

Transformarea sistemelor în timp continuu, în sisteme în timp discret.

Suntem interesați să transformăm sisteme analogice (definite în timp continuu) în sisteme digitale (definite în timp discret), pentru a putea utiliza sistemele de calcul numeric în locul sistemelor analogice. În astfel de cazuri, semnalul în timp continuu se transformă, prin eantionare, într-un semnal în timp discret. După prelucrarea numerică a semnalului, cu un sistem de calcul, rezultă tot un semnal în timp discret, care poate fi transformat în sens invers, într-un semnal în timp continuu.

Trebuie să menționăm că există o îndelungată experiență în proiectarea sistemelor analogice de prelucrare a semnalelor. Prin transformarea de core am amplitudă, putem să proiectăm sisteme în timp discret, care să îndeplinească anumite cerințe în domeniul frecvență sau în domeniul timp, utând de experiența de proiectare acumulată în proiectarea sistemelor analogice.

Este necesar să definim un criteriu al calității prin care ^{se poate aprecia} aproximarea unui sistem analogic de către un sistem discret.

1. Opcheiō generală de evaluare a calității unei transformări, pentru sistemele de bandă limitată.

În figure 1 se prezintă schema generală, după care un sistem, pur și simplu de bandă limitată, $H_a(s)$, este echivalent de către un sistem discret, $H_d(z)$, și se estimează calitatea transformării - sau echivalenței - prin determinarea unui semnal "eroare".

Un fi de dorit ca semnalul analogic de la ieșirea sistemului analogic să aibe același esanțiu cu cele furnizate de sistemul discret,

$y_a(nT) = y_d(nT)$. În măsură în care se aplică teoreme

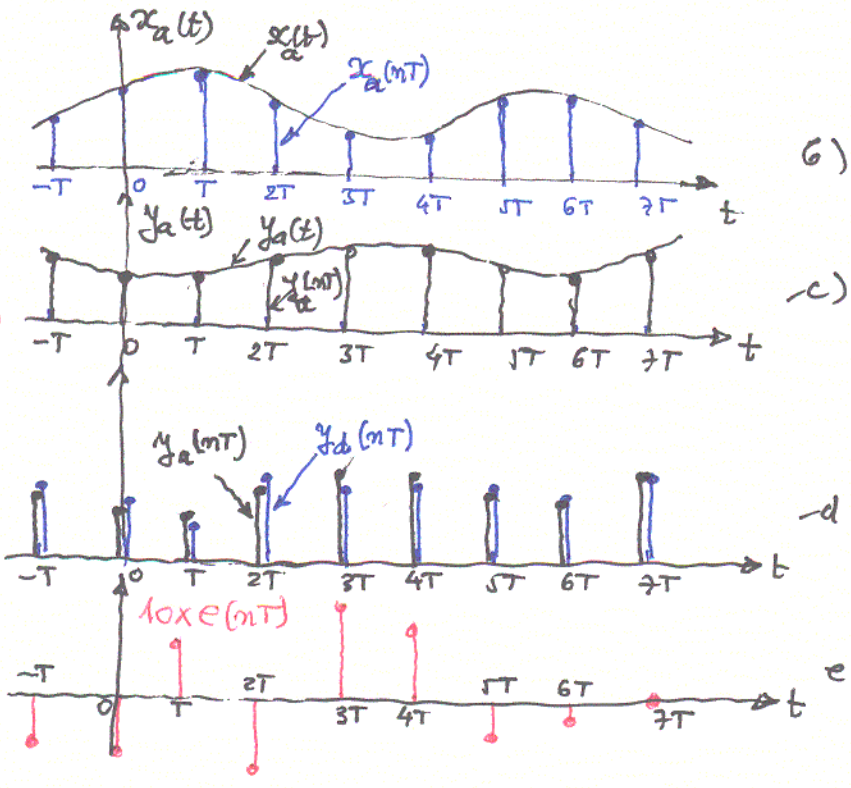
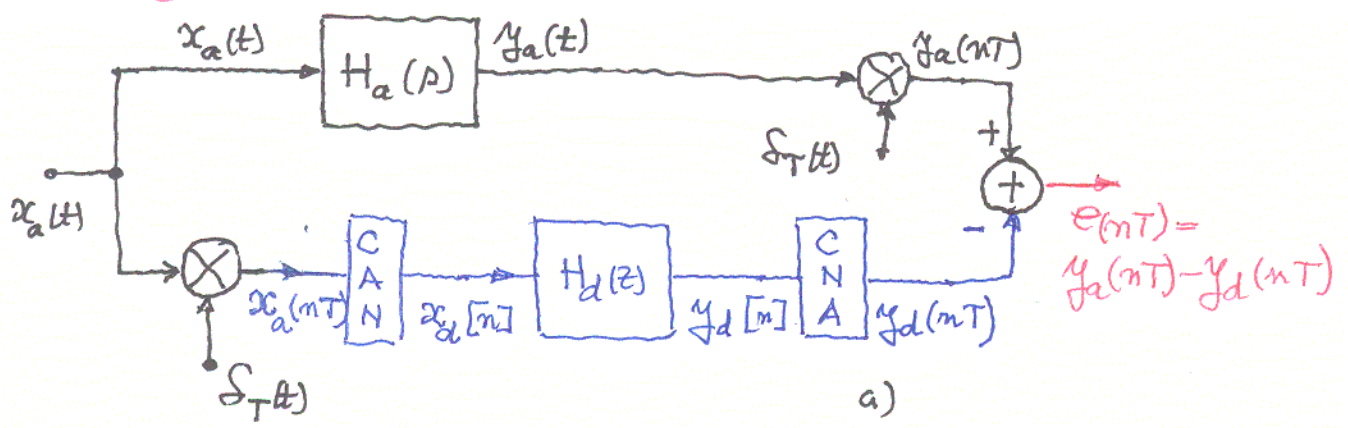


Fig 1. (a) Sistemul analogic $H_a(s)$ și sistemul digital echivalent $H_d(z)$. Calitatea echivalării prin transformarea de frecvență este măsurată prin eroarea $e(nT)$. (b) Semnalul analogic și esantioanele sale, $x_a(nT) = x_d[n]$. (c) Semnalul analogic de ieșire $y_a(t)$ și esantioanele sale, $y_a(nT)$. (d) Esantioanele obținute pe cale "analogică", $y_a(nT)$ și esantioanele obținute pe cale "digitală" $y_d(nT)$. (e) Eroarea de echantionare în punctele de esantionare; $e(nT) = y_a(nT) - y_d(nT)$.

esantionării, din $y_a(nT)$ se poate reconstrui $y_a(t)$. Rezultă deci că și din esantioanele de la ieșirea sistemului discret se poate reconstrui, cu aceeași mijloc, semnalul $y_a(t)$ sau că echivalarea prin transformarea de frecvență este "perfectă".

Fiți că $H_a(j\omega)$ este de bandă limitată la ω_M și că are

este în punctul de intrare, $x_a(t)$. Se știe că aplicând la intrarea sistemului $H_a(j\omega) \leftrightarrow h_a(t)$ un impuls Dirac, $\delta(t)$, la ieșire se va obține $h_a(t) \leftrightarrow H_a(j\omega)$. Impulsul Dirac, având

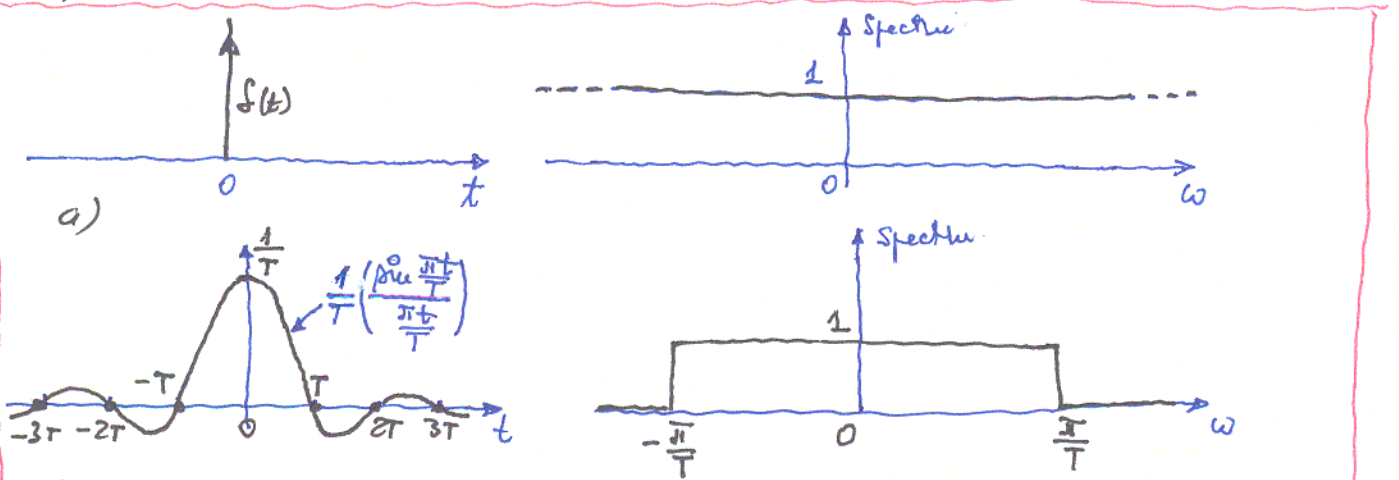


Fig 2 (a) Impulsul Dirac și spectrul său, întins de la $-\infty$, la $+\infty$. El este semnalul potrivit pentru a releva răspunsul în frecvență al oricărui sistem, de bandă posibil nelimitată. (b) Semnalul $\frac{1}{T} \left(\frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \right)$ are spectrul limitat la $\pm \pi/T$, este potrivit pentru relevarea răspunsului în frecvență al unui sistem de bandă limitată, cu $\omega_M \leq \pi/T$.

spectrul $H(\omega)$, de la $-\infty$, la $+\infty$, poate releva răspunsul în frecvență al oricărui sistem analogic, chiar dacă este de bandă nelimitată. Considerăm acum semnalul $\frac{1}{T} \left(\frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \right)$. Spectrul său este de probabilitate unitară de la $-\pi/T$ până la π/T , așa cum se vede în figura 2b. Dacă aplicăm acest semnal

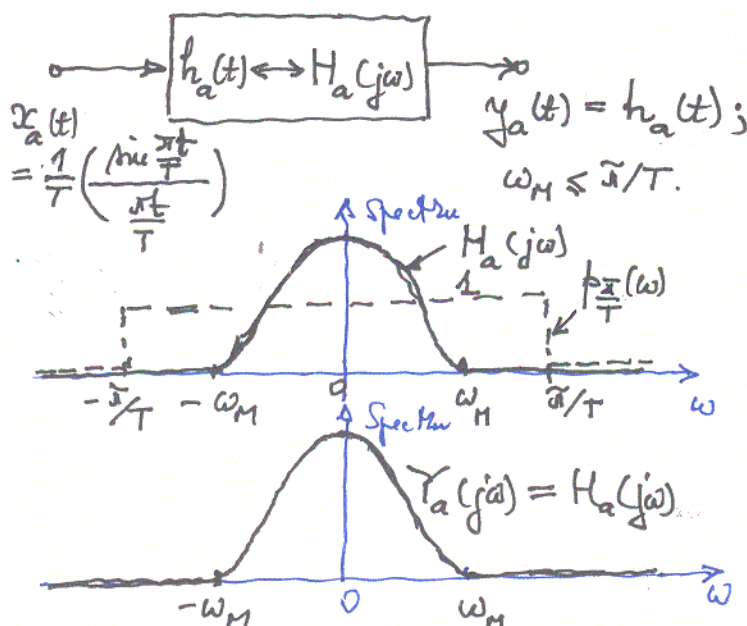


Fig 3. Răspunsul sist. de bandă limitată

la intrarea unui sistem de bandă limitată la ω_M , dar cu condiția $\omega_M \leq \pi/T$, atunci, are ca rezultat și din figura 3 avem:

$$y_a(t) = \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \right) \right] * h_a(t)$$

sau:

$$Y_a(\omega) = p_{\frac{\pi}{T}}(\omega) H_a(\omega) = H_a(\omega)$$

Spectrul semnalului de intrare, $X_a(\omega)$, este identic cu răspunsul în frecvență al sistemului de bandă limitată, $H_a(\omega)$, motiv pentru care răspunsul sistemului este chiar $h_a(t)$.

Dacă ne referim la figura 1a, se vede că nu putem pune $x_a(t) = \delta(t)$, deoarece produsul $\delta(t) \cdot \delta(t)$ nu este definit. Ce altceva nu putem exactiona nișpulul Dirac. Rezultă că nu am putea pune în evidență $y_a(t) = h_a(t)$ și $Y_d[n] = h_d[n]$. Dacă însă aplicăm la intrarea $x_a(t)$ din figura 1 semnalul:

$$x_a(t) = \left(\frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \right) \leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} (\omega) \quad (1)$$

și dacă sistemul $H_a(j\omega)$ este de bandă limitată și îndeplinește condiția:

$$\omega_M \leq \frac{\pi}{T} \quad (2)$$

atunci:

$$y_a(t) = h_a(t) \quad (3)$$

Spantionând semnalul $x_a(t)$ cu $T_e = T$ se obține secvența numerică formată din volutea T în origine și mult în rest - vezi figura 4. - adică:

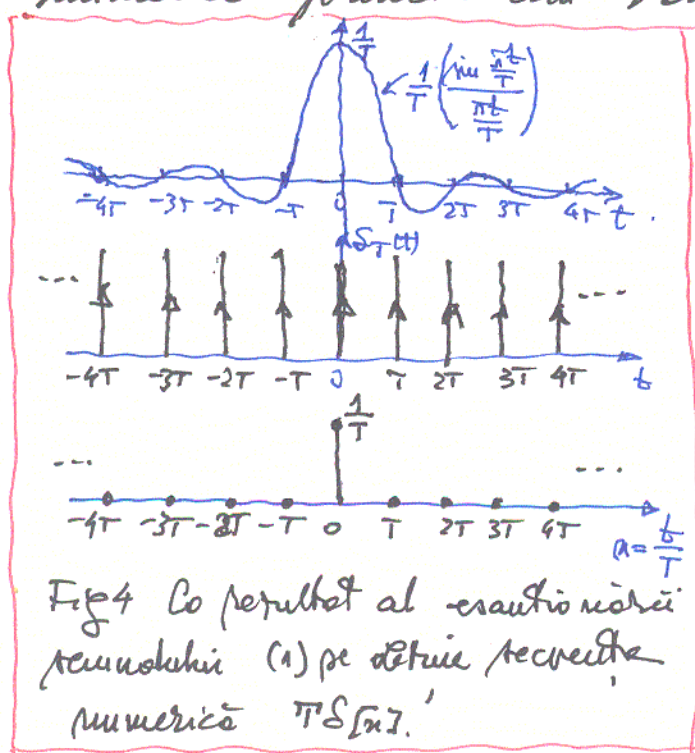


Fig 4 Ca rezultat al esantionării semnalului (1) se obține secvența numerică $\frac{1}{T} \delta[n]$.

$$x_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n] \quad (4)$$

Reamintim că $\delta[n]$ este o distribuție ci o funcție definită prin:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & , n=0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases} \quad (5)$$

La intrare sistemului digital $h_d[n] \leftrightarrow H_d(z)$ se obține răspunsul:

$$y_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n] * h_d[n] = \frac{1}{T} h_d[n] \quad (6)$$

sau, după convertia numeric analogică:

$$y_a(nT) = \frac{1}{T} h_d(nT) \quad (7)$$

Prii esantionarea (răspunsului) sistemului analogic, $y_a(t) = h_a(t)$, se obțin valorile $y_a(nT) = h_a(nT)$. În condiții în care eroarea $e(nT)$ este nulă, avem:

$$h_a(nT) = \frac{1}{T} h_d(nT) \quad (8)$$

Am definit, prii relația (8) o transformare între un sistem analogic și un sistem discret. Răspunsul $h_d[n] = h_d(nT)$ se obține din esantioanele preluate din $h_a(t)$, $h_a(nT)$:

$$h_d[n] = T h_a(nT) \quad (9)$$

Am reușit să stabilim o relație echivalentă (transformare) prii nvarianta răspunsului la impuls, ce va fi studiată aparte.

Fie acum un semnal $x_a(t) \leftrightarrow X_a(s)$ de natură oarecare dar de bandă limitată la π/T , jumătatea frecvenței de esantionare ω_e :

$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} \quad (10)$$

Răspunsul sistemului analogic la momentele de timp nT este:

$$y_a(nT) = \mathcal{L}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT) \quad (11)$$

Pe de altă parte, considerând că

$$x_d[n] = x_a(nT) \leftrightarrow X_d(z) \quad (12)$$

sau:

$$X_d(z) = \mathcal{Z} \{ x_a(nT) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) z^{-n} \quad (13)$$

avem:

$$Y_d(z) = X_d(z) H_d(z) \quad (14)$$

și

$$y_d(nT) = y_d[n] = \mathcal{Z}^{-1} \{ X_d(z) H_d(z) \} \quad (15)$$

Doar să echivalăm sistemul analogic cu un sistem

discret în ase fel micșor eroarea din momentele de esantionare
nT:

$$e(nT) = y_a(nT) - y_d(nT) \tag{16}$$

pă fi nulă sau,

$$y_d[n] = y_d(nT) = y_a(nT) \tag{17}$$

Se ține seama de relațiile (11) și (15) și obținem - din (17) :

$$\mathcal{Z}^{-1} \{ X_d(z) H_d(z) \} = \mathcal{Z}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT) \tag{18}$$

Reamintim că ceea ce dorim să găsim este $h_d[n] \leftrightarrow H_d(z)$,
motiv pentru care aplicăm relației (18) transformarea \mathcal{Z} .

Obținem :

$$H_d(z) = \frac{1}{X_d(z)} \mathcal{Z} \{ \mathcal{Z}^{-1} \{ X_a(s) H_a(s) \} (nT) \} \tag{19}$$

Cunoscând $H_d(z)$ putem implementa sistemul numeric
echivalent sistemului analogic, $H_a(s)$.

Analizând relația (19) rezultă că $H_d(z)$ depinde de pecu-
molul $x_a(t)$, prin $X_a(s)$ și $X_d(z)$. Prin urmare schimbând
pecu-molul se schimbă sistemul digital echivalent sistemului
analogic.

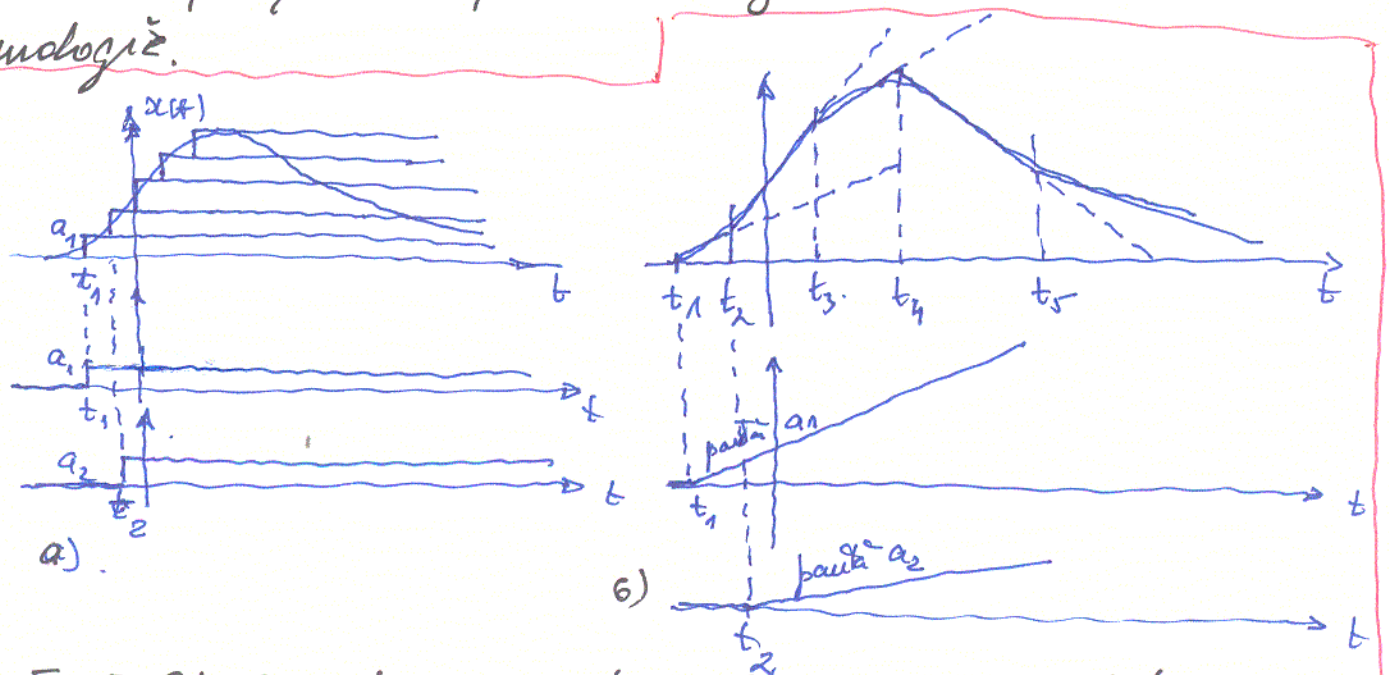


Fig 5. (a) Aproximarea unui pecu-mol oarecare $x(t)$ printr-o pecu-mol
ponderată de pecu-mole fixe. (b) Aproximarea unui pecu-mol oarecare
printr-o pecu-mol ponderată de pecu-mole variabile.

Nu există un sistem digital, echivalent perfect unui sistem analogic, pentru orice semnal de intrare. Dacă am proiectat un sistem digital echivalent unui sistem analogic, considerând un semnal de intrare $x_a(t)$, pentru un alt semnal de intrare, $x_{1a}(t) \neq x_a(t)$, eroarea de echivalență, $e(nT)$, nu va mai fi identic nulă.

Un semnal ^{$x_a(t)$} oarecure poate fi aproximat printr-o sumă de semnale dreptă uniteră, $\sigma(t)$, corespunzător ponderate și deplasate - vezi și figura 5.9. - de forma:

$$x(t) \approx \sum_k a_k \sigma(t-t_k) \tag{20}$$

Semnalele mai pot fi aproximate și printr-o sumă ponderată de semnale rampă, $t \sigma(t)$, prin:

$$x(t) \approx \sum_k a_k (t-t_k) \sigma(t-t_k) \tag{21}$$

are, cum se arată în figura 5.6. Efortul de aproximare este mai redus în cel de-al doilea caz.

Drept consecință, vom recurge la semnale "standard" pentru echivalență, fie de tipul dreptă uniteră, $\sigma(t)$, fie de tipul rampă, $t \sigma(t)$.

2. Echivalența sistemelor de bandă limitată prin metoda invariantei răspunsului la impuls.

Relația de echivalență, obținută pentru semnalul de intrare:

$$x_a(t) = \frac{1}{T} \left(\frac{\sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}} \right)$$

și corespunzător său discret:

$$x_d[n] = \frac{1}{T} \delta[n]$$

este dată de (9):

$$h_d[n] = T h_a(nT)$$

Transformarea Laplace aplicată semnalului obținut prin esantionarea seriei $y_a(t)$ - figura 1.0 - este

$$\hat{Y}_a(s) = \mathcal{L} \{ y_a(t) \delta_T(t) \} = \mathcal{L} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) \delta(t-nT) \right\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) \mathcal{L} \{ \delta(t-nT) \} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) e^{-s n T} \quad (23)$$

Pe de altă parte, transformata Z a semnalului de la intrarea sistemului discret, echivalent sistemului analogic, este:

$$H_d(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T h_a(nT) z^{-n} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_a(nT) z^{-n} \quad (24)$$

Din (23) și (24) rezultă că:

$$\hat{Y}_a(s) = \frac{1}{T} H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}} \quad (25)$$

Pe de altă parte, ca și pentru orice semnal esantionat avem:

$$\hat{Y}_a(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\omega - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (26)$$

și introducând $j\omega$ cu s obținem o relație între transformata Laplace $\hat{Y}_a(s)$ și transformata Laplace a răspunsului la impuls $h_a(t)$, $H_a(s)$:

$$\hat{Y}_a(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (27)$$

Din (25) și (27) rezultă, după simplificarea cu $1/T$:

$$H_d(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(s - j\frac{2\pi k}{T}) \quad (28)$$

Relația de transformare între planurile $z = r e^{j\Omega} = x + jy$

și $s = \sigma + j\omega$ este:

$$r e^{j\Omega} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\omega T} \quad (29)$$

sau:

$r = e^{\sigma T}$; $\omega T = \Omega + 2k\pi$ (30)

1) Se vede că semiplanul $\sigma < 0$ se transformă în interiorul discului unitar, $|z| = r < 1$. 2) Semiplanul drept $\sigma > 0$ se transformă în exteriorul discului unitar, $|z| = r > 1$.

3) Axea imaginară, $\sigma = 0$, se transformă în cercul unitar, $|z| = r = 1$. Mai precis segmentul $[-\pi/T, \pi/T)$ de pe axa imaginară corespunde unei jumătăți pe cercul unitar

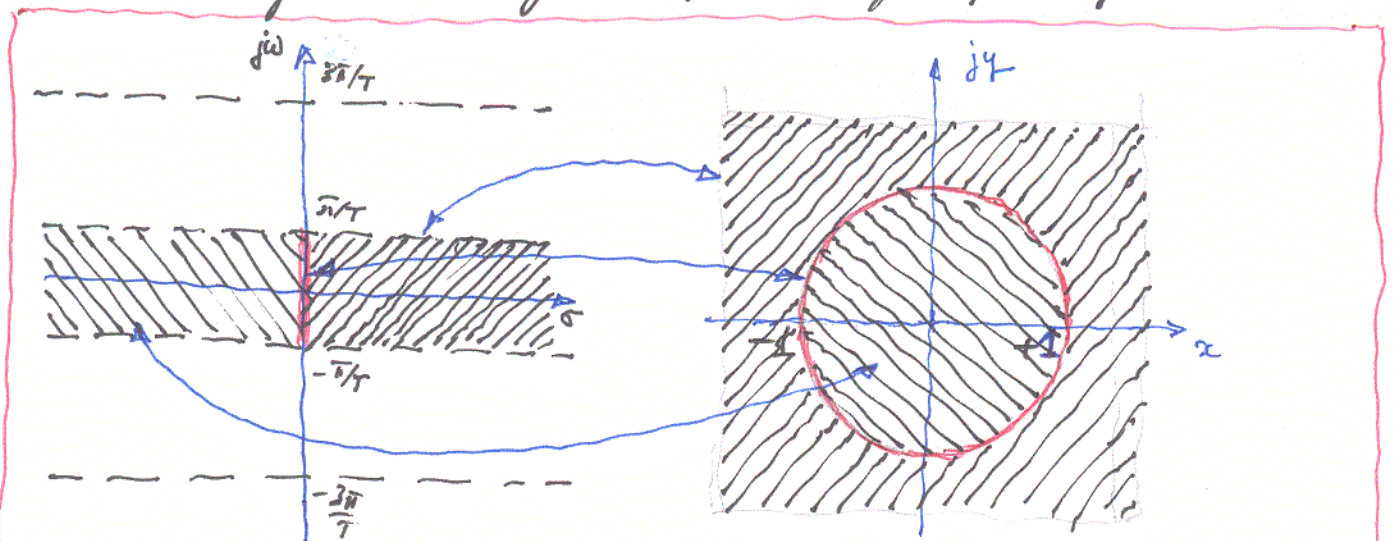


Fig 6 Corespondența între planurile s și z pentru transformarea $z = e^{sT}$, definită la echivalența prin învarianța răspunsului la impuls. Fiecare bandă $2\pi/T$, $\sigma < 0$ se transformă în interiorul discului unitar; fiecare bandă $2\pi/T$, $\sigma > 0$ se transformă în exteriorul cercului unitar; fiecare segment de lungime $2\pi/T$ al axei imaginare se transformă în cercul unitar.

dar, $r = 1$. Pentru ca să nu apară supraîncălziri de tip "alias" în răspunsul sistemului digital echivalent, cantate de nișă-purități de pe cercul unitar ale răspunsului în frecvență al sistemului analogic, este necesar ca acesta să fie cuprins în întregime în banda de frecvențe de la $-\pi/T$ la π/T , cu alte cuvinte sistemul analogic să fie de bandă limitată la $\omega_m \leq \pi/T$ și să se esantioneze conform teoremei esantionării, cu $\omega_e = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_m$.

În ceea ce privește răspunsul în frecvență al sistemului echivalent $H_d(e^{j\Omega})$, el se deduce din (29) ca fiind:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(\omega - k \frac{2\pi}{T}) \Big|_{\omega = \frac{\Omega}{T}} = \sum H_a(\frac{\Omega - k 2\pi}{T}) \quad (31)$$

În figura 7 se reprezintă $H_a(\omega)$ și $H_d(z)$. Se vede că pentru

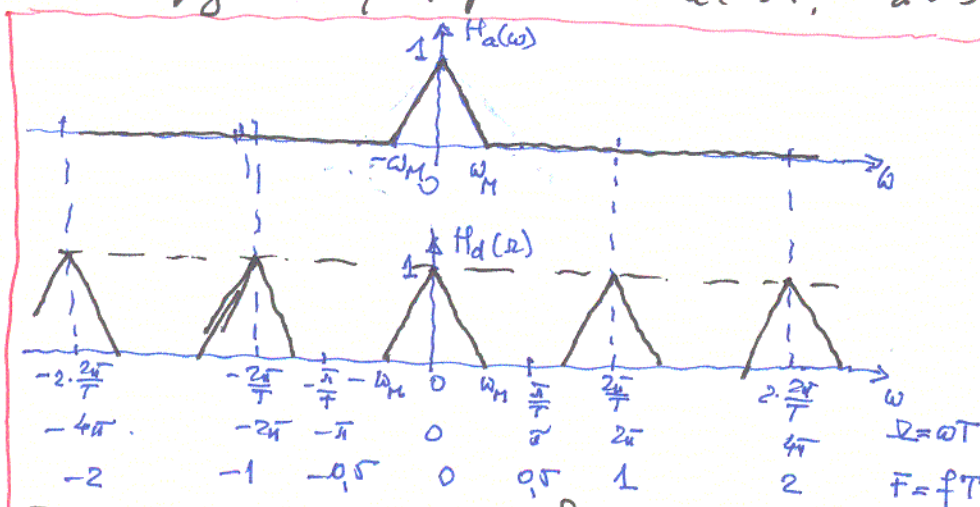


Fig 7. Răspunsul în frecvență al sistemului digital, comparativ cu răspunsul în frecvență al sistemului analogic.

relația de transformare:

$$h_d[n] = T h_a(nT)$$

Răspunsul în frecvență al sistemului digital este identic cu răspunsul în frecvență al sistemului analogic

de cândă limitată, pentru frecvențe nu mai mari decât jumătatea frecvenței de esantionare:

$$H_a(\omega) = H_d(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} ; |\omega| \leq \frac{\pi}{T} \text{ și } \omega_M \leq \frac{\pi}{T} \quad (32)$$

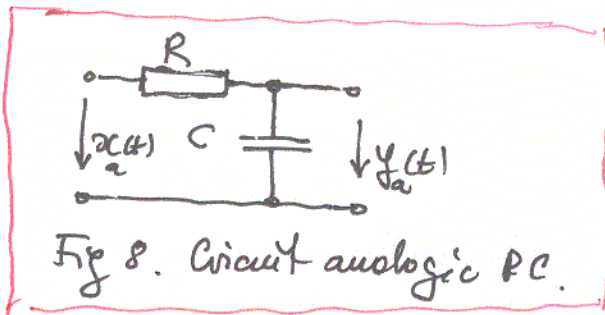
Pe axa de frecvențe ω , răspunsul sistemului digital este de tipul "comb", răspuns cauzat de procesul de discretizare în timp și produs prin faptul că acest număr corespunde unui număr segmente, de aceeași lungime, de pe axa însoțitoare, $f\omega$.

Dacă se lucrează cu frecvența f [Hz], răspunsul sistemului digital este identic cu cel al sistemului analogic până la $f = f_e/2$, jumătatea frecvenței de esantionare. Dacă se lucrează cu frecvența normalizată $F = \frac{f}{f_e} = fT$, răspunsul sistemului digital este identic cu cel al sistemului analogic până la $F = 0,5$, frecvența de esantionare normalizată fiind $F_e = 1$.

Pentru a înțelege mai bine acest gen de transformare

vom prezenta un exemplu. El nu se referă la un sistem de bandă limitată și deci vor apărea erori de aliere.

Exemplu. Considerăm circuitul RC din figura 8. Așa



cum am mai arătat, dacă $x_a(t)$ și $y_a(t)$ sunt tensiunile de intrare și de ieșire, respectiv, avem:

$$RC \frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t) \quad (33)$$

sau:

$$H_a(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_0}} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau} \quad (34)$$

τ fiind constanta de timp a circuitului. Răspunsul în frecvență al sistemului este:

$$H_a(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega} \quad (35)$$

Se poate determina $h_a(t)$ ce fiind

$$h_a(t) = \omega_0 e^{-\omega_0 t} \mathcal{U}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \mathcal{U}(t) \quad (36)$$

Putem determina un sistem discret (digital) echivalent cu relația

$$h_d[n] = T h_a(nT) = \frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} \mathcal{U}[n] \quad (37)$$

cu condiția ca T să fie suficient de mic în comparație cu τ , constanta de timp a circuitului. Deoarece sistemul nu este de bandă limitată apare alierea, răspunsul în frecvență al sistemului discret fiind afectat la frecvențe mari.

Vom determina răspunsul sistemului analogic și al sistemului discret la semnul treptă unitară, $\mathcal{U}(t)$ și $\mathcal{U}[n]$ respectiv.

$$Y_a(\omega) = H_a(\omega) X_a(\omega) = \frac{\omega_0}{(\omega_0 + j\omega)} = \frac{-1}{\omega_0 + j\omega} + \frac{1}{\omega_0} \leftrightarrow (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \mathcal{U}(t)$$

$$Y_d(z) = H_d(z) X_d(z) = \frac{T/\tau}{(1 - e^{-T/\tau} z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

$$H_d(z)X_d(z) = -\frac{T}{6} \cdot \frac{e^{-\frac{T}{2}}}{1-e^{-\frac{T}{2}}} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}}z^{-1}} + \frac{T}{6} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{T}{6} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}}} \left(1 - e^{-\frac{T}{2}} e^{-\frac{nT}{2}}\right) \mathcal{U}[n].$$

Avem deci:

$$y_a(t) = (1 - e^{-\frac{t}{6}}) \mathcal{U}(t) \tag{38}$$

$$y_d[n] = \frac{T}{6} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{T}{2}}} \left(1 - e^{-\frac{T}{2}} \cdot e^{-\frac{nT}{2}}\right) \mathcal{U}[n] \tag{39}$$

Apore deci o eroare în răspunsul sistemului digital :

$$e(nT) = y_a(nT) - y_d(nT)$$

Considerăm că $T/6 \ll 1$ și că deci :

$$e^{-\frac{T}{6}} \cong 1 - \frac{T}{6}$$

Avem :

$$y_a(nT) = 1 - e^{-\frac{nT}{6}}, n \geq 0$$

$$y_d(nT) \cong 1 - \left(1 - \frac{T}{6}\right) e^{-\frac{nT}{6}}, n \geq 0 \text{ și } \frac{T}{6} \ll 1.$$

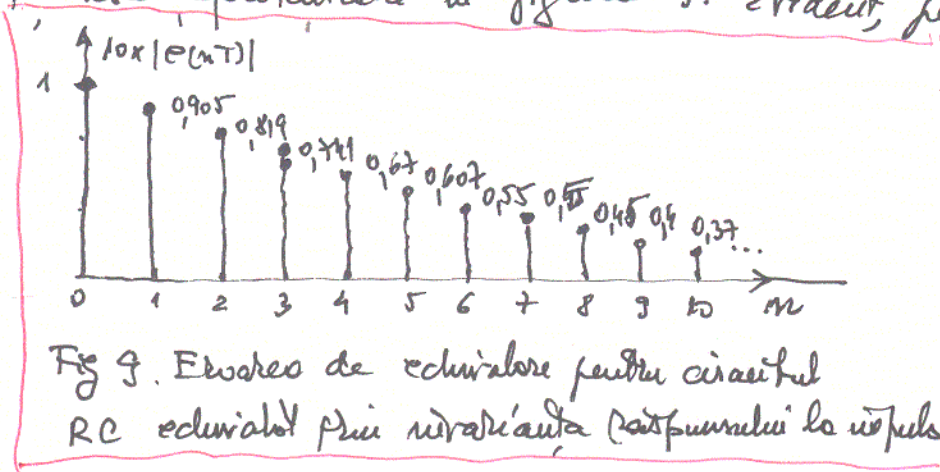
În final :

$$e(nT) \cong -\frac{T}{6} e^{-\frac{nT}{6}}, \frac{T}{6} \ll 1, n \geq 0 \tag{40}$$

Valoarea maximă a erorii este $-\frac{T}{6}$ și apare pentru $n=0$. Pe măsura trecerii timpului $n \rightarrow \infty$ și $e(nT) \rightarrow 0$. Fie $\frac{T}{6} = \frac{1}{10}$ cu $e^{-\frac{T}{6}} = e^{-0,1} \cong 0,905$ și $1 - \frac{T}{6} = 0,9$. Eroarea se poate aproxima cu :

$$|e(nT)| \cong 0,1 e^{-\frac{n}{10}}$$

și este reprezentată în figura 9. Evident, pentru valori $T/6$ mai mici și erorile vor fi mai reduse.



În cazul de față $\frac{T}{6} = \omega_0 T = \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_c} = 0,1$ de unde : $\omega_c = 20\pi \omega_0$

Fig 9. Eroarea de eșantionare pentru circuitul RC echivalat prin înlocuirea răspunsului la impuls

La jumătatea frecvenței de eșantionare, $\omega = \frac{\omega_e}{2} = 10\pi\omega_0$, valoarea
modului răspunsului în frecvență al sistemului analogic este

$$|H(10\pi\omega_0)| = \frac{1}{|1 + j10\pi|} \approx \frac{1}{10\pi} \approx 0,0318 \text{ sau } 20\log|H(10\pi\omega_0)| =$$

 $\approx -30\text{dB}. \text{ Se poate considera c\^a alibres este neglijabil\^a.}$

3. Echivalența sistemelor de bandă limitată prin metode
invariantei răspunsului la semnalul frecvență.

Considerăm $x_a(t) = \sigma(t)$ echivalentul său digital
 $x_d[n] = \sigma[n]$. Avem :

$$x_a(t) = \sigma(t) \iff X_a(s) = \frac{1}{s}$$

$$y_a(t) = h_a(t) * \sigma(t) \iff H_a(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$x_d[n] = \sigma[n] \iff X_d(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Putem aplica relația (19) pentru a găsi $H_d(z)$:

$$H_d(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\} (nT) \right\} \quad (41)$$

Dar $h_a(t) * \sigma(t) = \lambda_a(t)$ răspunsul ridicat al sistemului
analogic iar $h_d[n] * \sigma[n] = \lambda_d[n]$, răspunsul ridicat al
sistemului discret, echivalent. Relația (41) se poate transfor-
ma în :

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{H_d(z)}{1-z^{-1}} \right\} [n] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H_a(s)}{s} \right\} (nT)$$

adică :

$$\lambda_d[n] = \lambda_a(nT) \quad (42)$$

Relația (42) permite echivalența prin metode invariantei
răspunsului ridicat (răspunsul la semnalul frecvență).

Exemplu Revinem la exemplul circuitului RC din figura 8
pentru care răspunsul ridicat este - vezi în relația (38) :

$$A_a(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \delta(t) \tag{43}$$

Aplicând (42), sistemul digital echivalent este definit prin

$$A_d[n] = (1 - e^{-\frac{nT}{\tau}}) \delta[n] \tag{44}$$

El are răspunsul la impuls de formă:

$$h_d[n] = (e^{\frac{T}{\tau}} - 1) (e^{-\frac{nT}{\tau}} \delta[n] - \delta[n]) \tag{45}$$

Se vede că $h_d[n] \neq h_a(nT)$. Pentru $T/\tau \ll 1$ avem:

$$h_d[n] \approx \frac{T}{\tau} e^{-\frac{nT}{\tau}} \delta[n] - \frac{T}{\tau} \delta[n] \tag{46}$$

Dacă echivalăm circuitul RC prin metoda invariantei ^{răspunsului} la semnalul treaptă și dacă aplicăm celor două sisteme câte un impuls unitar, $\delta(t)$ respectiv $\delta[n]$ obținem $h_a(t)$ respectiv $h_d[n]$. Apare o eroare de echivalare $e(nT)$ de formă:

$$e(nT) = h_a(nT) - h_d[n] \approx \frac{T}{\tau} \delta[n], \quad \frac{T}{\tau} \ll 1 \tag{47}$$

Numai primul eșantion al erorii, $n=0$, este nenul.

4. Echivalarea sistemelor de bandă limitată prin metoda invariantei răspunsului la semnalul treaptă.

Considerăm acum că $x_a(t) = t \delta(t)$ și că $x_d[n] = n \delta[n]$

Avem:

$$x_a(t) = t \delta(t) \leftrightarrow X_a(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$x_d[n] = n \delta[n] \leftrightarrow X_d(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

și, conform relației (19) obținem:

$$H_d(z) = \frac{(1-z^{-1})^2}{z^{-1}} \cdot \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H_a(s)}{s^2} \right\} (nT) \right\} (z) \tag{48}$$

Relația (48) ne permite să determinăm sistemul numeric echivalent unui sistem analogic, dacă folosim transformarea invariante la răspunsul la semnalul treaptă.

Exemplu. Revenim la circuitul RC. Avem:

$$\frac{H_d(s)}{s^2} = \frac{\omega_0}{s^2(\omega_0 + s)} = \frac{\frac{1}{\omega_0}}{\omega_0 + s} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[t - \frac{1}{\omega_0} (1 - e^{-\omega_0 t}) \right] \sigma(t) = y_d(t); y_d(nT) = \left[nT - \frac{1}{\omega_0} (1 - e^{-n\omega_0 T}) \right] \sigma(n)$$

$$y_d[n] = \left[nT - \frac{1}{\omega_0} (1 - e^{-n\omega_0 T}) \right] \sigma[n]$$

Din (48) obținem:

$$H_d(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{z^{-1}} Z \left\{ \left[nT - \frac{1}{\omega_0} (1 - e^{-n\omega_0 T}) \right] \sigma[n] \right\} \quad (49)$$

Avem următoarele:

$$Tn\sigma[n] \leftrightarrow T \frac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$-\frac{1}{\omega_0} \sigma[n] \leftrightarrow -\frac{1}{\omega_0} \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\frac{1}{\omega_0} e^{-n\omega_0 T} \sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1}}$$

Cu acestea, (49) devine:

$$H_d(z) = T - \frac{1}{\omega_0} \frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}} + \frac{1}{\omega_0} \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{z^{-1}(1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1})} \quad (50)$$

Dar $\frac{1 - z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{1}{z^{-1}} - 1$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{z^{-2} - 2z^{-1} + 1}{-e^{-\omega_0 T} z^{-2} + z^{-1}} &= -e^{\omega_0 T} + \frac{(e^{\omega_0 T} - 2)z^{-1} + 1}{z^{-1}(1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1})} = \\ &= -e^{\omega_0 T} + \frac{1}{z^{-1}} + \frac{(e^{-\omega_0 T} - 1)^2}{e^{-\omega_0 T}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1}} \end{aligned}$$

Substituim în (50), și găsim că:

$$H_d(z) = T + \frac{1}{\omega_0} (1 - e^{\omega_0 T}) + \frac{e^{\omega_0 T}}{\omega_0} (e^{-\omega_0 T} - 1)^2 \frac{1}{1 - e^{-\omega_0 T} z^{-1}} \quad (51)$$

Dacă $\omega_0 T = \frac{T}{\delta} \ll 1$ atunci $e^{\omega_0 T} \approx 1 + \omega_0 T = 1 + \frac{T}{\delta}$ și deci (51) devine:

$$H_d(z) \approx T + \delta \left(1 - 1 - \frac{T}{\delta} \right) + \delta \left(1 + \frac{T}{\delta} \right) \left(\frac{T}{\delta} \right)^2 \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\delta}} z^{-1}}$$

sau:

$$H_d(z) \approx \tau \left(1 + \frac{T}{2}\right) \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}z^{-1}}} \quad (52)$$

Putem determina răspunsul la impulsul unitar al sistemului digital ce fiind, în condiția $T/\tau \ll 1$. Avem

$$H_d(z) \approx \tau \left(1 + \frac{T}{2}\right) \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 \frac{1}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}z^{-1}}} \longleftrightarrow$$

$$h_d[n] \approx \tau \left(1 + \frac{T}{2}\right) \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 e^{-\frac{T}{\tau}n} \sigma[n] \approx \tau \left(\frac{T}{\tau}\right)^2 e^{-\frac{T}{\tau}n} \sigma[n] \quad (53)$$

Cum însă, conform cu (36):

$$h_a(nT) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}n} \sigma[n] \quad (54)$$

apare o eroare $e(nT)$ de forma:

$$e(nT) \approx \frac{1}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}n} (1 - T^2) \sigma[n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

5. Ecvinalarea unui sistem ^{analogic} prin aproximarea ecuației diferențiale ce îl descrie, printr-o ecuație cu diferențe finite.

Vom porni de la exemplul circuitului RC, a cărui ecuație diferențială este dată de (33):

$$\tau \frac{dy_a(t)}{dt} + y_a(t) = x_a(t) \quad ; \quad \tau = RC = \frac{1}{\omega_0} \quad (33)$$

Putem aproxima derivata prin:

$$\left. \frac{dy_a(t)}{dt} \right|_{t=nT} \approx \frac{y_a(nT) - y_a(nT - T)}{T} = \frac{y_d[n] - y_d[n-1]}{T} \quad (55)$$

asa că avem:

$$\frac{\tau}{T} (y_d[n] - y_d[n-1]) + y_d[n] = x_d[n] \quad (56)$$

sau:

$$\left(\frac{\tau}{T} + 1\right) y[n] - \frac{\tau}{T} y[n-1] = x[n] \quad (57)$$

relație în care am renunțat la indicele "d".

Din relația (57) se deduce că :

$$H_d(z) = \frac{1}{\frac{\sigma}{T} + 1 - \frac{\sigma}{T} z^{-1}} = \frac{1}{1 + \sigma \frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (58)$$

Conform (34) avem, pentru sistemul analogic :

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + \rho \sigma} \quad (59)$$

Comparând (58) și (59) se deduce că :

$$H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} \quad (60)$$

În general avem :

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (61)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = s^k Y(s) \quad ; \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} = s^k X(s)$$

Se știe că :

$$\left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=mT} \approx \frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_p^k y[m-p] \quad (62)$$

Transformata Z a membrului drept fiind

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_p^k y[m-p] \right\} &= \frac{1}{T^k} \sum_{p=0}^k (-1)^p C_p^k (z^{-1})^p \cdot Y(z) \\ &= \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k Y(z) \end{aligned} \quad (63)$$

Am dedus că :

$$\frac{d^k y(t)}{dt^k} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} s^k Y(s) \quad (64)$$

$$\left. \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right|_{t=mT} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \left(\frac{1-z^{-1}}{T} \right)^k Y(z) \quad (65)$$

Din (61) rezultă că

$$H_a(s) = \frac{\sum_{k=0}^M G_k A^k}{\sum_{k=0}^N a_k A^k} \tag{66}$$

și, prin aproximarea derivatelor cu diferențe finite:

$$H_d(z) = \frac{\sum_{k=0}^M G_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k}{\sum_{k=0}^N a_k \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^k} \tag{67}$$

Rezultă imediat că, aproximând ecuația diferențială a sistemului analogic $H_a(s)$ cu o ecuație cu diferențe finite, sistemul digital rezultat este definit prin:

$$H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}} \tag{68}$$

asa cum am văzut și în exemplul anterior prezentat.

Transformarea dintre cele două planuri complexe este definită prin relațiile:

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} \tag{69} ; \quad z = \frac{1}{1-sT} \tag{70}$$

Dacă $z = x + jy = r e^{j\Omega}$ și $s = \sigma + j\omega$, din (70) rezultă

$$r = |z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma T)^2 + (\omega T)^2}} \tag{71}$$

Dacă $\sigma < 0$ $1 - \sigma T > 1$ și deci $(1 - \sigma T)^2 + (\omega T)^2 > 1$ sau $r < 1$.

Ca o consecință a planului $\sigma < 0$, se transformă în interiorul discului unitar; așa se întâmplă și în celelalte cazuri prezentate, motiv pentru care un sistem analogic stabil conduce la un sistem digital stabil.

Fie $s = j\omega$, axa imaginară din planul s . Avem:

$$z = x + jy = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1 + j\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

sau

$$x = \frac{1}{1 + (\omega T)^2} ; \quad y = \frac{\omega T}{1 + (\omega T)^2}$$

Prin împărțire obținem că $\frac{y}{x} = \omega T$ și substituind în prima relație rezultă

$$x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \Rightarrow x = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

Cum, în general $x \neq 0$ rezultă că

$$x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = (\frac{1}{2})^2 \tag{72}$$

ecuația unui cerc de centru $(\frac{1}{2}, 0)$ și rază $\frac{1}{2}$, așa cum se

arată în figura 10. Se vede, din această figură că :

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \Omega$$

Pe de altă parte, am dedus că același raport se poate exprima prin

$$\frac{y}{x} = \omega T$$

Se deduce că avem

$$\omega T = \operatorname{tg} \Omega \tag{73}$$

sau

$$\Omega = \arctg \omega T \tag{74}$$

Se poate arăta că semiplanul stâng, $\sigma < 0$, se transformă în interiorul cercului (72) iar semiplanul drept, $\sigma > 0$, se transformă în exteriorul aceluiași cerc.

Deoarece dorim să avem un sistem digital al cărui răspuns în frecvență să fie identic cu răspunsul în frecvență al sistemului analogic, ar fi necesar ca axa jws să se transforme în cercul $r=1$. În cazul de față nu e așa. Pentru valori $|\Omega| \ll \pi$ sau $|\Omega| \leq \pi/36$ diferențele dintre cercul (72) și cercul $r=1$ nu sunt prea mari. Dacă ω_M este frecvența maximă pentru $H_a(\omega)$, atunci e necesar să avem:

$$\omega_M T = \frac{1}{f_s} \Omega_M \approx \Omega_M \leq \frac{\pi}{36}$$

sau $\omega_e \geq 36 \cdot 2\omega_M$. Cum teorema de esantionare cere $\omega_e' \geq 2\omega_M$, la limita $\omega_e = 36\omega_e'$. Frecventa de discretizare in timp este foarte mare, motiv pentru care metoda de echantilare se poate face bine putandu-se modela aceste sisteme de joasa frecventa (electromecanice).

6. Echantilarea unui sistem analogic prin metoda transformării Biliinare.

Vom pleca de la un exemplu. Fie un sistem analogic descris de ecuatia diferentiale

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) \tag{75}$$

Ea poate fi transformata in ecuatia integrala de forma:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \tag{76}$$

Sistemul analogic corespunzator are functia sistem:

$$H_a(s) = \frac{1}{s} \tag{77}$$

Consideram ca semnalul $x(t)$ este ca in figura 11. Daca

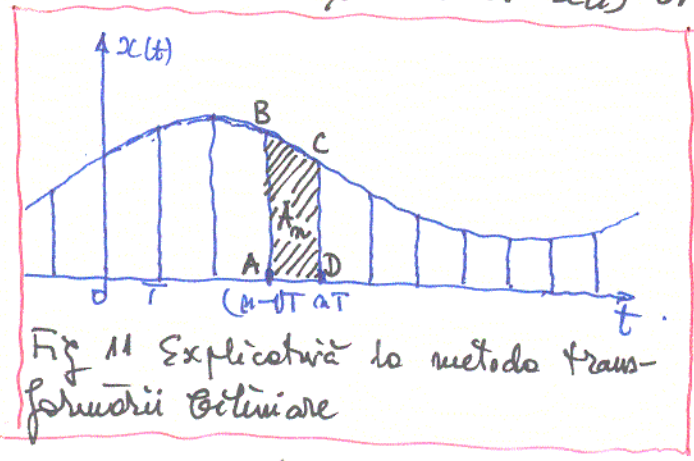


Fig 11 Explicativ la metoda transformării Biliinare

A_m este aria trapezului ABCD, aria ce aproximeaza integrala

$$I_m = \int_{(n-1)T}^{nT} x(\tau) d\tau$$

atunci

$$I_m \approx \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2}$$

sau :

$$I_m \approx \frac{[x(nT) + x(nT-T)]T}{2} \tag{78}$$

Dar

$$y(nT) - y(nT-T) = I_m$$

sau

$$y[n] - y[n-1] \approx \frac{T}{2} (x[n] + x[n-1]) \tag{79}$$

Renunțând la termenul "aproximativ" și înlocuindu-l cu "egal", ecuația (79) definește un sistem digital având funcția sistem

$$H_d(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{80}$$

Comparând (79) și (80) deducem că

$$H_d(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \tag{81}$$

Concluzia poate fi generalizată deoarece orice ecuație diferențială se poate transforma în ecuație integrată, integrând de N ori. Procedând ca mai înainte se poate arăta că (81) este o relație general valabilă. Transformările

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{82}$$

și

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \tag{83}$$

leagă punctele din cele două planuri complexe, s și z și definesc așa numita transformare biliniară.

Fie $s = j\omega$. Rezultă, din (83):

$$z = \frac{1 + \frac{j\omega T}{2}}{1 - \frac{j\omega T}{2}} = 1 \cdot e^{j2 \arctan \frac{\omega T}{2}} = r e^{j\Omega} \tag{84}$$

Asem

$$|z| = 1 \text{ și } \Omega = 2 \arctan \frac{\omega T}{2}$$

Arca imaginară $j\omega$ se transformă în cercul unitar, $r=1$ iar legătura între ω și Ω este:

$$\omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega}{2} \text{ ; } \Omega = 2 \arctan \frac{\omega T}{2} \tag{85}$$

În figura 11 se arată dependența dintre ω și Ω . În octantul auferitor un segment de lungime $2\pi/T$ al axei imaginare $j\omega$ se transformă într-o tură pe cercul unitar. De această dată o tură completă pe cercul unitar, $\Omega \in [-\pi, \pi]$ apare doar pentru

ω mergând de la $-\infty$ la $+\infty$. Nu se produc, în consecință,

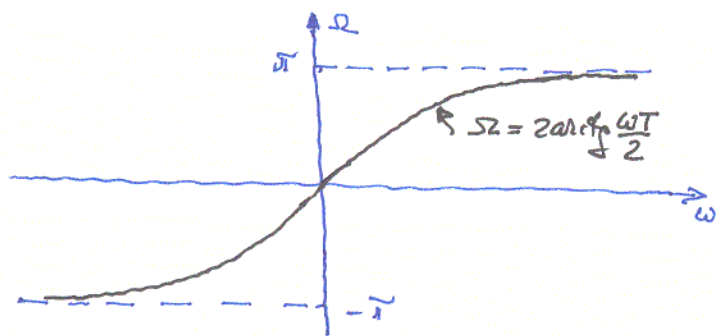


Fig 11. Când ω crește de la $-\infty$ la $+\infty$, Ω crește de la $-\pi$ la π . Toată axa ω se transformă într-o mișcare tură pe cercul unitar, $r=1$.

eroari cauzate de altele decât apar deformații ale răspunsurilor de frecvență pentru valori mari ale lui ω , ca urmare a "compresiunii" axei reale ($\omega \in \mathbb{R}$) în intervalul $[-\pi, \pi]$

Pentru valori $|\frac{\Omega}{2}| \leq \frac{\pi}{36}$

regăsim relația:

$$\Omega \approx \omega T \tag{86}$$

În consecință portanțele de joasă frecvență din răspunsurile în frecvență sunt corect reprezentate. În figura 12 se arată deformațiile

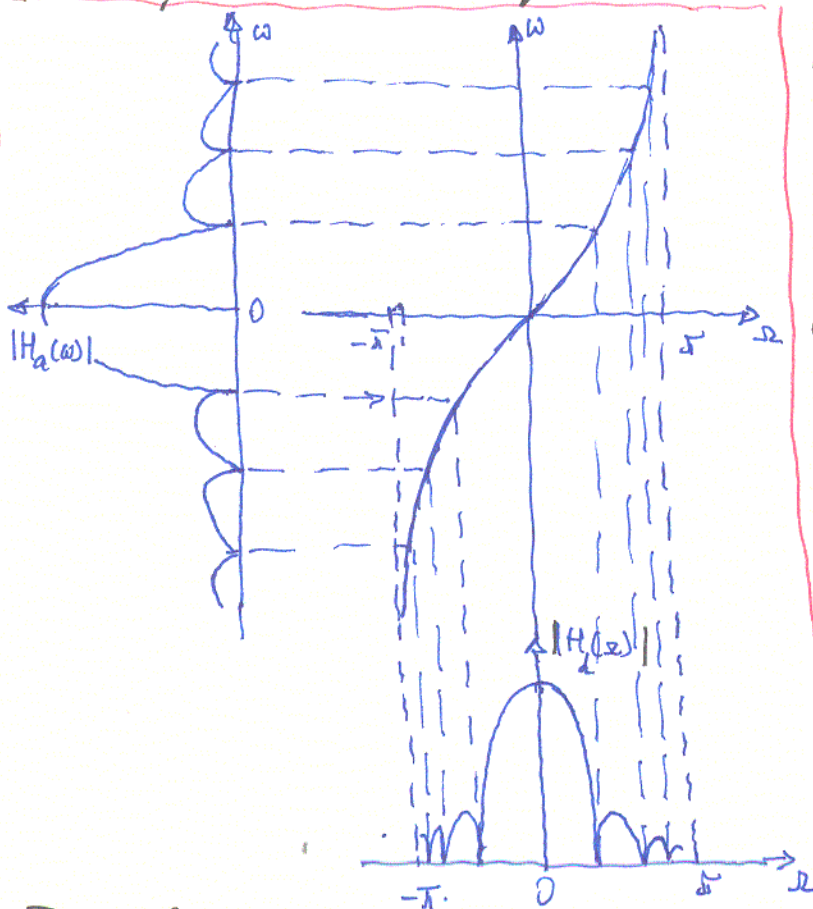


Fig 12 Caracteristicile $H_d(z)$ se deformează la frecvențe ω mari, ca urmare a legăturii puternic neliniare dintre ω și Ω .

ale răspunsului $H_d(z)$, în raport cu $H_a(\omega)$, ca urmare a legăturii puternic neliniare dintre ω și Ω .

Vom remorca, pornind de la formula (83), cu

$\lambda = \sigma + j\omega$, că avem:

$$z = \frac{(1 + \frac{T\sigma}{2}) + j\frac{\omega T}{2}}{(1 - \frac{T\sigma}{2}) - j\frac{\omega T}{2}} \tag{87}$$

sau că:

$$|z| = \frac{\sqrt{(1 + \frac{T\sigma}{2})^2 + (\frac{\omega T}{2})^2}}{\sqrt{(1 - \frac{T\sigma}{2})^2 + (\frac{\omega T}{2})^2}} \tag{88}$$

Pentru $\sigma < 0$ numitorul este mai mare decât nu-

meritorul și deci $|z| < 1$. Semiplanul stâng, $\sigma < 0$, se transformă în interiorul discului unitar, $|z| < 1$. Pentru $\sigma > 0$, nu-

numitorul este mai mare decât numitorul, așa că $r > 1$.
Simplificăm drept, $\sigma > 0$, se transformă în exteriorul discului unitar, $r > 1$.

Exemplu Pentru circuitul RC avem:

$$H_d(z) = \frac{1}{1 + \lambda \bar{\sigma}} \Big|_{\lambda = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1+z^{-1}}{\left(\frac{2\bar{\sigma}}{T} + 1\right) - \left(\frac{2\bar{\sigma}}{T} - 1\right)z^{-1}}$$

Se efectuează împărțirea și ajungem la:

$$H_d(z) = -\frac{1}{\frac{2\bar{\sigma}}{T} - 1} + \frac{4 \frac{\bar{\sigma}}{T}}{\left(\frac{2\bar{\sigma}}{T}\right)^2 - 1} \frac{1}{1 - \left(\frac{\frac{2\bar{\sigma}}{T} - 1}{\frac{2\bar{\sigma}}{T} + 1}\right) z^{-1}}$$

dar cum $\frac{\bar{\sigma}}{T} \gg 1$ relația se poate simplifica:

$$H_d(z) \approx -\frac{T}{2\bar{\sigma}} + \frac{T}{\bar{\sigma}} \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{T}{\bar{\sigma}}\right) z^{-1}}$$

Se deduce imediat că avem:

$$h_d[n] \approx -\frac{T}{2\bar{\sigma}} \delta[n] + \frac{T}{\bar{\sigma}} \cdot \left(1 - \frac{T}{\bar{\sigma}}\right)^n \sigma[n]$$

Dar

$$h_a(nT) = \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(e^{-\frac{T}{\bar{\sigma}}}\right)^n \sigma(nT) \approx \frac{1}{\bar{\sigma}} \cdot \left(1 - \frac{T}{\bar{\sigma}}\right)^n \sigma(nT)$$

Se vede imediat că

$$h_a(nT) \neq h_d[n]$$

dar că

$$T h_a(nT) = h_d[n], \quad n \geq 1.$$

Pentru $n=0$ avem:

$$T h_a(0) = \frac{T}{\bar{\sigma}} \quad h_d[0] \approx -\frac{T}{2\bar{\sigma}} + \frac{T}{\bar{\sigma}} = \frac{T}{2\bar{\sigma}}$$

Pentru a determina propriumul în frecvență, se știe că

$$a^n \sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - a e^{-j\omega T}}, \quad a \in (0, 1) \text{ are un maxim de valoare}$$

$\frac{1}{1-a}$ la $\omega = 0$ și un minim de valoare $\frac{1}{1+a}$ la $\omega = \pm \bar{\omega}$.

În cazul de față avem un sistem de ordinul 1, ponderat cu $\frac{T}{\bar{\sigma}}$ și $a = 1 - \frac{T}{\bar{\sigma}} \in (0, 1)$ și deplasat cu $-\frac{T}{2\bar{\sigma}}$. Maximul va avea deci valoarea:

$$|H_d(\omega)| \approx -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{T}{\epsilon} \frac{1}{1 - (1 - \frac{T}{\epsilon})} = 1 - \frac{T}{2\epsilon} \approx 1.$$

Minimul este

$$|H_d(\pi)| \approx -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{T}{\epsilon} \frac{1}{1 + (1 - \frac{T}{\epsilon})} \approx -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{T}{2\epsilon} = 0.$$

Fie

$$\Omega_0 = 2 \arctan \omega_0 T / 2 = 2 \arctan \frac{T}{2\epsilon} \approx 2 \frac{T}{2\epsilon} = \frac{T}{\epsilon} = \omega_0 T = \frac{T}{\epsilon}$$

$$|H_d(\Omega_0)| \approx \left| -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{T}{\epsilon} \frac{1}{|1 - (1 - \frac{T}{\epsilon})e^{-j\Omega_0 T}|} \right| \approx \left| -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{T}{\epsilon} \frac{1}{|1 - (1 - \frac{T}{\epsilon})(1 - j\frac{T}{\epsilon})|} \right|$$

$$|H_d(\Omega_0)| \approx \left| -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{T}{\epsilon} \frac{1}{\frac{T}{\epsilon} |1 + j|} \right| = \left| -\frac{T}{2\epsilon} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{T}{2\epsilon} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|H_d(\Omega_0)| \approx |H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

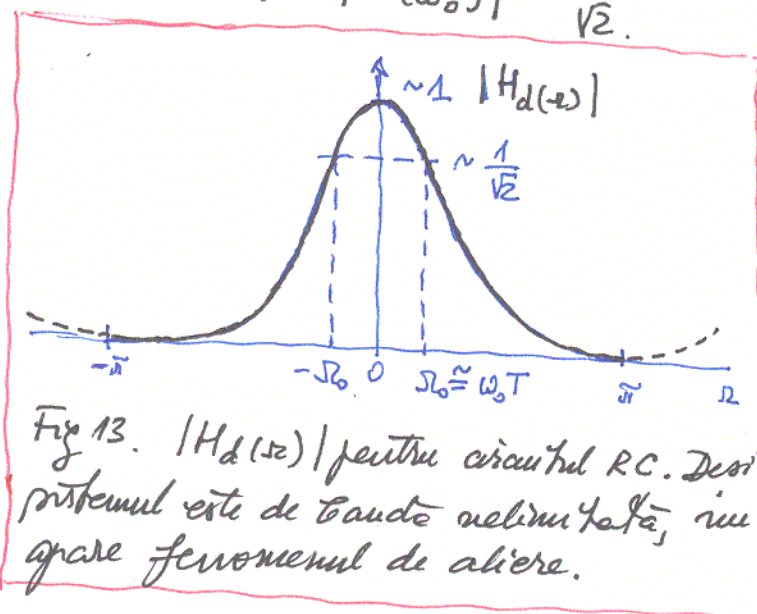


Fig 13. $|H_d(\Omega)|$ pentru circuitul RC. Desi sistemul este de banda nelimitata, nu apare fenomenul de aliere.

In figura 13 se proiecta $|H_d(\Omega)|$. Desi sistemul analogic este de banda nelimitata, nu apare fenomenul de aliere, ce consta in formarea unor lobi in ecorul $[-\pi, \pi]$

in prevezul digital este periodic cu perioada 2π . Aceasta nu are de a face cu fenomenul de aliere.

in prevezul digital, Raspunsul sistemului di-