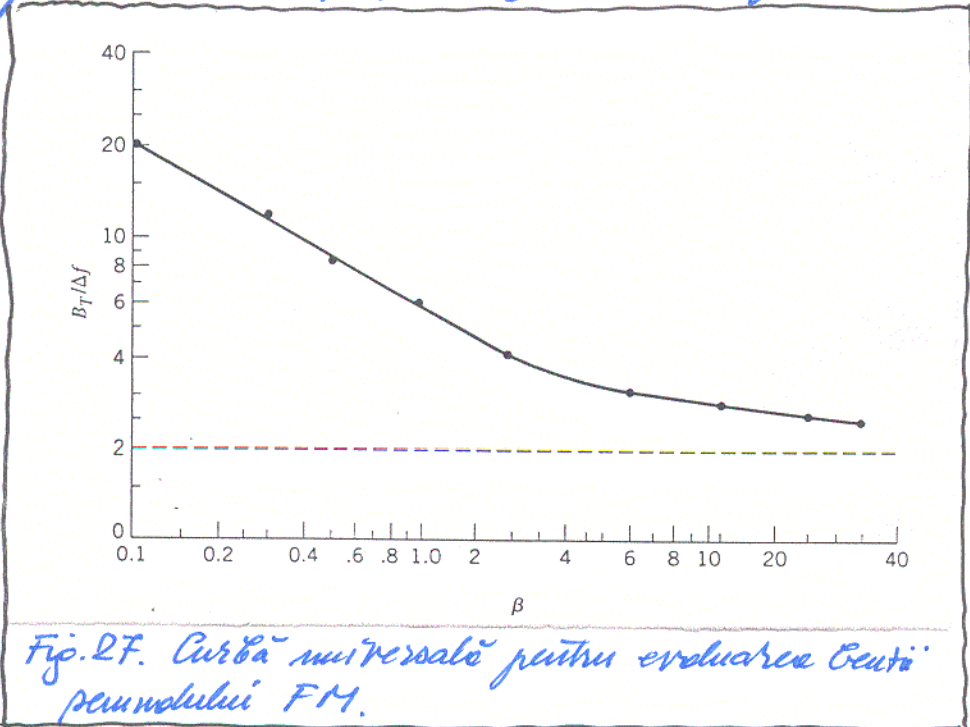


Fig. 2F. Curbă universală pentru evaluarea centrii pentru modulul FM.

deci afirma că modulția de frecvență irosește când în special la indici de modulție pedunși ce valore.

Fi acum un penunol modulator (ct) sarecare, cu componenta spectro-

le penunificativă aflate la W (frecvență maximă din spectru). Se determină valoarea maximă a penunolului, $A_{max} = \max|x(t)|$ și se calculează cu ea o deviație de frecvență $\Delta f = k_f \cdot A_{max}$. Se calculează apoi un raport de deviație D (deviation ratio), $D = \Delta f/W$. Acest raport de deviație D , joacă același rol, în cazul modulției de frecvență cu modulator nesinusoidal, ca și indicii de modulție β din cazul FM cu modulator sinusoidal.

Înlocuind β cu D și f_m cu W se pot menține regula lui Carson, (55), sau curbă universală din fig. 2F. și pentru un penunol modulator sarecare.

Regula lui Carson conduce adesea la subestimarea centrii de transmitere, în timp ce curbă universală din fig. 2F o supraestimează și majoritatea cazurilor. Banda penunolului modulat se găsește, cel mai adesea, între valorile date de regula lui Carson și curbă universală.

Așadar regula lui Carson cât și regula ce a condus la curbă universală se cunosc ca reguli ad-hoc - Rule of Thumb și sunt acceptabile în practică.

Exemplul 3.

În America de Nord $\Delta f = 75 \text{ KHz}$ pentru emisiunile radio de tip FM. Dacă frecvența maximă din spectrul semnalului modulator este $W = 15 \text{ KHz}$ — nu maxim acceptat în radiofonia FM — atunci raportul de deviație D corespunzător este:

$$D = \frac{75}{15} = 5$$

Conform regulii lui Carson, banda de transmisie se apreciază la:

$$B_T = 2(\Delta f + W) = 2(75 + 15) = 180 \text{ KHz}$$

În altă parte, din curba universală, pentru $D = 5$ rezultă un raport de 3,2 sau

$$B_T = 3,2 \cdot \Delta f = 3,2 \times 75 = 240 \text{ KHz.}$$

În practică, se alocă câte 200 KHz bandă fiecărei transmisii FM. Se vede că $180 < 200 \text{ KHz} < 240$.

Generarea semnalelor cu modulație de frecvență.

Sunt două metode esențiale pentru obținerea semnalelor FM:
(i) modulația de frecvență directă; (ii) modulația de frecvență indirectă.

În cadrul metodei directe, frecvența purtătoare este modificată în mod direct, conform cu semnalul modulator, recurgând la un oscilator controlat în tensiune.

În cadrul metodei indirecte se generează mai întâi un semnal FM de bandă îngustă, după care, prin multiplicare de frecvență se aduce deviația de frecvență la valoarea dorită. Această a doua metodă, indirectă, se folosește atunci când stabilitatea frecvenței purtătoare este esențială, cum e cazul în radiofonia FM.

Modulația de frecvență indirectă (ii)

În fig. 28 se arată schema bloc a unui modulator indirect. După integrarea semnalului modulator $x(t)$ (din banda de text)

pe modulatori fără unui oscilator stabilit cu cristal de cuarț. Aceasta asigură stabilitatea de frecvență necesară în radiofonie. Pentru reducerea distorsiunilor, maximul deviației de fază este

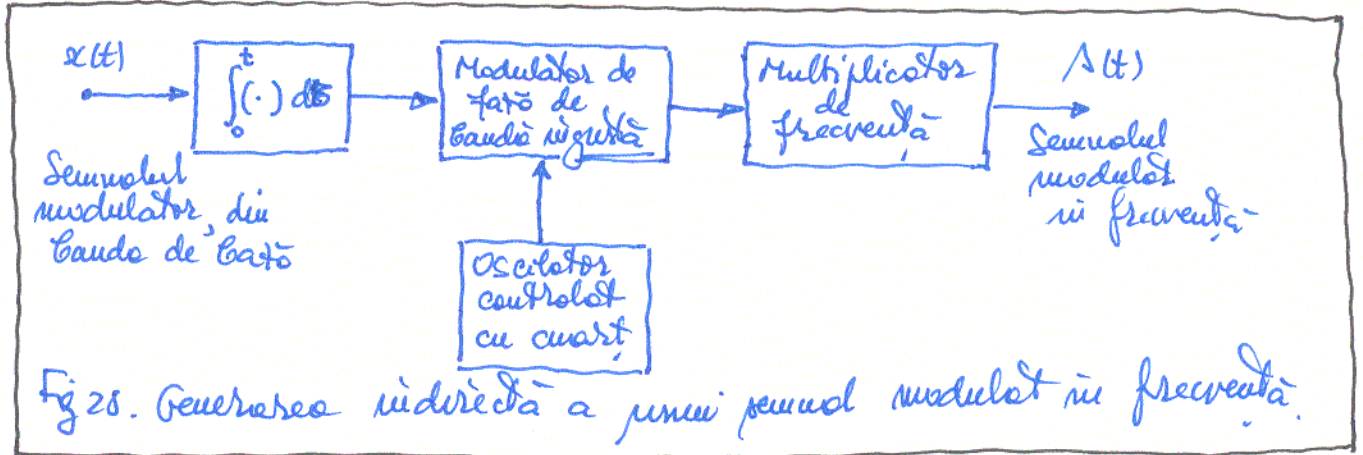


Fig 28. Generarea indirectă a unui semnal modulat în frecvență.

menținut la valori reduse, a.î. modulatia este de bandă îngustă. Pentru implementarea modulatorului de fază de bandă îngustă se poate apela la schema din fig. 22. Semnalul FM de bandă îngustă este aplicat unui multiplicator de frecvență; la ieșire se obține semnalul FM.

Multiplicatorul de frecvență constă, în esență, dintr-un dispozitiv neliniar, urmat de un filtru trece bandă, ca în fig. 29.

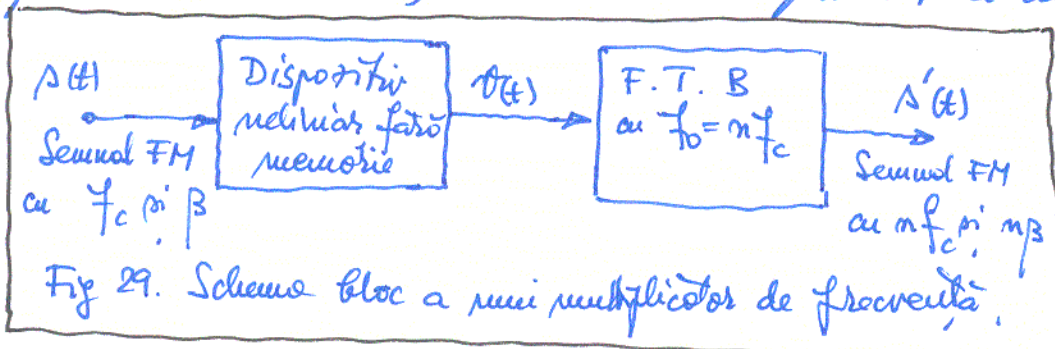


Fig 29. Schema bloc a unui multiplicator de frecvență.

Dispozitivul neliniar este fără "memorie", în sensul că nu are în structură

pe elemente reactive. Relația intrare-ieșire este, pentru acest dispozitiv :

$$v(t) = a_1 \Delta(t) + a_2 \Delta^2(t) + \dots + a_n \Delta^n(t) \tag{56}$$

Aici "n" este cel mai mare ordin al neliniarității. Semnalul de intrare este :

$$\Delta(t) = A_c \cos \left[\omega_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau \right]$$

m are frecvența instantanee :

$$f_i(t) = f_c + k_f x(t) ; \omega_i(t) = \omega_c + 2\pi k_f x(t) \tag{57}$$

Se măsoară ca frecvența centrată, f_0 , a filtrului trece bandă

să fie $n f_c$ iar banda sa de trecere să fie de "n" ori banda semnalului modulată în frecvență, A(t). După filtrarea trece bandă rezultă semnalul modulată în frecvență:

$$s'(t) = A_c' \cos \left[m \omega_c t + 2\pi m k_f \int_0^t x(z) dz \right] \tag{58}$$

cu frecvența instantanee:

$$f_i'(t) = m f_c + m k_f x(t) ; \omega_i'(t) = m \omega_c + 2\pi m k_f x(t) \tag{59}$$

Raportul de multiplicare (sau factorul de multiplicare) al frecvenței este "n".

Demodularea semnalelor cu modulație în frecvență.

Demodularea de frecvență este procesul care ne permite să reconstruim semnalul modulator inițial, din semnalul modulată în frecvență. Este necesar să obținem o caracteristică de transfer care să fie inverso caracteristicii de transfer a modulatorului de frecvență și care și ea poate fi realizată direct sau indirect.

Vom descrie un dispozitiv foarte larg răspândit, numit discriminator de frecvență. Ieruirea sa este direct proporțională cu frecvența instantanee a semnalului FM. Menționăm că aceasta este o metodă directă; metoda indirectă recurge la un alt circuit larg răspândit, PLL-ul. (Phase-locked loop).

În esență, un discriminator de frecvență se compune dintr-un circuit cu pantă, urmat de un detector de amplitudă. Un circuit cu pantă, ideal, are răspunsul în frecvență pur imaginar, de formă:

$$H_1(\omega) = \begin{cases} j a (\omega - \omega_c + \frac{2\pi B_T}{2}) & , \omega_c - \frac{2\pi B_T}{2} \leq \omega \leq \omega_c + \frac{2\pi B_T}{2} \\ j a (\omega + \omega_c - \frac{2\pi B_T}{2}) & , -\omega_c - \frac{2\pi B_T}{2} \leq \omega \leq -\omega_c + \frac{2\pi B_T}{2} \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases}$$

sau:

$$H_1(f) = \begin{cases} j 2\pi a (f - f_c + \frac{B_T}{2}) & , f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_T}{2} \\ j 2\pi a (f + f_c - \frac{B_T}{2}) & , -f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B_T}{2} \\ 0 & , \text{în rest} \end{cases} \tag{60}$$

În fig. 30a se arată răspunsul în frecvență al circuitului cu panta:

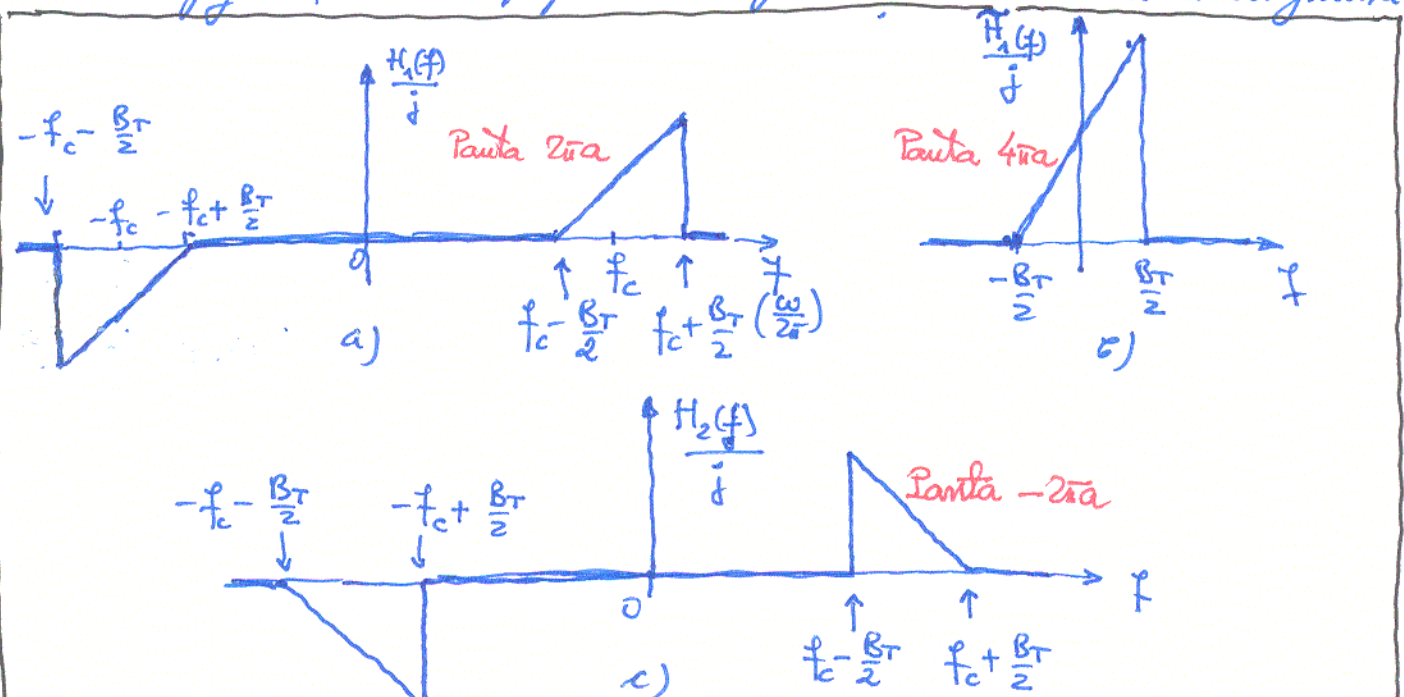


Fig 30. Răspunsul unui circuit cu panta ideal (a); Răspunsul echivalentului de faasă în frecvență (b); Răspunsul unui circuit cu panta, ideal, complementar cu cel de la punctul a. (c).

Vom evalua răspunsul $s_1(t)$ al circuitului cu panta la un semnal de intrare $p(t)$, modulată în frecvență, de bandă B_T axată pe f_c .

Reamintim că în FTB, $H_1(f)$, poate fi înlocuit cu echivalentul său de faasă în frecvență, $\tilde{H}_1(f)$ prin:

1. Se deplasează $\tilde{H}_1(f)$, spre dreapta, cu f_c
2. Se pune $H_1(f) = \frac{1}{2} \tilde{H}_1(f - f_c)$, pentru $f > 0$. (61)

Se vede că avem, ținând cont de (60) și (61):

$$\tilde{H}_1(f) = \begin{cases} j4\pi a (f + \frac{B_T}{2}) & ; -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0 & ; \text{în rest} \end{cases} \quad (62)$$

corect și așa arătată în fig 30b.

Semnalul de intrare $p(t)$ este definit prin (26):

$$p(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau \right]$$

și deci anvelopa sa complexă este:

$$\tilde{p}(t) = A_c e^{j 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau} \quad (63)$$

Anvelopa complexă $\tilde{S}_1(f) \leftrightarrow \tilde{S}_1(t)$ a semnalului de la ieșirea circuitului cu pantă pe colțuri este cu relația:

$$\tilde{S}_1(f) = \frac{1}{2} \tilde{H}_1(f) \tilde{S}(f) = \begin{cases} j^{2na} \left(f + \frac{B_T}{2}\right) \tilde{S}(f) & -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (64)$$

Inversând, rezultă că:

$$\tilde{S}_1(t) = a \left[\frac{d\tilde{S}(t)}{dt} + j\pi B_T \tilde{S}(t) \right] \quad (65)$$

Se face pasul de expresia (63) a anvelopei complexe $\tilde{S}(t)$ în se colțuri anvelopa complexă de la ieșirea circuitului cu pantă:

$$A_1(t) = j\pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} x(t) \right] e^{j2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau} \quad (66)$$

Prin urmare, la ieșirea circuitului rezultă semnalul

$$A_2(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{A}_1(t) e^{j2\pi f_c t} \} = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} x(t) \right] \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau + \frac{\pi}{2} \right] \quad (67)$$

Se vede că $A_2(t)$ este un semnal cu modulație hibridă, de frecvență și de amplitudine. Dacă alegem astfel k_f încât:

$$\left| \frac{2k_f}{B_T} x(t) \right| < 1, \quad \forall t$$

prin intermediul unui detector de anvelopă găsim, în presupunerea corectă, cu excepția unui termen de polarizare, este proporțional cu mesajul $x(t)$:

$$|\tilde{A}_2(t)| = \underbrace{\pi B_T a A_c}_{\text{termen de polarizare}} + \underbrace{2\pi k_f a A_c}_{\text{mesaj}} x(t) \quad (68)$$

Termenul de polarizare este proporțional cu panta "a" a funcției de transfer a circuitului cu pantă. Aceasta ne sugerează că măsurarea termenului în cauză poate fi obținută prin scodirea presupunului unui detector de anvelopă, $|A_2(t)|$, obținut după un circuit cu pantă complementar primului circuit cu pantă, având presupunul din fig 30c, $H_2(f)$. Cele două circuite cu pantă (a) și (c) sunt legate între ele prin relația:

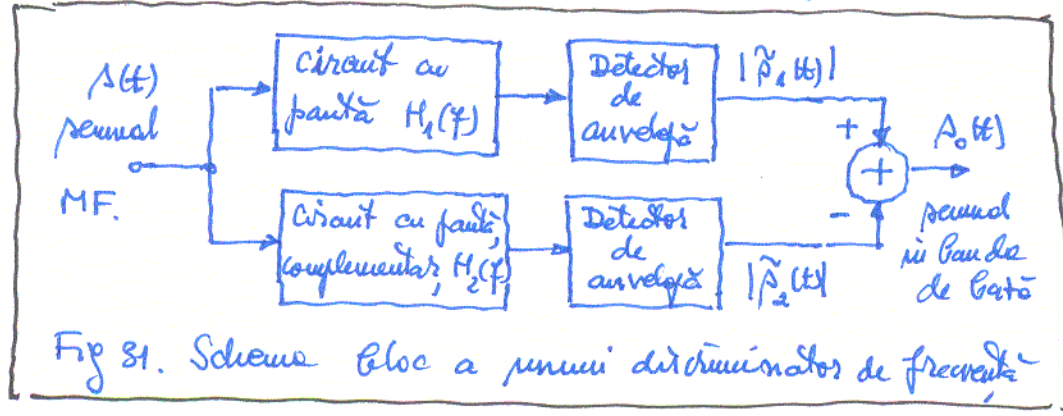
$$\tilde{H}_2(f) = \tilde{H}_1(-f) \quad (69)$$

Procedând ca mai înainte se găsește că:

$$|\tilde{\beta}_2(t)| = 5B_T a A_c - 2\pi k_f a A_c x(t)$$

(70)

Diferența dintre cele două envelope, $A_0(t)$, este :



$$A_0(t) = |\tilde{\beta}_1(t)| - |\tilde{\beta}_2(t)| = 4\pi k_f a A_c x(t) \quad (71)$$

Fig 31. Schema bloc a unui discriminator de frecvență

dulilor $x(t)$. În fig 31 se vede schema bloc a unui discriminator de frecvență ideal, compus din două circuite cu fanta complementare, două detectoare de envelope și un sumator. Schema pe mai multe și discriminator de frecvență echilibrat.

■ Multiplexarea semnalelor FM stereo

Multiplexarea stereo este un caz al multiplexării cu divizare în frecvență (FDM - frequency-division multiplexing), destinată transmiterii a două semnale distincte prin aceeași frecvență purtătoare. Acest fel de multiplexare se folosește în radiofonia stereofonică. Acest fel de transmisie stereofonică trebuie să satisfacă două condiții:

1. Transmisia trebuie să se realizeze în interiorul canalului de difuziune FM, alocat.
2. Transmisia trebuie să fie compatibilă cu recepțiile monofonice.

Prima condiție impune parametrii de frecvență, incluzând și deviația de frecvență. A doua condiție impune modul de pilotare a semnalului.

În fig 32 a se arată schema bloc a sistemului de multiplexare utilizat în construcția emițătoarelor stereo. Semnalele $x_1(t)$ și $x_2(t)$ provin de la microfoanele de la stânga (left-hand) și de la dreapta (right-hand). Ele sunt

aplicată unei sume și scăderii sumei și diferența celor două
semnale : $x_L(t) + x_R(t)$; $x_L(t) - x_R(t)$ - fig 32a. Suma nu

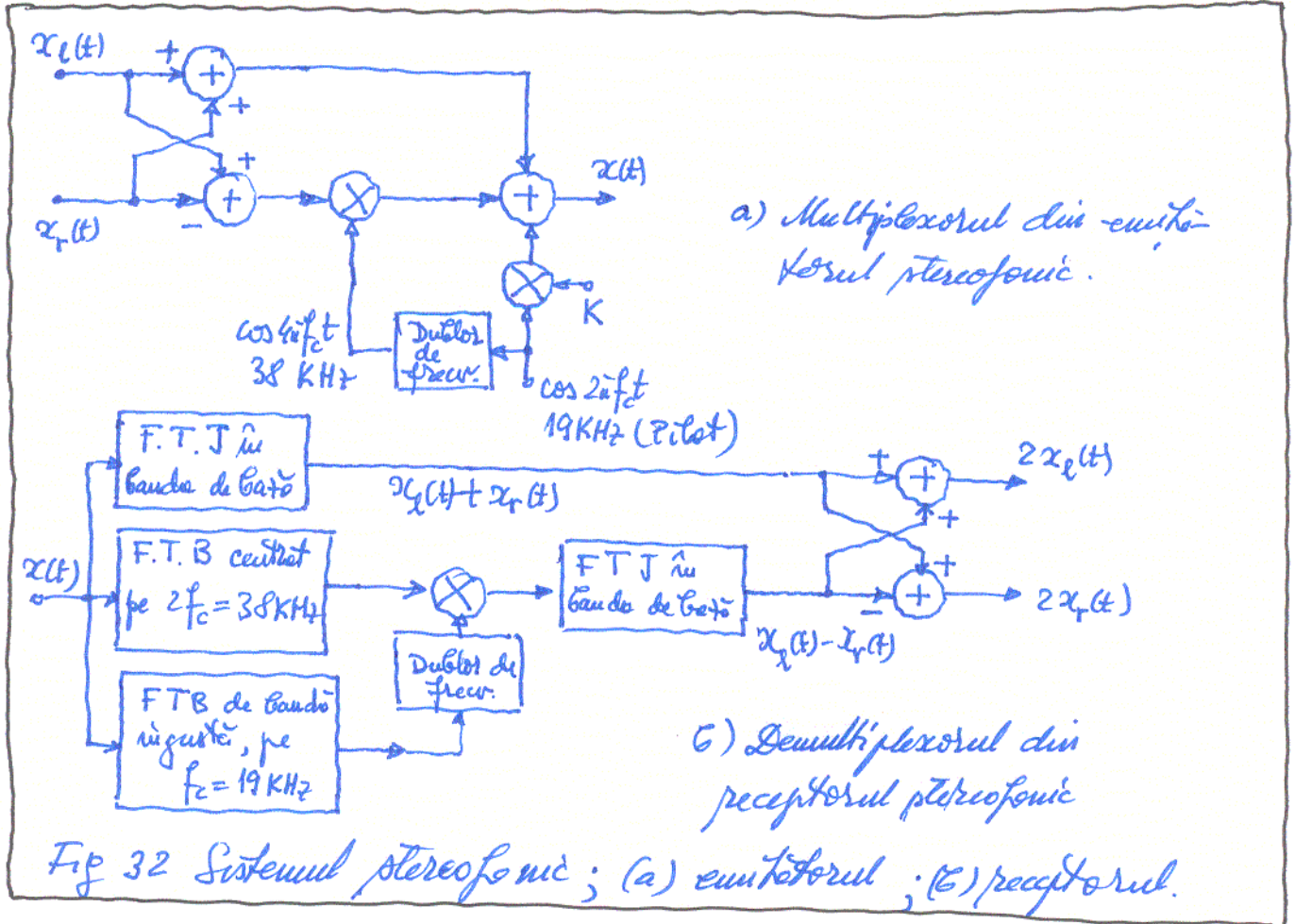


Fig 32 Sistemul stereofonic ; (a) emițătorul ; (b) receptorul.

se mai prelucerează și constituie partea din banda de bază ce este disponibilă și pentru recepția mono-fonică (stereomită).
 Pornind de la un oscilator stabilitat cu exact pe generație o puritate foarte de 19 KHz și, prin dublare de frecvență, una de 38 KHz.
 Aceasta din urmă se aplică unei modulări de produs, împreună cu semnalul diferență. Se realizează o modulație de amplitudine, cu două laturi laterale și purtătoare suprîmăată.
 Semnalul din banda de bază se înmulțește cu semnalul modulat și cu un "pilot" de 19 KHz ce servește ca referință pentru demodularea sincronă a semnalului diferență, realizată la recepție. Prin urmare, semnalul multiplexat are forma:

$$x(t) = [x_L(t) + x_R(t)] + [x_L(t) - x_R(t)] \cos 4\pi f_c t + K \cos 2\pi f_c t \quad (72)$$

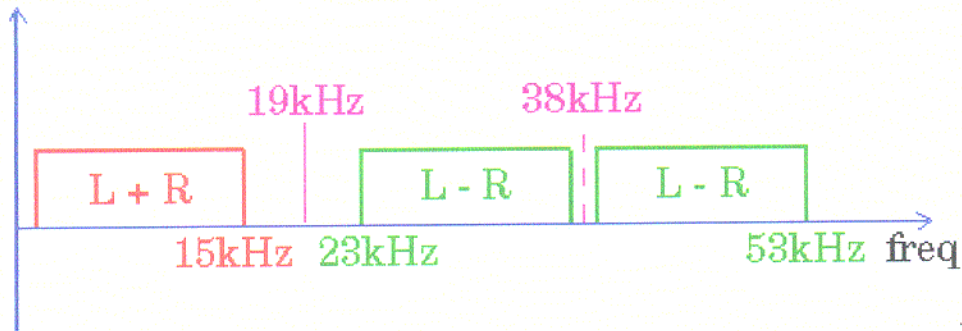
cu $f_c = 19\text{KHz}$ și K amplitudinea pilotului.

Semnalul $x(t)$, semnal multiplexat, modulat în frecvență

FM Stereo Modulation

Cuthbert Nyack

FM modulation used in the 88 to 108MHz band takes a signal with frequency range ~50Hz to ~15kHz and modulates a carrier in the FM band with a modulation index of ~5. This gives a bandwidth of $2 \times 75\text{kHz}$. Each station is allowed a bandwidth of 200kHz allowing 100 stations in the FM band. When FM stereo was introduced it had to fit in the existing band and the system used is illustrated in the diagram below.



L corresponds to left signal and R to the right. A mono receiver sees only the $L + R$ signal. The information which can be used to produce the stereo signal is contained in the $L + R$ and the $L - R$ signals. The $L - R$ signal is added to the baseband signal as a DSB signal with suppressed carrier. A pilot tone at 19kHz is used by the receiver to regenerate the carrier for demodulating the DSB $L - R$ signal. The baseband signal shown above is used to frequency modulate a carrier.

[Return to main page](#)

[Return to page index](#)

COPYRIGHT © 1996 Cuthbert Nyack.

purtaoare propriu-zisă, ce în orice sistem radio FM. Se alege astfel K , amplitudinii pilotului, nicot să se obțină, numai prin pilot, o modulație de $8 \div 10\%$ din deviația de frecvență maximă.

La recepție se recuperează, mai întâi, semnul multiplexat, $x(t)$ prin demodularea mudei de la intrarea receptorului. Semnul $x(t)$ se aplică apoi sistemului de demultiplexare, cu scheme bloc din fig. 326. Se extrage cu un filtru trece bandă, de bandă foarte îngustă, acordat pe frecvența pilotului, $f_c = 19 \text{ kHz}$, semnul pilot și din el se generează, prin dublare de frecvență, purtătoarea de 38 kHz . Existența purtătoarei reconstituite la recepție, permite detectarea sincronă a semnelor modulate în amplitudine, cu două benzi laterale și purtătoare suprimată, semnal peștat cu un filtru trece bandă, acordat pe 38 kHz . După filtrările trece jos din banda de bandă se recuperează semnele purtătoare diferențiale: $x_p(t) + x_r(t)$ și $x_p(t) - x_r(t)$. Printr-o matrice de însumare se reconstituie semnele de stânga $x_l(t)$ și de dreapta, $x_r(t)$.

8. Efecte neliniare în sistemele cu modulație de frecvență

Neliniaritățile sunt prezente în circuitele electrice. Se disting două forme fundamentale de neliniaritate:

1. Neliniaritatea puterivă, introdusă în mod intenționat și într-un mod controlat, în vederea realizării unor amănunțite aplicații concrete. Exemplele de neliniarități puterivice includ: modulatoarele pe tranzistori, limitatoarele pe diode prin hard, multiplicatoarele de frecvență.
2. Neliniaritatea slabă, de natură parazită ce apare atunci când se dorește liniaritatea; cauzele neliniarității slabe sunt multiple, dar sunt tratate de natură incidentă.

trionată.

Vom analiza efectul neliniaritatilor slabă în sistemele cu modulată de frecvență.

Considerăm un canal de comunicație cu caracteristica de transfer neliniară, dota de relația intrare ($v_i(t)$) - ieșire ($v_o(t)$):

$$v_o(t) = a_1 v_i(t) + a_2 v_i^2(t) + a_3 v_i^3(t) \quad (73)$$

a_1, a_2 și a_3 fiind constante. Canalul descris de ecuația (73) este de tipul "fără memorie" - care nu stochează energie pozitivă. Dorim să studiem efectul transmiterii unui semnal FM printr-un astfel de canal. Semnalul FM de intrare este:

$$v_i(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] ; \quad \phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t x(\tau) d\tau$$

Substituind $v_i(t)$ în (73) găsim că:

$$v_o(t) = a_1 A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + a_2 A_c^2 \cos^2[2\pi f_c t + \phi(t)] + a_3 A_c^3 \cos^3[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (74)$$

Se ține seama de relațiile:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$$

și (74) devine:

$$v_o(t) = \frac{a_2 A_c^2}{2} + \left(a_1 A_c + \frac{3}{4} a_3 A_c^3 \right) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + \frac{a_2 A_c^2}{2} \cos[4\pi f_c t + 2\phi(t)] + \frac{a_3 A_c^3}{4} \cos[6\pi f_c t + 3\phi(t)] \quad (75)$$

Prin urmare, semnalul de la ieșirea canalului are o componentă continuă și trei componente FM cu frecvențele purtătoare $f_c, 2f_c$ și $3f_c$.

Pentru a extrage semnalul FM dorit din suma $v_o(t)$, cel cu frecvența purtătoare f_c , este necesar să-l putem separa de celelalte două. Fie Δf deviația de frecvență din $v_i(t)$ și fie W cea mai mare frecvență din spectrul semnalului modulator, $x(t)$.

Se ține seama că deviația de frecvență se dublează pentru semnalul FM cu purtătoarea f_c și aplicând regula lui Carson rezultă condiția de separare:

$$2f_c - (2\Delta f + W) > f_c + (\Delta f + W)$$

sau

$$f_c > 3\Delta f + 2W \quad (76)$$

Dacă condiția (76) este îndeplinită, folosindu-ne de nu FTB cu frecvența centrală f_c și lățime $2\Delta f + 2W$, putem separa din semnalul (75) termenul:

$$v_o'(t) = \left(a_1 A_c + \frac{3}{4} a_3 A_c^3 \right) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] \quad (77)$$

Se observă deci că singurul efect al trecerii semnalului FM printr-un canal cu neliniarități de amplitudine, trecere urmată de o filtrare trece-bandă adecvată este simpla modificare a amplitudinii semnalului.

Spre deosebire de modulatia de amplitudine, modulatia de frecvență nu este afectată de cître distorsiunile produse de transmiterea prin canalul de propagare ce prezintă neliniarități de amplitudine. De aceea modulatia de frecvență este utilizată în sistemele radio din gama microundelor. Se pot utiliza amplificatoare puternic neliniare, deorbit de prospândite acolo unde nivelurile de putere de radiofrecvență sunt foarte mari.

Un sistem cu FM este, în schimb, extrem de sensibil la neliniaritățile de fază, așa cum rezultă intuitiv. Un tip obișnuit de neliniaritate ce apare în sistemele radio din gama microundelor este cunoscut sub denumirea de "conversia AM la PM" (conversia de la modulatia de amplitudine la modulatia de fază). Conversia rezultă ca urmare a faptului că, caracteristica de fază a amplificatoarelor și repetoarelor de putere este dependentă de amplitudinea instantanee a semnalului de intrare. În practică

caracterizarea conversiei AM la PM se face printr-o constantă, K , măsurată în grade/decibel și care poate fi interpretată ca fiind schimbarea de fază, ca vârf de schimbare, la o schimbare cu 1 dB a nivelului amplitudinii semnalului de intrare. Atunci când un semnal FM este transmis printr-o legătură radio din gama microundelor, el "culege" variații de amplitudine ca urmare a geometriei din canal sau a interferențelor din canal. Când un astfel de semnal trece printr-un repetor cu conversie AM la PM, semnalul de țintă va conține componente de modulație de fază și, ca rezultat, apar distorsiuni. Este necesar, de aceea, ca nivelul conversiei să fie cât mai redus. Un repetor bun are constanta de conversie K mai mică de 2 grade/decibel.

9. Receptorul superheterodină.

Într-un sistem de radiodifuziune, se recurge la modulația de amplitudine sau la modulația de frecvență receptorul nu are nicio problemă de demodulare și semnalului de intrare (modulat) și trebuie să mai îndeplinească și alte funcții:

- ▶ Acordul pe frecvența purtătoare a postului care se dorește a fi ascultat.
- ▶ Filtrarea, care este necesară pentru separarea semnalului dorit de alte semnale modulate.
- ▶ Amplificarea, care este necesară pentru compensarea pierderilor de putere ce au apărut ca urmare a propagării semnalului.

Receptorul superheterodină, este un tip special de receptor care îndeplinește toate condițiile, mai ales prinde dovă, într-o manieră "elegantă". În particular, receptorul superheterodină ocolte problema construcției unui filtru de mare selectivitate și pas-celular într-o bandă largă. Toate receptoarele radio și TV sunt de tip superheterodină.

În esență, receptorul superheterodină constă dintr-o secțiune

de radiofrecvență (RF secțiune), un mixer și un oscilator local, o secțiune de frecvență intermediară (IF secțiune), cunoscută și sub denumirea de amplificator de frecvență intermediară.

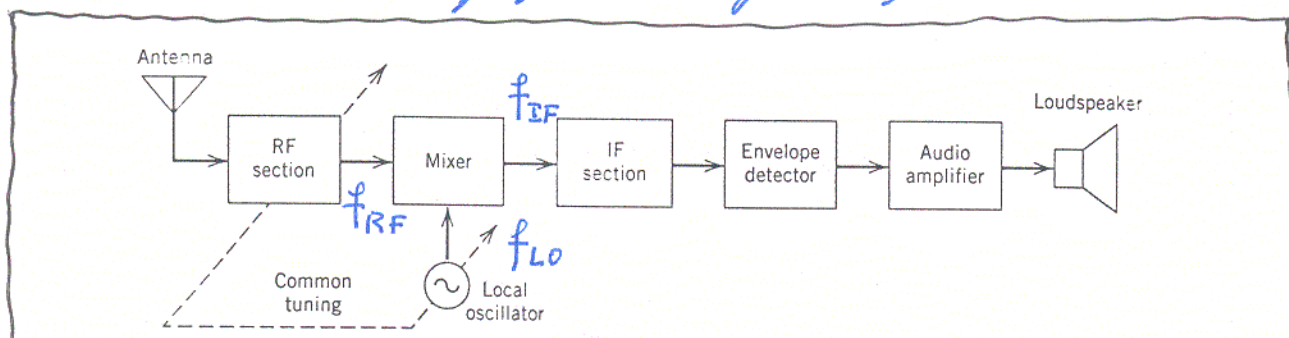


Fig 33 Schema bloc a unui receptor super-heterodina.

În fig 33 se arată schema bloc a receptorului superheterodina,

Tabelul 3

	Radiofonie AM	Radiofonie FM
Gama purtatoare de radiofrecvență	535 - 1605 KHz	88 - 108 MHz
Frecvența intermediară	455 KHz	10,7 MHz
Banda de frecv. intermediară	10 KHz	200 KHz

iar în Tabelul 3 se indică gama în care se găsesc frecvențele purtătoare, frecvențele intermediare precum și banda amplificatorului de frecvență intermediară, atât pentru sistemul de radiofonie AM cât și pentru sistemul de radiofonie FM.

În fig 33 se arată schema bloc a receptorului pentru modulația de amplitudine. Semnalul MA este "câș" de către antenă și amplificat de preamplificatorul de radiofrecvență (RF-secțiune) acordat pe frecvența purtătoare a postului dorit.

Oscilatorul local generează un semnal sinusoidal, cu frecvența reglată simultan cu acordul secțiunii de radiofrecvență. Prin "amestecul" celor două semnale, amestec rezultă o "heterodinare" spectrul semnalului de intrare se va reflecta în banda amplificatorului de frecvență intermediară. Frecvența intermediară f_{IF} rezultă din frecvența oscilatoru-

lui local, f_{LO} și frecvența de acord f_{RF} :

$$f_{IF} = f_{LO} - f_{RF} ; f_{LO} > f_{RF} \quad (78)$$

Secțiunea de frecvență intermediară constă din câteva etaje de amplificări selective, acordate pe f_{IF} . Această secțiune asigură selectivitatea receptorului și majoritatea din amplificarea sa. Semnalul de la iesirea IF se aplică unui demodulator - în cazul MA în detector de amplitudă - al căruia rol este de a recupera semnalul din banda de bandă, semnalul modulator. Urmează un amplificator de audio-frecvență și un difuzor pentru redarea sunetului.

În receptorul superheterodină se generează un semnal IF dacă frecvența oscilatorului local diferă de cea a postului cu $\pm f_{IF}$: $f_{RF} = f_{LO} \pm f_{IF}$. De aici, rezultă că există două frecvențe recepționate, care dau f_{IF} după mixare, frecvențe ce diferă între ele cu $2 \times f_{IF}$. Spre exemplu, dacă recepționăm un post cu frecvența de 630 KHz ^{rezultat}, $f_{LO} = 630 + 455 = 1085 \text{ KHz}$; tot f_{IF} se obține și pentru postul cu frecvența de $1085 + 455 = 1540 \text{ KHz}$. Frecvența de 1540 KHz se numește "imaginea" frecvenței de 630 KHz . Frecvența imagine este cu $2 \times f_{IF}$ mai mare decât frecvența purtătoare pe care o acordăm receptorul.

Eliminarea frecvenței imagine se face prin selectivitatea accentuată a etajului de RF de la intrare, motiv pentru care el este pe acordabil, sincron cu oscilatorul local.

Receptorul superheterodină FM diferă de cel MA prin aceea că în urma amplificatorului de frecvență intermediară se conectează un limitator urmat de un filtru pe bandă. Se introduce astfel modulată purtătoare de amplitudine constantă de zgomot. Detecția este realizată cu un discriminator de frecvență, echilibrat.

Anexa.

1. Transformarea Hilbert.

Este o transformare ce defazatează cu $\pm 90^\circ$ toate componentele spectrale ale unui semnal.

Fie $h(t) = \frac{1}{\pi t}$, funcția pondere a unui sistem. Dacă la intrarea sa se aplică un semnal $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, la ieșire se obține transformata Hilbert a semnalului, notată $\hat{g}(t) = \mathcal{H}\{g(t)\}$. Dacă $\hat{g}(t) \leftrightarrow \hat{G}(\omega)$, avem:

$$\hat{G}(\omega) = G(\omega) \cdot [-j \operatorname{sgn} \omega] = |G(\omega)| e^{j[\phi_g(\omega) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega)]}$$

deci

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H(\omega) = -j \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -j & , \omega > 0 \\ 0 & , \omega = 0 \\ j & , \omega < 0 \end{cases}$$

Se observă că toate componentele de frecvență $\omega > 0$ sunt defazate cu -90° , în timp ce componentele de frecvență $\omega < 0$ sunt defazate cu $+90^\circ$.

Sunt de reamărit următoarele proprietăți, aplicabile semnalelor $g(t)$ reale:

▶ 1. $|G(\omega)| = |\hat{G}(\omega)|$

▶ 2. $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{g(t)\}\} = -g(t)$

▶ 3. Semnalul $g(t)$ și transformata sa Hilbert, $\hat{g}(t)$, sunt ortogonale pe toată axa timpului, adică:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \hat{g}(t) dt = 0$$

Avem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \hat{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-\tau} dt \right] d\tau$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{\tau-t} dt \right] d\tau = - \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \hat{g}(\tau) d\tau$$

Dar din $x = -x$ se deduce $x = 0$, așa că proprietatea de ortogonalitate este demonstrată.

2. Reprezentări complexe ale semnalelor.

■ Semnalul analitic.

Fie semnalul real $g(t)$, cu transformata Hilbert $\hat{g}(t)$. Semnalul analitic asociat semnalului $g(t)$, notat $g_+(t)$ este, prin definiție:

$$g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t) ; \hat{g}(t) = \mathcal{H}\{g(t)\}$$

Așa cum favorizăm calculul în curent alternativ, tot așa semnalul analitic favorizează calculul în cazul semnalelor (și sistemelor) de tip "prece - bandă".

Are în pentru $G_+(\omega) \leftrightarrow g_+(t)$:

$$G_+(\omega) = G(\omega) + j \cdot [-j \operatorname{sgn}(\omega) \cdot G(\omega)] = [1 + \operatorname{sgn}(\omega)] G(\omega)$$

Ținând seama de expresia lui $\operatorname{sgn}(\omega)$, se deduce că spectrul semnalului analitic este:

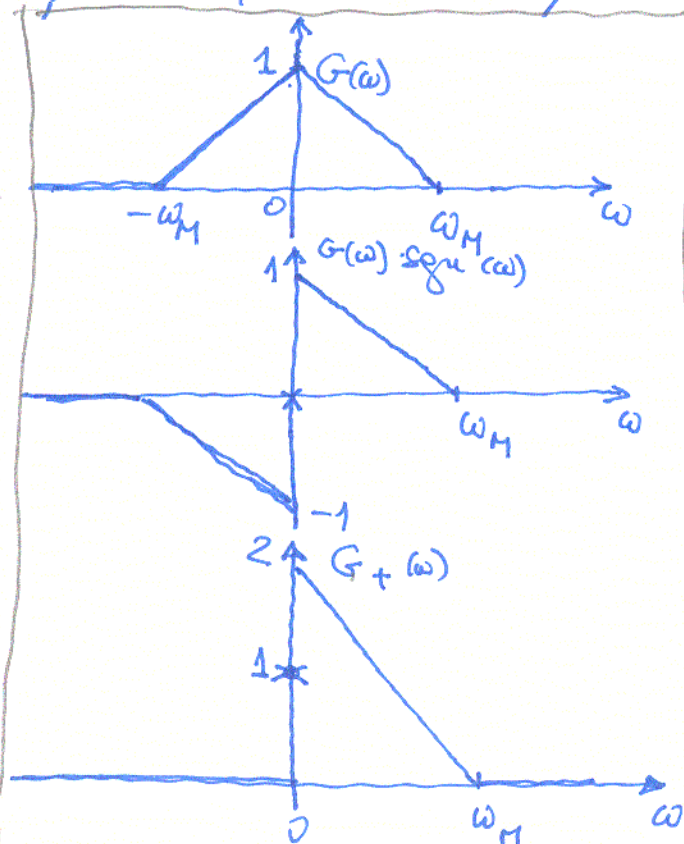
$$G_+(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega) & , \omega > 0 \\ G(\omega) & , \omega = 0 \\ 0 & , \omega < 0 \end{cases}$$

Se vede că spectrul este identic nul pe semiaxa $\omega < 0$.

Se poate deduce ușor că:

$$g_+(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Dacă dorim să obținem nu spectru nul pentru frecvențele pozitive, introducem semnalul analitic sub formă:



FigA.1 Spectrul semnalului analitic, $G_+(\omega)$

$$g_-(t) = g(t) - j\hat{g}(t) \leftrightarrow G_-(\omega) = [1 - \text{sgn}(\omega)]G(\omega)$$

$$G_-(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega > 0 \\ G(\omega) & \omega = 0 \\ 2G(\omega) & \omega < 0 \end{cases}$$

Este imediată relația :

$$g_-(t) = g^*(t)$$

Se mai vede că :

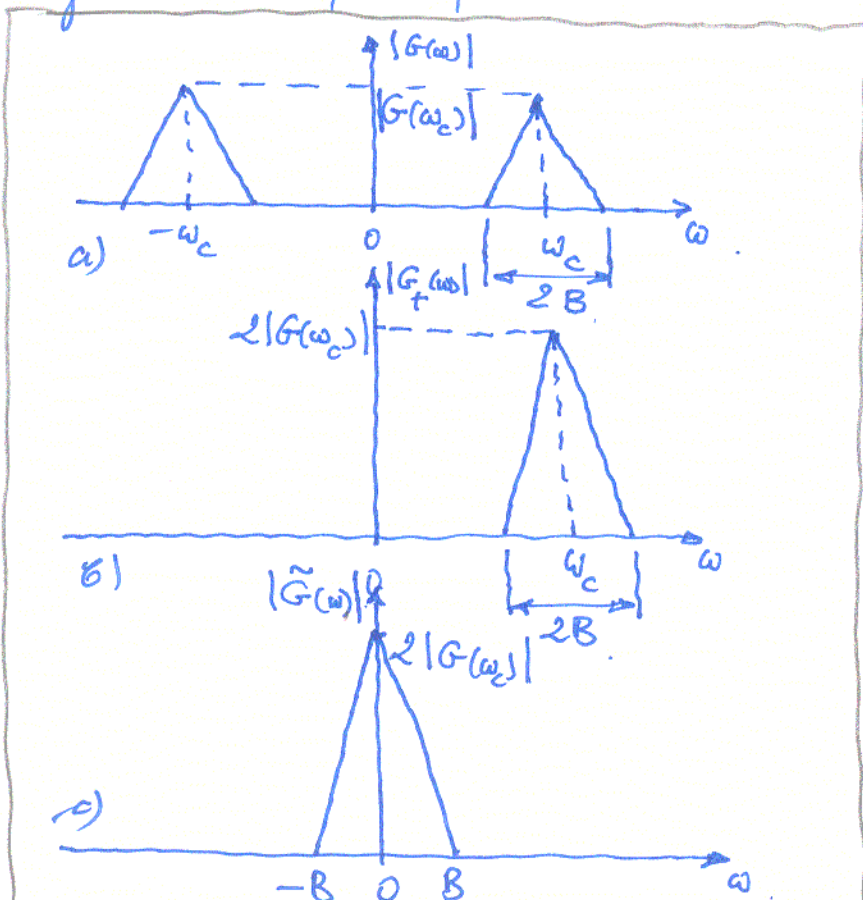
$$g_+(t) + g_-(t) = 2g(t).$$

■ Reprezentări canonice ale semnalelor trece-banda, de bandă îngustă

Fie un semnal $g(t)$ real, având spectrul $G(\omega)$ grupat în jurul purtătoarei ω_c . Banda sa, $2B = B_T$ este neglijabilă în raport cu ω_c :

$$\omega_c \gg 2B$$

Astfel de semnale se numesc de tip trece-banda, de bandă îngustă. Ele sunt semnale uzuale în telecomunicații.



Semnalul analitic $g_+(t)$ atașat semnalului real $g(t)$, poate fi pus în următoarea formă :

$$g_+(t) = \tilde{g}(t) e^{j\omega_c t}$$

unde $\tilde{g}(t)$ se numește înveliș complex al semnalului real $g(t)$.

Avem

$$G_+(\omega) = \tilde{G}(\omega + \omega_c)$$

și cum pentru $G_+(\omega)$

$$\omega_c - B < \omega < \omega_c + B$$

rezultă pentru $\tilde{G}(\omega + \omega_c)$:

Fig A2. Modulul spectrului semnalului TB , (a) Modulul spectrului semnalului analitic (b) Modulul spectrului învelișului complex (c)

$$\omega_c - B < \omega < \omega_c + B.$$

sau

$$-B < \omega < B.$$

Aceasta inseamna ca anvelopa complexa, $\tilde{g}(t)$, a unui semnal real, prece-banda, de banda ingusta, $g(t)$ este un semnal "prece-jos". Avem:

$$g(t) = \text{Re} \{ \tilde{g}(t) e^{j\omega_c t} \}$$

anvelopa $\tilde{g}(t)$ fiind de forma:

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t)$$

Semnalele reale $g_I(t)$ si $g_Q(t)$, numite si componentele "in-faza" si "in-cuadratura", respectiv, sunt si ele, ca si $\tilde{g}(t)$ de tipul "joasa-frecventa".

Avem:

$$g(t) = \text{Re} \{ [g_I(t) + jg_Q(t)] [\cos \omega_c t + j \sin \omega_c t] \} =$$

$$= \text{Re} \{ [g_I(t) \cos \omega_c t - g_Q(t) \sin \omega_c t] + j [g_I(t) \sin \omega_c t + g_Q(t) \cos \omega_c t] \}$$

sau

$$g(t) = g_I(t) \cos \omega_c t - g_Q(t) \sin \omega_c t$$

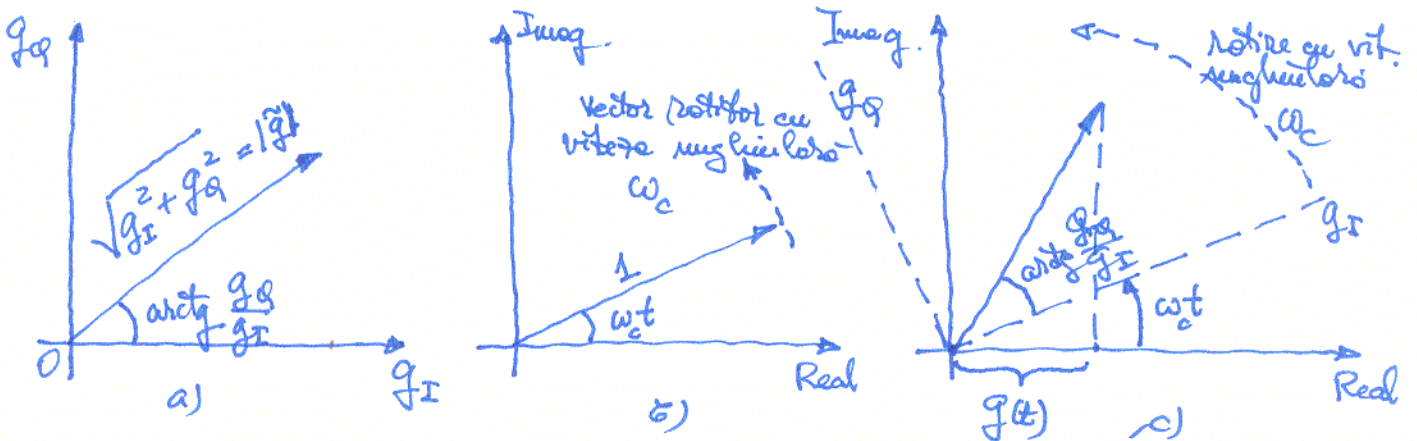


Fig A.3 Interpretarea vectorului anvelopa complexa $\tilde{g}(t)$ in raport cu axele g_I, g_Q , (a); vectorul rotitor, in planul complex, $e^{j\omega_c t}$ (b); Interpretarea semnalului auditiv si proiectia pe pe axa reala (c).

Cele doua componente de joasa frecventa, $g_I(t)$ si $g_Q(t)$, pot fi determinate din semnalul prece-banda $g(t)$ cu schema din

fig A.4.a. Schema din fig A.4.b arată cum se poate realiza primul trece bandă, pornind de la componentele pe de joasă frecvență.

Avem:

$$g(t) \cos \omega_c t = g_I(t) 2 \cos \omega_c t \cos \omega_c t - g_Q(t) 2 \sin \omega_c t \cos \omega_c t =$$

$$= g_I(t) [1 + \cos(2\omega_c t)] - g_Q(t) \sin(2\omega_c t)$$

Filtrând trece jos, se reține din cei trei termenii numai $g_I(t)$, deoarece ceilalți doi termeni sunt cu spectrele centrate pe $2\omega_c$.

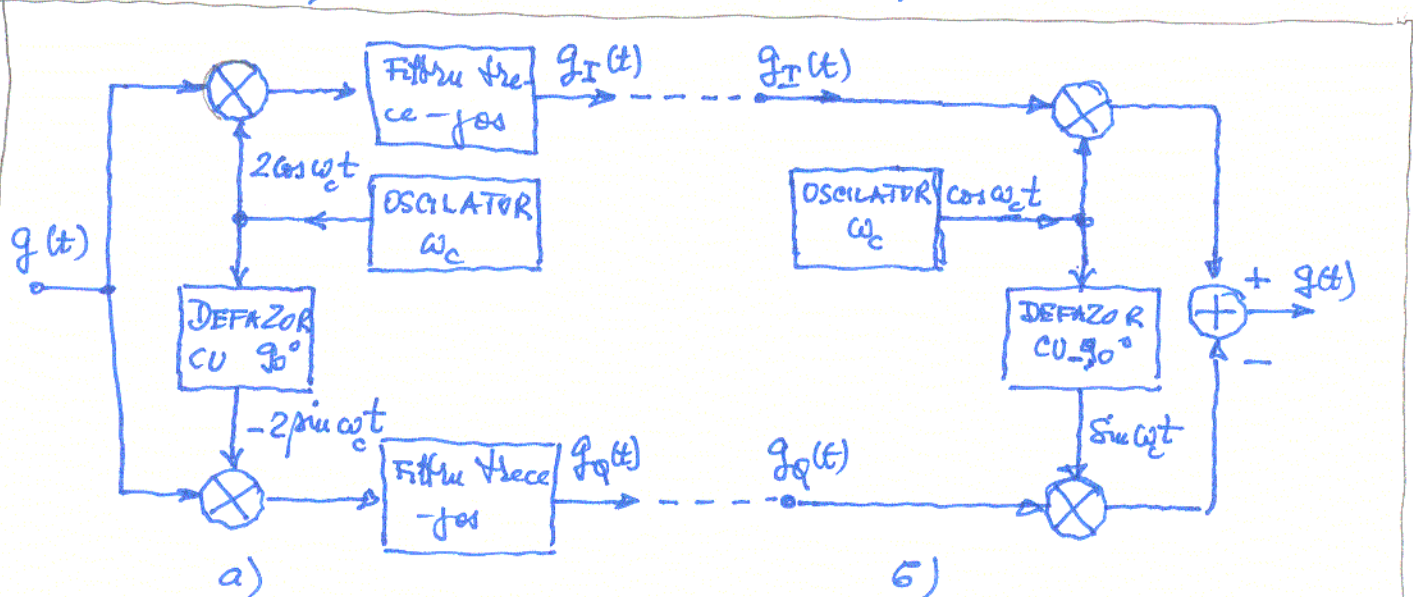


Fig A.4 Generarea componentelor în fază și în-cuadratură (a). Generarea semnalului din componentele în-fază și în-cuadratură (b).

La fel se procedează și pentru componenta $g_Q(t)$

Trecerea de la componentele $g_I(t)$ și $g_Q(t)$ la semnalul $g(t)$ se numește și "modulație trece-bandă".

Anvelopa complexă $g(t)$ poate fi reprezentată prin modul - $a(t)$ - și fază - $\phi(t)$ - prin relația:

$$\tilde{g}(t) = a(t) e^{j\phi(t)}$$

Cum semnalul real $g(t)$ este proiecția vectorului rotitor

$\tilde{g}(t) e^{j\omega_c t}$ pe axa reală, avem:

$$g(t) = \text{Re} \{ a(t) e^{j[\omega_c t + \phi(t)]} \}$$

sau:

$$g(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \phi(t)] = \underbrace{[a(t) \cos \phi(t)]}_{g_I(t)} \cos \omega_c t - \underbrace{[a(t) \sin \phi(t)]}_{g_Q(t)} \sin \omega_c t$$

Ecuația este o formulă matematică pentru o modulație hibridă, de amplitudine și de fază.

Pentru $a(t)$ se folosește denumirea de amvelopă a semnalului Trece-Bandă $g(t)$ iar pentru $\phi(t)$ se folosește denumirea de fază a semnalului Trece-Bandă $g(t)$.

Semnalul Trece-Bandă $g(t)$ - modulată - poate fi reprezentat fi recurgând la componentele în fază și în-cursdrehură, fi recurgând la componentele amvelopă și fază.

Avem relațiile evidente:

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = |g_+(t)|$$

$$a(t) = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)}$$

$$\phi(t) = \arctg \frac{g_Q(t)}{g_I(t)}$$

$$g_I(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

$$g_Q(t) = a(t) \sin \phi(t)$$

■ Reprezentări complexe ale sistemelor Trece-Bandă

Considerăm un semnal de tip Trece-Bandă, de Bandă îngustă, $x(t)$, cu frecvența purtătoare ω_c și Bandă 2B, unde $B < \omega_c$. În astfel de semnal se reprezintă prin:

$$x(t) = x_I(t) \cos \omega_c t - x_Q(t) \sin \omega_c t$$

amvelopa pe complexă fiind

$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + j x_Q(t)$$

Semnalul este aplicat unui sistem cu răspunsul la impuls $h(t)$ și răspunsul în frecvență $H(\omega)$, centrat pe ω_c , în ecortul $\pm W$.

Si pentru $h(t)$ se poate scrie :

$$h(t) = h_I(t) \cos \omega_c t - h_Q(t) \sin \omega_c t ; \tilde{h}(t) = h_I(t) + j h_Q(t)$$

sau c\o:

$$h(t) = \text{Re} \{ \tilde{h}(t) e^{j\omega_c t} \}$$

Cum $2 \text{Re} \{ z \} = z + z^*$, rezult\c\o :

$$2h(t) = \tilde{h}(t) e^{j\omega_c t} + \tilde{h}^*(t) e^{-j\omega_c t}$$

Dar $\tilde{h}(t) e^{j\omega_c t} \leftrightarrow \tilde{H}(\omega - \omega_c)$

$$\tilde{h}^*(t) \leftrightarrow \tilde{H}^*(-\omega)$$

$$\tilde{h}^*(t) e^{-j\omega_c t} \leftrightarrow \tilde{H}^*(-\omega - \omega_c)$$

si deci

$$2H(\omega) = \tilde{H}(\omega - \omega_c) + \tilde{H}^*(-\omega - \omega_c)$$

Pentru $h(t)$ real, $H^*(-\omega) = H(\omega)$, ceea ce se poate si verifica in relatia de mai sus

$$2H^*(-\omega) = \tilde{H}^*(-\omega - \omega_c) + \tilde{H}(\omega - \omega_c) = 2H(\omega)$$

Dar $\tilde{H}(\omega - \omega_c)$ este ^{definit} in banda

$$-W < \omega - \omega_c < W \Leftrightarrow \omega_c - W < \omega < \omega_c + W$$

acestei cu banda lui $H(\omega)$; Versusul $\tilde{H}^*(-\omega - \omega_c)$ este definit in banda :

$$-W < -\omega - \omega_c < W ; -W < \omega + \omega_c < W \Leftrightarrow -\omega_c - W < \omega < -\omega_c + W < 0$$

Supportul p\c\o este negativ. Prin urmare - vezi in figura A.5-

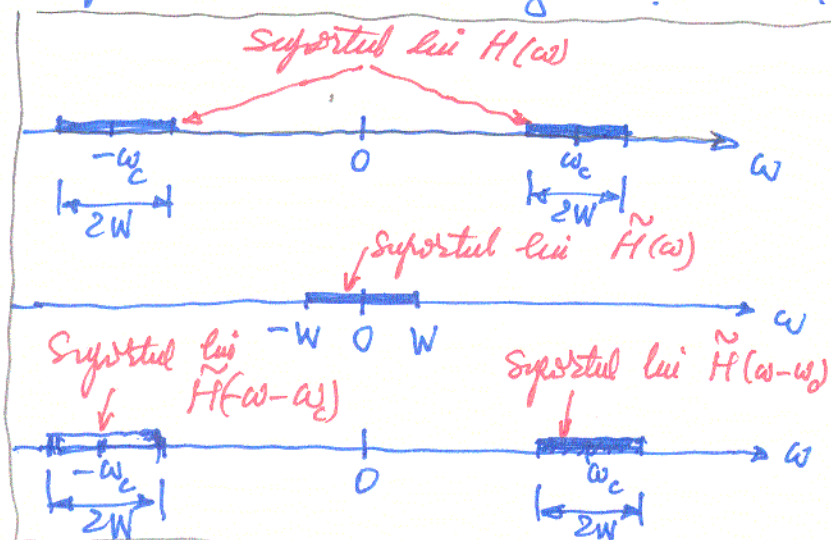


Fig A.5. Se poate vedea c\c\o pentru frecven\c\te pozitive $\tilde{H}(\omega - \omega_c)$ are aceleasi suport cu $H(\omega)$ iar pentru frecven\c\te negative $\tilde{H}^*(-\omega - \omega_c)$ are aceleasi suport cu $H(\omega)$

$$2H(\omega) = \tilde{H}(\omega - \omega_c), \quad \omega > 0 \text{ și } \omega < \omega_c.$$

Se vede că având $H(\omega)$ de tip trece bandă, putem determina $\tilde{H}(\omega)$ considerând portea lui $H(\omega)$ de pe semiaxa pozitivă, $\omega > 0$, deplasând-o în origine (stânga cu ω_c) și multiplicând cu doi:

$$\tilde{H}(\omega) = 2H(\omega + \omega_c); \quad \omega > -\omega_c \text{ și } \omega < \omega_c$$

Din $\tilde{H}(\omega)$ se determină răspunsul la impuls, complex ce fiind:

$$\tilde{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Vom considera acum că atât $x(t)$ cât și $h(t)$ au spectrul respectiv răspunsul în frecvență centrat pe ω_c . Atunci, în mod evident $y(t)$, ieșirea sistemului va avea spectrul său $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ centrat tot pe ω_c , fiind și el un semnal trece bandă, cu amplitudă complexă $\tilde{y}(t)$:

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{y}(t) e^{j\omega_c t} \} = \operatorname{Re} \{ y_+(t) \}$$

Alți avem:

$$x(t) = \operatorname{Re} \{ x_+(t) \} \text{ și } h(t) = \operatorname{Re} \{ h_+(t) \}.$$

Rezultă

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ x_+(t-\tau) \} \operatorname{Re} \{ h_+(\tau) \} d\tau$$

Se poate arăta că, în general:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \{ x_+(u) \} \operatorname{Re} \{ h_+(u) \} du = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_+^*(u) h_+(u) du \right\}$$

are că avem:

$$y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x_+(t-\tau) h_+(\tau) d\tau \right\}$$

$$\text{deoarece } x_+^*(-u) = x_+(u)$$

Substituind semnalele analitice găsim că:

$$y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t-\tau) e^{j\omega_c(t-\tau)} \tilde{h}(\tau) e^{j\omega_c\tau} d\tau \right\}$$

sau

$$y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_c t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{h}(\tau) \tilde{x}(t-\tau) d\tau \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{y}(t) e^{j\omega_c t} \right\}$$

Priu urmare, pentru frecvențe ale purtătoarei suficient de mari în raport cu banda, amvelopa complexă a semnalului de ieșire se obține ca o convoluție între amvelopa complexă, $\tilde{x}(t)$, și răspunsul complex la impuls, $\tilde{h}(t)$:

$$2\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$

cu excepția factorului de scară 1/2

Pentru a analiza semnale și sisteme de tip frecvență-banda, de banda îngustă, este suficient să lucrăm doar cu versiunile frecvență, $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$, $\tilde{h}(t)$. Aceasta are loc la joasă frecvență, reținându-se însă comportarea procesului de filtrare.

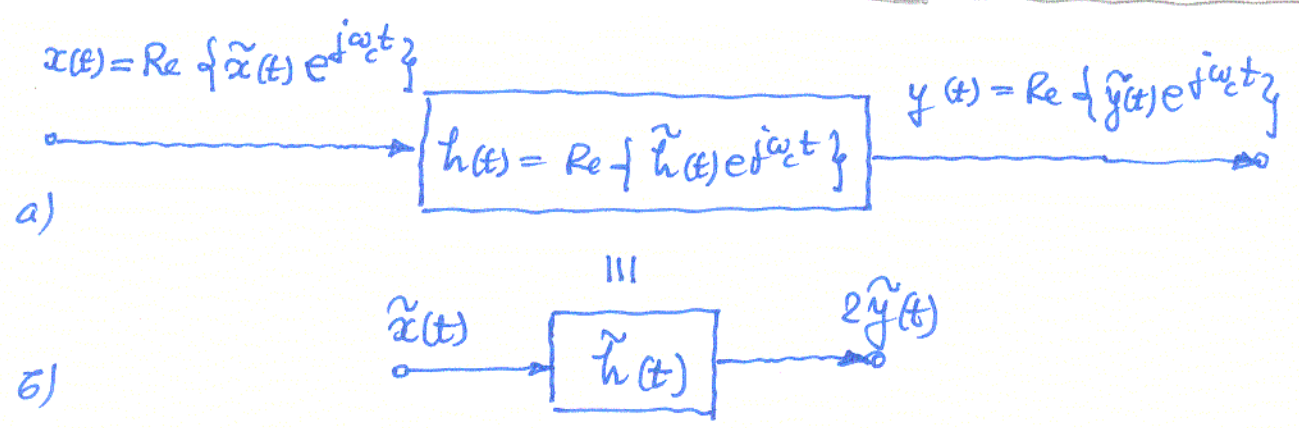


Fig. A.6 Răspunsul unui filtru frecvență-banda, de banda îngustă la un semnal frecvență-banda, de banda îngustă, (a); Filtrul frecvență echivalent (echivalentul frecvență), (b)

Mai avem:

$$2\tilde{y}(t) = [h_I(t) + j h_Q(t)] * [x_I(t) + j x_Q(t)]$$

sau :

$$\mathcal{L}\tilde{y}(t) = h_I(t) * x_I(t) - h_Q(t) * x_Q(t) + j[h_Q(t) * x_I(t) + h_I(t) * x_Q(t)]$$

Decarnea $\tilde{y}(t) = y_I(t) + jy_Q(t)$, rezultă că :

$$\mathcal{L}y_I(t) = h_I(t) * x_I(t) - h_Q(t) * x_Q(t)$$

$$\mathcal{L}y_Q(t) = h_Q(t) * x_I(t) + h_I(t) * x_Q(t)$$

Pentru a evalua răspunsurile în-fază și în-quadatură schema este cea din fig. A.F.

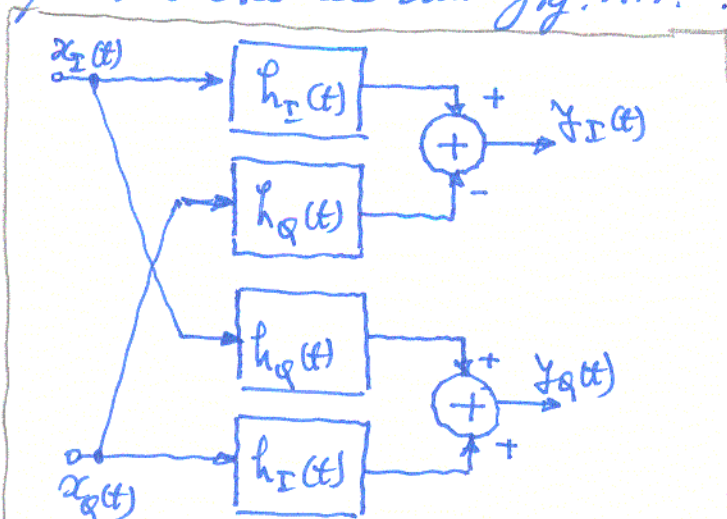


Fig. A.F. Generarea componentelor răspunsului, din componentele excitatiei

echivalent de tip trece jos, $\tilde{h}(t)$ (răspuns complex la în-puls) unde :

$$h(t) = \text{Re} \{ \tilde{h}(t) e^{j\omega_c t} \}$$

3. Se determină $\tilde{y}(t)$, amvelopa complexă a semnalului de la ieșirea sistemului cu relația :

$$\mathcal{L}\tilde{y}(t) = \tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$

(funcția răspunsului filtrului trece jos echivalent la excitarea prin amvelopa complexă a semnalului de intrare).

4. Se determină semnalul de ieșire $y(t)$, de tip trece-bandă cu relația

$$y(t) = \text{Re} \{ \tilde{y}(t) e^{j\omega_c t} \}$$