10. TRANSFORMAREA Z

10.1 Răspunsul unui sistem discret liniar şi invariant în timp la exponenţiala complexă discretă de modul neunitar

Vom nota variabila complexă cu:

$$z = x + j \cdot y = r \cdot e^{j\Omega} \quad ; \quad x \, , \, y \in \mathbb{R} \quad . \tag{10.1}$$

unde evident: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şi $\Omega = arg\,(z)$. Răspunsul unui SLIT discret la exponenţiala $z_o^n = r_o^n \cdot e^{\Omega_o n}$ se poate calcula cu relaţia:

$$y[n] = h[n] * z_o^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_o^{n-k} = z_o^n \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z_o^{-k} \quad , \tag{10.2}$$

în ipoteza că seria este convergentă. Se introduce notaţia:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k} \quad . \tag{10.3}$$

Funcţia H(z), în măsura în care suma (10.3) există, este dependentă numai de răspunsul la impuls al sistemului, h[n], şi în anumite condiţii caracterizează sistemul. Cu notaţia (10.3) relaţia (10.2) devine:

$$y[n] = z_o^n \cdot H(z_o) \quad , \tag{10.4}$$

şi arată că z_o^n este o funcţie proprie a SLIT discret, valoarea proprie ataşată fiind $H(z_o)$. Pentru cazul în care semnalul de intrare este de forma:

$$x[n] = \sum_k c_k z_k^n \quad , \tag{10.5}$$

răspunsul sistemului se calculează cu:

$$y[n] = \sum_k c_k H(z_k) \, z_k^n \quad . \tag{10.6}$$

Se relevă importanţa unei funcţii având forma (10.3) pentru studiul SLIT discrete.

10.2. Transformarea Z bilaterală

Fie x[n] un semnal discret aperiodic. Prin definiție, transformata Z bilaterală a semnalului x[n] dat este funcția X(z) :

$$Z\{x[n]\}(z) = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cdot z^{-n} \quad ; \quad z = r\cdot e^{j\Omega} \quad , \quad r \geq 0 \ . \qquad (10.7)$$

Se poate face imediat o legătură între transformata Z și transformata Fourier în timp discret. Substituind forma polară a lui z în relație, rezultă:

$$Z\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]\cdot r^{-n}\right)\cdot e^{-j\Omega n} = \mathscr{F}\{r^{-n}\cdot x[n]\}(\Omega) \ ; \ r \geq 0 \ . \qquad (10.8)$$

Dacă se evaluează transformata Z pentru $|z| = r = 1$, se obține:

$$Z\{x[n]\}\left(e^{j\Omega}\right) = \mathscr{F}\{x[n]\}(\Omega) \ . \qquad (10.9)$$

Transformata Z evaluată pe cercul unitar (de rază r = 1) din planul complex z=x+jy este transformata Fourier în timp discret a semnalului. Acesta este motivul pentru care în unele lucrări de specialitate se utilizează notația $X\left(e^{j\omega T_e}\right)$.

Pentru ca X(z) definită prin relația (10.7) să existe, este necesar ca:

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{-n}x[n]|\cdot|e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |r^{-n}x[n]| < \infty \ .$$

deci $r^{-n}x[n] \in \ell^1$.

Exemple:

1. *Vom considera semnalul discret cauzal* $x[n] = a^n\sigma[n]$, $|a| < 1$. *Transformata Z a acestuia este, conform definiției:*

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a z^{-1}\right)^n \ .$$

Dacă $|az^{-1}| < 1$, *convergența transformatei este asigurată. În acest caz:*

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a| \ . \qquad (10.10)$$

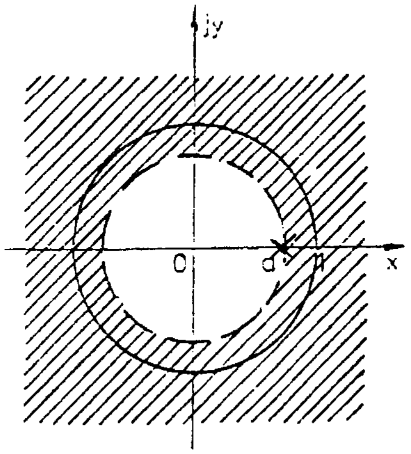

Fig.10.1 Domeniul de convergență al transformatei X(z) pentru semnalul cauzal.

Valorile variabilei complexe z *pentru care* $X(z)$ *există (seria ce o definește este convergentă) formează domeniul de convergență (DC) al transformatei. În exemplul discutat, toate numerele complexe de modul mai mare decât* $|a|$ *formează domeniul de convergență al transformatei. El este, așa cum rezultă și din figura 10.1, exteriorul discului de rază* $|a|$.

Dacă cercul unitar se găsește în DC, atunci există și transformata Fourier în timp discret. Ea se obține substituind z *cu* $e^{j\Omega}$.

În exemplul considerat, cercul unitar este din DC și deci există:

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} .$$

2. *Fie acum semnalul discret anticauzal* $x[n] = - a^n \sigma[-n-1]$. *Transformata Z bilaterală a semnalului este:*

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{az^{-1}}\right)^n = -\frac{1}{az^{-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a\cdot z^{-1}}\right)^n .$$

Dacă $\dfrac{1}{|a|\,|z^{-1}|} < 1$, $X(z)$ *există și este:*

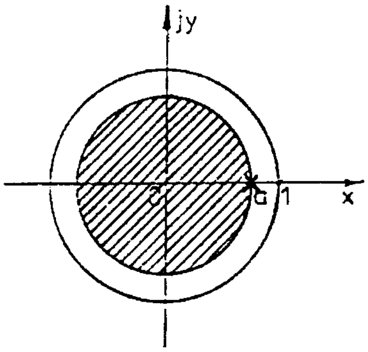

Fig.10.2 DC al transformatei semnalului anticauzal.

$$X(z) = -\frac{1}{az^{-1}\left(1 - \dfrac{1}{az^{-1}}\right)} = \frac{1}{1 - az^{-1}} ;$$

$$|z| < |a| . \tag{10.11}$$

Domeniul de convergență al transformatei bilaterale este interiorul discului de rază $|a|$ *- figura 10.2. Dacă cercul unitar nu este din DC (cazul exemplificat în figura 10.2) nu există transformată Fourier a semnalului.*

Analizând comparativ (10.10) și (10.11), se constată că cele două transformate Z bilaterale, deși aparțin unor semnale complet diferite au aceleași expresii. Domeniile lor de convergență nu sunt însă aceleași.

Cele două exemple subliniază importanța precizării domeniului de convergență al transformatei Z bilaterale.

10.2.1 Proprietățile domeniului de convergență al transformatei Z bilaterale

Transformata Z bilaterală există acolo unde există transformata Fourier în timp discret a semnalului $x[n]r^{-n}$, $r = |z|$. Cum condiția de existență este independentă de Ω - depinde numai de $r = |z|$ - rezultă:

1. **Domeniul de convergență al transformatei Z bilaterale este o coroană circulară a planului Z, centrată în origine.**

Punctele z_p pentru care $\lim_{z \to z_p} X(z) = \infty$ se numesc polii lui $X(z)$. Dar în poli, tranformata nu este convergentă, deci:

2. **Domeniul de convergență al transformatei Z bilaterale nu poate conține nici un pol al acesteia.**

Fie un semnal x[n] de durată finită. Pentru el, transformata este:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n] z^{-n} \quad ; \quad 0 < |z| < \infty \quad .$$

Dacă $n_1 < 0$, apar în X(z) puteri pozitive ale lui z și în consecință, punctul de la infinit ($z = \infty$) nu face parte din DC. Dacă $n_2 > 0$, apar puteri negative ale lui z și $z = 0$ nu este din DC. Semnalele discrete cauzale de durată finită au în consecință transformata olomorfă în tot planul, cu excepția originii. Se poate enunța:

3. **Dacă x[n] este un semnal cu suportul de durată finită, X(z), transformata sa bilaterală există în tot planul, cu excepția eventual a punctelor $z = 0$ și/sau $z = \infty$.**

Fie un semnal x[n] cu suportul nemărginit spre dreapta. $x[n] = 0$, pentru orice $n < n_1$. Transformata sa bilaterală este:

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad .$$

Dacă $n_1 < 0$, seria modulelor se scrie ca o sumă de două sume:

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} |x[n] z^{-n}| = \sum_{n=n_1}^{-1} |x[n] z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x[n] z^{-n}| \quad ; \quad |z| = r \quad , \quad n_1 < 0 \quad .$$

Primul termen nu pune problema de convergență, el eliminând din DC doar punctul de la infinit. Al doilea termen conține numai puteri negative și vom nota raza sa de convergență cu R_-. Dacă r_0 este raza unui cerc inclus în DC, atunci toate punctele din plan $|z| \geq r_0$ sunt din DC. Demonstrația este imediată: $|x[n]z^{-n}| \leq |x[n]|\,r_0^{-n}$ și cum $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]|\,r_0^{-n} < \infty$ prin ipoteză, rezultă că și $\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty$. Raza de convergență R_- poate fi determinată cu relația:

$$R_- = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x[n+1]}{x[n]} \right| \quad . \qquad (10.12)$$

Dacă $n_1 \geq 0$, semnalul este cauzal și punctul de la infinit rămâne în DC.

Deoarece avem de obicei de-a face cu transformate de tip fracție rațională, nu este necesară calcularea razei R_-, ea rezultând din plasarea polilor.

Concluzia pe care o desprindem este:

4. **Dacă x[n] este un semnal cu întindere spre dreapta și dacă cercul $|z| = r_0$ este din DC al transformatei Z bilaterale, atunci toate punctele din plan $|z| > r_0$, cu excepția eventual a punctului de la infinit, sunt din DC.**

Semnalele cu suportul nemărginit și întins spre stânga, ceea ce înseamnă că $x[n] = 0$, $n > n_2$ au transformata Z bilaterală:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]\,z^{-n} \quad .$$

Seria modulelor, pentru $n_2 > 0$ este:

$$\sum_{n=-\infty}^{n_2} |x[n]z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{0} |x[n]z^{-n}| + \sum_{n=1}^{n_2} |x[n]z^{-n}| \quad .$$

Al doilea termen este convergent cu excepția punctului $z = 0$. Primul termen, ce conține numai puteri pozitive ale lui z, are raza de convergență R_+, calculabilă cu relația:

$$R_+ = \lim_{n \to -\infty} \left| \frac{x[n]}{x[n+1]} \right| \quad . \qquad (10.13)$$

Dacă r_0 este raza unui cerc inclus în DC, atunci, pe baza criteriului comparației:

aplicat primei sume, toate punctele din plan $|z| \le r_0$ sunt din DC. Prin urmare:

5. **Dacă x[n] este un semnal cu întindere spre stânga şi dacă cercul $|z| = r_0$, este inclus în DC al transformatei Z bilaterale atunci toate punctele din plan $|z| \le r_0$, cu excepţia eventual a punctului din origine, sunt din DC.**

Cazul cel mai general este cel al semnalelor cu întindere de la $-\infty$ la ∞. Pentru aceste semnale se scrie:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} \ .$$

Prima sumă este transformata unui semnal cu întindere spre dreapta. Ea are raza de convergenţă R_- şi DC corespunzător este $|z| > R_-$. Al doilea termen este transformata unui semnal cu întindere spre stânga. Raza sa de convergenţă, R_+, delimitează un DC definit prin $|z| < R_+$. Dacă $R_- < R_+$, cele două domenii de convergenţă au intersecţia nevidă şi ambele sume sunt convergente. Este în consecinţă convergentă transformata Z bilaterală X(z) . De importanţă practică este afirmaţia:

6. **Dacă x[n] este un semnal cu întindere de la $-\infty$ la ∞ şi dacă cercul $|z| = r_0$ este inclus în DC al transformatei Z bilaterale, atunci acesta este o coroană circulară ce include cercul $|z| = r_0$.**

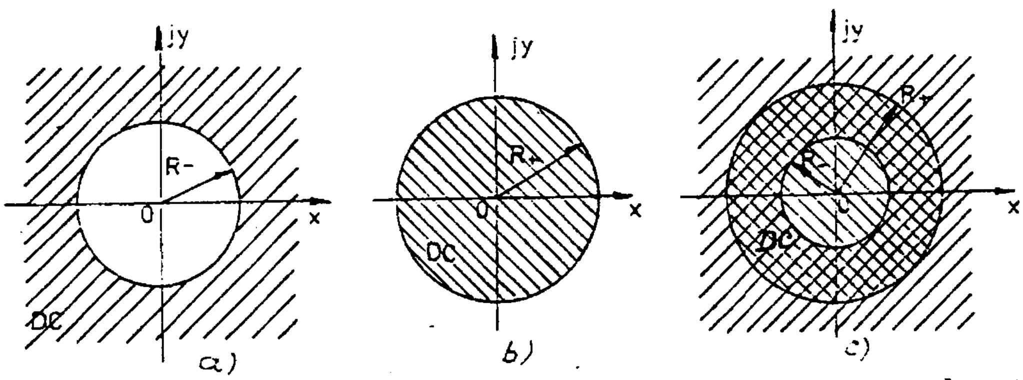

Fig. 10.3 Domeniul de convergenţă al unui semnal cu întindere: (a) spre dreapta, (b) spre stânga, (c) de la $-\infty$ la ∞ .

De obicei DC se stabileşte după dispunerea polilor în constelaţia de poli şi zerouri şi după sensul de întindere al semnalului, aplicând cele 6 reguli enunţate.

În figura 10.3 se prezintă cele 3 tipuri de domenii de convergenţă:

Exemplu *Vom considera semnalul cu întindere de la la $-\infty$ la $+\infty$, $x[n] = a^{|n|}$, $0<a<1$. El poate fi scris ca suma dintre semnalul cauzal $x_1[n] = a^n\sigma[n]$ şi semnalul* *anticauzal* $x_2[n] = a^{-n}\sigma[-n-1]$. *Conform exemplelor anterioare :*

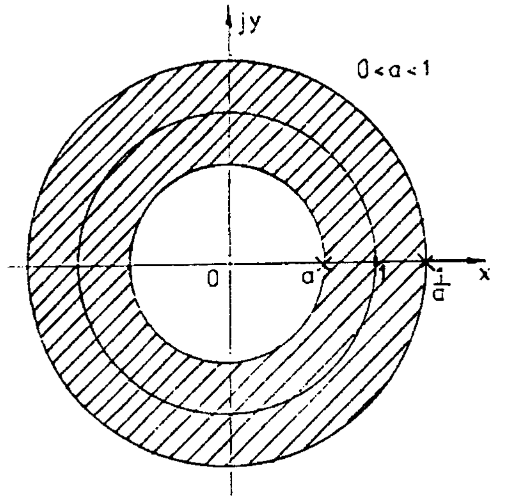

Fig.10.4 DC al semnalului cu întindere de la -∞ la +∞ .

$$a^n\,\sigma[n] \longrightarrow \frac{1}{1-a z^{-1}}\ ,\quad |z| > a\ .$$

și:

$$a^{-n}\,\sigma[-n-1] = \left(\frac{1}{a}\right)\sigma[-n-1] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{-1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\ ,\quad |z| < \frac{1}{c}\ .$$

În consecință:

$$a^{|n|} \longrightarrow \frac{a^2-1}{a}\,\frac{z}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}\ ;$$

$$a < |z| < \frac{1}{a}\ .$$

Polii transformatei sunt $z = a$ și $z = 1/a$. Singura coroană circulară (DC este ***numai o coroană circulară****, semnalul fiind cu întindere de la -∞ la +∞) ce nu conține poli este tocmai $a < |z| < 1/a$ - vezi și figura 10.4.*

10.2.2 Transformarea Z inversă

Transformarea Z directă a asociat unui semnal discret x[n] o funcție X(z) prin relația 10.7), unde $z \in DC$. Transformarea Z inversă urmărește recuperarea semnalului din expresia transformatei Z bilaterale X(z), valorile z fiind din DC.

Considerăm un contur închis inclus în DC (de obicei un cerc cu centrul în origine). Transformata directă:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot z^{-k}\ ,\quad z \in DC$$

se înmulțește cu z^{n-1} și se integrează pe cercul Γ :

$$\oint_\Gamma X(z)\,z^{n-1}dz = \oint_\Gamma\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,z^{n-k-1}\right)dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\oint_\Gamma\frac{dz}{z^{k-n+1}}\ ;\quad \Gamma \in DC\ . \qquad (10.14)$$

Se știe însă că pentru orice funcție f(z) olomorfă în DC și orice curbă închisă.

Γ, din DC avem:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi j}{n!} \frac{d^n}{dz^n} f(z) \quad , \qquad (10.15)$$

punctul a fiind unul oarecare din planul complex, interior curbei. În particular f(z)=1 este olomorfă în tot planul deci şi în DC, iar a = 0 este interior cercului considerat în relaţia 10.14). În consecinţă:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^{(n-k)+1}} = \begin{cases} \frac{2\pi j}{0!} \cdot 1 & , n = k \\ 0 & , n \neq k \end{cases} \quad , \quad 0! = 1 \quad . \qquad (10.16)$$

Relaţia 10.14) devine deci:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz \quad ; \quad \Gamma \subset DC \quad , \qquad (10.17)$$

şi defineşte transformarea Z inversă:

$$Z^{-1}\{X(z)\}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz = x[n] \quad ; \quad \Gamma \subset DC \quad . \qquad (10.17')$$

Se obişnuieşte să se spună că transformarea Z bilaterală defineşte o pereche semnal-transformată şi se scrie:

$$x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \quad , \qquad (10.18)$$

specificarea Z fiind de obicei omisă.

10.2.3 Definirea transformatei z bilaterale prin constelaţia de poli şi zerouri

Dacă transformata bilaterală X(z) este o fracţie raţională, ea poate fi pusă sub forma :

$$X(z) = k \frac{\prod_{k=1}^{M} (z - z_{ok})}{\prod_{k=1}^{N} (z - z_{pk})} \quad ; \quad z \in DC \quad . \qquad (10.19)$$

Această relaţie ne arată că este suficientă cunoaşterea polilor z_{pk} şi a zerourilor z_{ok} pentru ca X(z) să fie determinată în domeniul de convergenţă, cu excepţia unei constante multiplicative k. Dacă se cunoaşte $X(z_0)$, z_0 din DC, se poate determina şi constanta k.

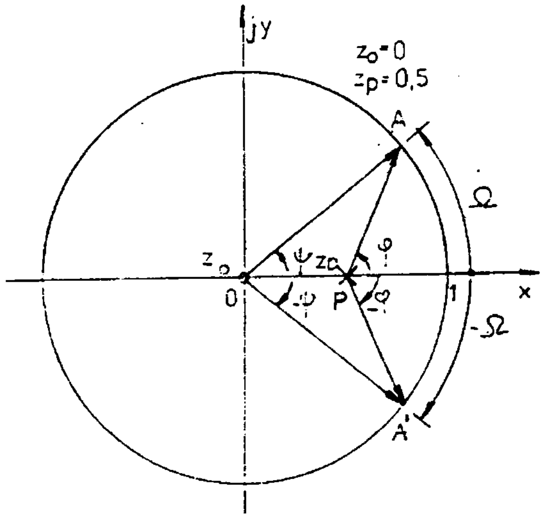

Fig.10.5 CPZ al unei transformate Z bilaterale.

Fie spre exemplu constelaţia de poli şi zerouri din figura 10.5. cu $z_0 = 0$ şi $z_p=0{,}5$. Transformata X(z) , considerând k=1 , este:

$$X(z) = \frac{z}{z-0{,}5} = \frac{1}{1-0{,}5z^{-1}} .$$

Ea singură, ca transformată bilaterală, nu spune încă nimic despre semnal. Dacă însă precizăm că semnalul x[n] <—> X(z) este de tip cauzal (cu întindere spre dreapta), atunci $|z| > |z_p| = 0{,}5$ defineşte DC.

In acest caz, cum cercul unitar este în DC, există şi transformata Fourier în timp discret:

$$X(\Omega) = X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - 0{,}5} = \frac{1}{1-0{,}5\,e^{-j\Omega}} .$$

Este posibilă şi determinarea grafică a modulului $|X(\Omega)|$ şi a fazei $\Phi(\Omega)=\mathrm{Arg}X(\Omega)$. Fie punctul A de pe cercul unitar, plasat la unghiul Ω (lungimea arcului de cerc în radiani). Atunci:

$$|X(\Omega)| = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{AP}|} \quad ; \quad \Phi(\Omega) = \psi - \varphi .$$

În cazul general, dacă z_{pk} şi z_{ok} sunt punctele din plan (afixele) corespunzătoare tuturor polilor şi zerourilor, atunci:

$$X(\Omega) = |k|\,\frac{\prod_{k=1}^{M}|\overline{Az_{ok}}|}{\prod_{k=1}^{N}|\overline{Az_{pk}}|}\,e^{j\Phi(\Omega)} \; ; \; \Phi(\Omega) = \mathrm{Arg}k + \sum_{k=1}^{M}\psi_k - \sum_{k=1}^{N}\varphi_k . \qquad (10.20)$$

Frecvenţa Ω reprezintă lungimea arcului de cerc măsurată în radiani, pe cercul unitar, de la intersecţia acestuia cu semiaxa $x > 0$ şi pînă în punctul A, sensul fiind cel trigonometric.

10.3 Transformata Z unilaterală

Transformarea unilaterală a unui semnal discret x[n] este definită prin:

$$Z_u\{x[n]\}(z) = X_u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad . \qquad (10.21)$$

Domeniul de convergență ai transformatei unilaterale este fie tot planul, fie exteriorul unui disc cu centrul în origine. Acest fapt rezultă imediat din aceea că $X_u(z) = X(z)$, transformata bilaterală a unui semnal cauzal.

Dacă se lucrează numai cu sisteme și semnale cauzale, este suficientă utilizarea transformării unilaterale. După cum s-a văzut, utilizăm de multe ori semnale necauzale pentru care este aplicabilă numai transformarea Z bilaterală. Pentru semnalele și sistemele cauzale, cele 2 transformate sunt egale, motiv pentru care vom omite uneori indicele "u" ce marchează în mod expres caracterul unilateral al transformării.

Transformarea inversă se efectuează utilizând tot relația de calcul 10.17), domeniul de convergență DC fiind unul particular.

În încheiere menționăm că transformarea Z unilaterală este indicată pentru studiul sistemelor cauzale caracterizate de ecuații cu diferențe finite, liniare și cu coeficienți constanți și care nu au condiții inițial nule.

10.4 Proprietăți ale celor două tipuri de transformări Z

Vom face notațiile:

$$x[n] \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad X(z) \ , \ z \in DC_x \ ; \ x[n] \quad \overset{Z_u}{\longleftrightarrow} \quad X_u(z)$$

$$y[n] \quad \overset{Z}{\longleftrightarrow} \quad Y(z) \ , \ z \in DC_y \ ; \ y[n] \quad \overset{Z_u}{\longleftrightarrow} \quad Y_u(z) \ .$$

1. <u>Liniaritate și omogenitate</u> Din relațiile ce definesc transformările rezultă imediat că:

$$a\,x[n] + b\,y[n] \ \longleftrightarrow \ a\,X(z) + b\,Y(z) \ ; \ z \in DC_x \cap DC_y \ , \ cel\ putin$$

$$a\,x[n] + b\,y[n] \ \longleftrightarrow \ a\,X_u(z) + b\,Y_u(z)$$

$$(10.22)$$

Este posibil ca domeniul de convergență al transformatei sumei semnalelor să fie mai cuprinzător decât intersecția celor 2 domenii, ca urmare a simplificării unor poli prin zerouri ce se introduc. De altfel e cunoscut că suma a 2 serii convergente este convergentă dar nu e imposibil ca suma a 2 serii divergente să fie totuși convergentă.

2. <u>Translația în timp</u> Pentru $x[n-n_0]$ se calculează:

$$Z\{x[n-n_o]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_o]\,z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,z^{-(m+n_o)} = z^{-n_o}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,z^{-m}$$

$$x[n-n_o] \;\longleftrightarrow\; z^{-n_o}X(z) \quad , \quad z \in DC \quad . \qquad (10.23')$$

Dacă $n_0 > 0$, $z = 0$ se elimină din DC, iar dacă $n_0 < 0$, $z = \infty$ se elimină din DC.

Dacă se consideră aplicarea transformării unilaterale, pentru $n_0>0$ rezultă:

$$Z_u\{x[n-n_o]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-n_o]z^{-n} = \sum_{m=-n_o}^{\infty} x[m]z^{-m}z^{-n_o} = z^{-n_o}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m} + \sum_{m=-n_o}^{-1} x[m]z^{-m}\right),$$

sau:

$$x[n-n_o] \;\longleftrightarrow\; z^{-n_o}\left(X_u(z) - \sum_{n=-n_o}^{-1} x[n]z^{-n}\right) \quad , \quad n_o > 0 \quad . \qquad (10.23'')$$

Dacă semnalul deplasat este cauzal, $x[n] \equiv 0$, $n < 0$, relația 10.23") devine formal identică cu 10.23').

3. <u>Modularea în timp</u> Considerăm semnalul $e^{j\Omega_o n}x[n]$:

$$Z\{e^{j\Omega_o n}x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_o n}x[n]\,z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(e^{-j\Omega_o}z\right)^{-n} \quad .$$

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \;\longleftrightarrow\; X\left(e^{-j\Omega_o}z\right) \quad , \quad z \in DC \quad . \qquad (10.24')$$

Domeniul de convergență al transformatei semnalului modulat este același cu al semnalului inițial. Multiplicarea cu $e^{-j\Omega}$ a variabilei z nu modifică raza polilor ci numai unghiul lor. Cum simetria DC este circulară, această modificare de unghi nu modifică DC.

În mod similar se ajunge, pentru transformata unilaterală la:

$$e^{j\Omega_o n}x[n] \;\longleftrightarrow\; X_u\left(e^{-j\Omega_o}z\right) \quad . \qquad (10.24'')$$

Se poate stabili o relație de natură mai generală, modulând cu z_0^n , $|z_0|$ diferit de 1 :

$$Z\{z_o^n x[n]\} \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_o^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{z_o}\right)^n \quad ;$$

$$z_o^n x[n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X\left(\frac{z}{z_o}\right) \qquad \frac{z}{z_o} \in DC \quad ; \qquad (10.25')$$

$$z_o^n x[n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X_u\left(\frac{z}{z_o}\right) \quad . \qquad (10.25'')$$

4. **Reflectarea semnalului** Deoarece reflectatul unui semnal cauzal este un semnal anticauzal, nu discutăm decât cazul transformării Z bilaterale:

$$Z\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{z}\right)^{-m} = X\left(\frac{1}{z}\right) \quad ;$$

$$x[-n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X(z^{-1}) \ , \ \frac{1}{z} \in DC \quad . \qquad (10.26)$$

Dacă DC este definit prin $R_- < |z| < R_+$ atunci noul domeniu este dat de condiția din 10.26) $R_- < \frac{1}{|z|} < R_+$ adică $\frac{1}{R_+} < |z| < \frac{1}{R_-}$.

5. **Diferentierea în domeniul n** Diferența finită a semnalului x[n] este x[n]-x[n-1] . Aplicând proprietatea de translație în timp. rezultă:

$$x[n] - x[n-1] \quad <\!\!\longrightarrow \quad (1-z^{-1}) X(z) \quad ; \quad z \in DC \quad ; \qquad (10.27')$$

$$x[n] - x[n-1] \quad <\!\!\longrightarrow \quad (1-z^{-1}) X_u(z) - x[-1] \quad . \qquad (10.27'')$$

Evident fracția factor (z-1)/z anulează polul z = 1 al transformatei (dacă z=1 este pol) dar introduce z = 0 ca pol, dacă nu cumva z = 0 a fost un zerou al transformatei X(z).

6. **Însumarea în domeniul n (timpului)** Semnalul sumă $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ satisface relația x[n] = y[n]-y[n-1] . În consecință:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \quad <\!\!\longrightarrow \quad X(z) = (1-z^{-1}) Y(z) \quad ,$$

de unde:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X(z)}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}X(z) \quad ; \quad z \in DC \cap DC^{*} \quad , \qquad (10.28')$$

domeniul de convergență DC* fiind domeniul $|z| > 1$.

Pentru transformarea unilaterală:

$$x[n] = y[n] - y[n-1] \quad \longleftrightarrow \quad X_u(z) = \left(1-z^{-1}\right)Y(z) - y[-1] \quad .$$

Dar $y[-1] = \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]$ și deci:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \quad \longleftrightarrow \quad \frac{X_u(z) + \sum_{k=-\infty}^{-1} x[k]}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}X(z) \quad ; \quad |z| > 1 \quad . \qquad (10.28'')$$

Dacă semnalul x[n] este cauzal, $x[n] \equiv 0$, $n < 0$ și deci 10.28") este formal identică cu 10.28').

7. Diferențierea în domeniul z Derivând X(z) dat de relația 10.7) obținem:

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{dz^{-n}}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -n\,x[n]z^{-n-1} = z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-n\,x[n]\right)z^{-n} \quad ,$$

și deci:

$$n\,x[n] \quad \longleftrightarrow \quad -z\frac{dX(z)}{dz} \quad ; \quad z \in DC \quad . \qquad (10.29')$$

În mod similar:

$$n\,x[n] \quad \longleftrightarrow \quad -z\frac{dX_u(z)}{dz} \quad . \qquad (10.29'')$$

8. Transformarea semnalului complex conjugat Dacă $x[n] \in \mathbb{C}$:

$$Z\{x^{*}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{*}[n]z^{-n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(z^{*}\right)^{-n}\right)^{*} = X^{*}(z^{*}) \quad ;$$

$$x^*[n] \quad <\!\!-\!\!-\!\!-\!\!> \quad X^*(z^*) \quad , \quad z \in DC \quad . \qquad (10.30')$$

şi similar:

$$x^*[n] \quad <\!\!-\!\!-\!\!-\!\!> \quad X_u^*(z^*) \quad . \qquad (10.30'')$$

9. Teorema convoluţiei în domeniul timpului   Fie x[n] şi y[n] două semnale complexe. Dacă $x[n] * y[n]$ are sens, atunci:

$$Z\{x[n] * y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k] \right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k} y[n-k]\, z^{-(n-k)} \quad .$$

Punând n-k = m se ajunge la:

$$Z\{x[n] * y[n]\} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-k} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m} \right) = X(z)\, Y(z) \quad ;$$

$$x[n] * y[n] \quad <\!\!-\!\!-\!\!-\!\!> \quad X(z)\, Y(z) \quad z \in DC_x \cap DC_y \quad cel\ putin \ . \qquad (10.31')$$

Pentru semnalele cauzale şi transformarea unilaterală se obţine, în acelaşi mod:

$$x[n] * y[n] \quad <\!\!-\!\!-\!\!-\!\!> \quad X_u(z)\, Y_u(z) \quad . \qquad (10.31'')$$

10. Teorema produsului semnalelor în domeniul timpului   cunoscută şi ca teorema convoluţiei transformatelor. Căutăm transformata produsului semnalelor:

$$Z\{x[n]\, y[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, y[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_\Gamma X(u)\, u^{n-1}\, du \right) y[n]\, z^{-n} =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \left(\frac{z}{u} \right)^{-n} \right] \frac{du}{u} = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, Y\!\left(\frac{z}{u} \right) \frac{du}{u} \quad .$$

S-a obţinut relaţia:

$$x[n]\, y[n] \quad <\!\!-\!\!-\!\!-\!\!> \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, Y\!\left(\frac{z}{u} \right) \frac{du}{u} \quad , \quad \Gamma \in DC \quad . \qquad (10.32')$$

Domeniul de convergenţă al transformatei se stabileşte după cum urmează. Fie $DC_x : R_-^x < |z| < R_+^x$ şi $DC_y : R_-^y < |z| < R_+^y$. Argumentele u şi z/u ale funcţiilor ce se integrează trebuie să satisfacă inegalităţile:

$$R_-^x < |u| < R_+^y \quad ; \quad R_-^y < \frac{|z|}{|u|} < R_+^y \quad .$$

Cum razele de convergenţă sunt nenegative, cele 2 inegalităţi duble se pot înmulţi membru cu membru, păstrând sensul[1] semnelor de inegalitate:

$$R_-^x \cdot R_-^y < |z| < R_+^x \cdot R_+^y \quad . \qquad (10.33)$$

Inegalitatea 10.33) defineşte domeniul de convergenţă (DC) al transformatei bilaterale a produsului semnalelor x[n] şi y[n] .

Dacă $x[n] \in l^2$, fie $y[n] = x^*[n]$. Relaţia 10.32') devine:

$$|x[n]|^2 \quad <\!\!\longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, X^*\!\left(\frac{z^*}{u^*}\right) \frac{du}{u} \quad ,$$

care se explicitează prin:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 z^{-n} = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, X^*\!\left(\frac{z^*}{u^*}\right) \frac{du}{u} \quad .$$

Pentru z = 1 (dacă $x[n] \in l^2$, cercul unitar este din DC) rezultă o generalizare a teoremei lui Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X(u)\, X^*\!\left(\frac{1}{u^*}\right) \frac{du}{u} \quad , \quad \Gamma \subset DC \quad . \qquad (10.34)$$

Pentru $u = e^{j\Omega}$, $u^* = e^{-j\Omega}$ şi $du = je^{j\Omega}d\Omega$ iar 10.34) se transformă în:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) X^*(e^{j\Omega})\, j\, \frac{e^{j\Omega} d\Omega}{e^{j\Omega}} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \int_{-\pi}^{\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \quad ,$$

adică forma relaţiei lui Parseval din domeniul frecvenţei Ω .

În mod asemănător se arată că şi pentru transformarea unilaterală avem:

$$x[n]\, y[n] \quad <\!\!\longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi j} \oint_\Gamma X_u(u)\, Y_u\!\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \quad , \quad \Gamma \subset DC \quad . \qquad (10.32'')$$

11. Teorema valorii initiale a unui semnal discret cauzal Pentru un semnal x[n] cauzal cele 2 transformate Z sunt identice $X(z) = X_u(z)$. Conform definiției, transformata unui semnal cauzal conține, cu excepția primului termen, numai puteri negative ale variabilei z:

$$X_u(z) = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = x[0] + \frac{1}{z} x[1] + \ldots$$

Trecând la limită pentru $|z|$ tinzând la infinit, se obține relația:

$$x[0] = \lim_{|z| \to \infty} X_u(z) = \lim_{|z| \to \infty} X(z) \quad , \qquad (10.35)$$

cunoscută sub denumirea de teorema valorii inițiale a unui semnal cauzal.

Ca o consecință a ei, dacă $X_u(z) = X(z) = N(z)/D(z)$ este o fracție rațională în z, gradul numărătorului, M, nu poate depăși gradul numitorului, N : $M \le N$. Altfel spus, dacă transformata unui semnal cauzal este fracție rațională, ea nu poate avea mai multe zerouri decât poli.

12. Teorema valorii finale a unui semnal discret cauzal Transformata diferenței $x[n+1] - x[n]$ a unui semnal cauzal este:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n+1]\, z^{-n} - X(z) = \sum_{m=1}^{\infty} x[m]\, z^{-(m-1)} - X_u(z) =$$

$$= z\left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m]\, z^{-m} - x[0] \right) - X_u(z) = (z-1) X_u(z) - z x[0] \ .$$

Trecând la limită pentru $z \to 1$ se obține:

$$\lim_{z \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n])\, z^{-n} = \lim_{z \to 1} (z-1) X_u(z) - x[0] \ .$$

Membrul stâng al egalității devine, după trecerea la limită:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x[n+1] - x[n]) = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} (x[n+1] - x[n]) = \lim_{k \to \infty} (x[k+1] - x[0]) \ .$$

Se obține relația:

$$x[\infty] = \lim_{k \to \infty} x[k] = \lim_{z \to 1} (z-1) X_u(z) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z) \ . \qquad (10.36)$$

numită și teorema valorii finale a unui semnal cauzal.

Dacă semnalul este cauzal, domeniul de convergență al transformatei sale,

$X_u(z) = X(z)$, este exteriorul unui disc. Dacă cercul unitar este în domeniul de convergenţă $X(z)\big|_{|z|=1}$ are valori finite. Deci, cum z = 1 este pe cercul unitar, X(1) este o valoare finită. Rezultă deci că $x[\infty] = 1$, ca urmare a teoremei valorii finale. Semnalele cauzale ce au transformată Fourier în timp discret tind la 0 când n —> ∞ .

10.5 Relaţia dintre transformarea Z şi transformarea Laplace

Fie $x_a(t)$ un semnal analogic având transformarea Laplace bilaterală $X_a(s)$. Prin eşantionarea sa, se obţine semnalul:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)\,\delta(t-nT_e) \quad . \tag{10.37}$$

Dar semnalul $\hat{x}(t)$ este un semnal definit în timp continuu. Prin urmare i se poate aplica transformarea Laplace bilaterală:

$$\mathcal{L}\{\hat{x}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)\,\mathcal{L}\{\delta(t-nT_e)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)\,e^{-snT_e} \quad . \tag{10.38}$$

Dar $x_a(nT_e) = x_d[n]$, semnalul în timp discret. Pentru el transformata Z bilaterală este:

$$Z\{x_d[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]\,z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_e)\,z^{-n} \quad . \tag{10.39}$$

Comparând cele 2 relaţii se obţine că:

$$\mathcal{L}\{x_a(t)\,\delta_{T_e}(t)\}\big|_{e^{sT_e}=z} = Z\{x_d[n]\} \;\; ; \;\; x_d[n] = x_a(nT_e) \quad . \tag{10.40}$$

Dacă se aplică semnalului analogic eşantionat transformata Laplace bilaterală şi se substituie în aceasta:

$$z = e^{sT_e} \quad , \tag{10.41}$$

se obţine transformata Z bilaterală a semnalului discret, provenit din semnalul analogic.

Relaţia 10.40) este valabilă şi pentru cazul transformatelor unilaterale:

$$\mathcal{L}_u\{x_a(t)\,\delta_{T_e}(t)\}\big|_{e^{sT_e}=z} = Z_u\{x_d[n]\} \;\; ; \;\; x_d[n] = x_a(nT_e) \quad . \tag{10.40'}$$

substituţia fiind aceeaşi - 10.41).

10.6 Studiul sistemelor discrete liniare şi invariante în timp prin intermediul transformării Z

Forma simplă a teoremei convoluţiei semnalelor discrete face din transformata Z un instrument util pentru studiul sistemelor discrete LIT. Dacă sistemul studiat este cauzal şi nu are condiţii iniţiale nule, este utilă transformarea Z unilaterală.

10.6.1 Functia de sistem a unui sistem discret liniar si invariant în timp

Dacă x[n] este semnalul de intrare al unui SLITD, x[n] <—> X(z) iar y[n]<—>Y(z) este semnalul de la ieşirea sa, atunci aplicând relaţiei $y[n] = h[n] * x[n]$ transformarea Z bilaterală, se obţine:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad ; \quad H(z) = Z\{h[n]\} \quad . \tag{10.42}$$

Relaţia 10.42) permite determinarea răspunsului unui SLIT de orice fel, nu neapărat cauzal la un semnal de intrare nici el neapărat cauzal.

Dacă sistemul şi semnalul de intrare sunt de tip cauzal, simpla adăugare a indicelui "u" transformatelor modifică relaţia 10.42) pentru cazul transformatelor unilaterale. Dacă se foloseşte transformarea Z bilaterală indicarea domeniului de convergenţă, explicit sau implicit, este obligatorie.

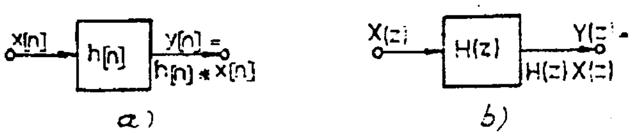

Figura 10.6. SLITD caracterizat prin: (a) răspunsul la impuls, h[n]; (b) funcţia sistem H(z).

Relaţia 10.42) ne arată că funcţia H(z), numită şi "funcţia (de) sistem" sau "funcţia de transfer a sistemului" caracterizează complet comportarea sa în planul complex z, după cum răspunsul la impuls h[n] caracteriza complet comportarea sistemelor în timp - figura 10.6.

Dacă sistemul discret este stabil, există şi $\mathcal{F}\{h[n]\}$. Dar, $\mathcal{F}\{h[n]\}(\Omega)=Z\{h[n]\}(e^{j\Omega})$ şi prin urmare cercul unitar este în domeniul de convergenţă al funcţiei de sistem ce caracterizează un sistem stabil.

Dacă sistemul este cauzal: $H_u(z) = H(z)$, atunci domeniul de convergenţă al funcţiei este exteriorul unui disc. Dacă sistemul este stabil şi cauzal, cercul unitar este în DC. Toţi polii funcţiei sistem a unui sistem stabil şi cauzal au modulul subunitar ceea ce este ehivalent cu faptul că sunt cuprinşi în interiorul discului unitar.

10.6.2 Determinarea răspunsului unui sistem discret liniar şi invariant în timp utilizând transformarea Z

Dacă x[n] este dat şi se specifică h[n] <—> H(z) atunci se aplică semnalului de intrare transformarea directă rezultând X(z). Răspunsul în complex este

$Y(z)=H(z)X(z)$. Aplicând transformarea Z inversă, rezultă semnalul răspuns, $y[n]$. Dacă se lucrează cu sisteme şi semnale cauzale în condiţii iniţiale nenule, se va utiliza numai transformarea Z unilaterală. Problema principală este transformarea directă şi inversă a unui semnal.

Calculul transformatei directe nu pune probleme, cel puţin pentru semnalele discrete uzuale. Aplicarea relaţiei de definire a transformatei sau tabelele de transformări împreună cu proprietăţile transformării conduc la obţinerea transformatei.

În ceea ce priveşte calculul transformatei Z inverse sunt aplicabile trei metode:

1. Calculul direct al integralei (10.17)

Se ţine seama de următoarele:

- dacă $f(z)$ este o funcţie ce în domeniul mărginit de curba închisă Γ, netedă pe porţiuni, are un număr finit de puncte singulare izolate z_k , atunci:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_k \operatorname{Rez}\{f(z)\}\big|_{z=z_k} \quad . \tag{10.43}$$

- dacă $z = z_k$ este un pol de ordinul s al funcţiei $f(z)$, atunci reziduul referitor la acest pol se calculează cu relaţia:

$$\operatorname{Rez}\{f(z)\}\big|_{z=z_k} = \frac{1}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\left[(z-z_k)^s f(z)\right]\Big|_{z=z_k} \quad . \tag{10.44}$$

Conform cu (10.43), notând $f(z) = X(z)z^{n-1}$,(10.17) devine:

$$x[n] = \sum_k \operatorname{Rez}\{X(z)\, z^{n-1}\}\big|_{z=z_k} \quad , \tag{10.45}$$

unde z_k sunt polii aflaţi în interiorul discului centrat pe origine şi delimitat de cercul Γ din DC pe care se face integrarea în 10.17.

Având în vedere complicaţiile de calcul, metoda este mai puţin utilizată.

Exemplu: *Fie de inversat:*

$$Y(z) = \frac{z(2z-1)}{2(z-1)(z+0{,}5)} \quad ; \quad |z| > 1 \quad .$$

Polii transformatei sunt $z_1 = 1$ şi $z_2=-0.5$ - vezi şi figura 10.7. Curba $\Gamma \subset DC$ este un cerc cu centrul în origine şi raza mai mare decât unu.

Fie $n > 0$. Factorul z^{n-1} nu introduce poli suplimentari. În consecinţă se calculează numai:

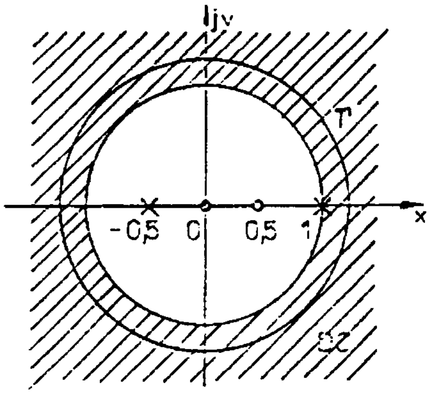

Figura 10.7 CPZ pentru exemplul de calcul al TZ inverse.

$$\mathrm{Rez}\left\{\frac{z^n(2z-1)}{2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=1} = \frac{z^n(2z-1)}{2(z+0{,}5)}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{3}\ ;$$

$$\mathrm{Rez}\left\{\frac{z^n(2z-1)}{2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=-0{,}5} = \frac{z^n(2z-1)}{2(z-1)}\Bigg|_{z=-0{,}5} = \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\ .$$

şi conform relaţiei (10.45):

$$y[n] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\ ;\ n \ge 0\ . \qquad (10.46)$$

Dacă $n \le -1$, notăm $m = -n$ şi atunci:

$$Y(z)z^{n-1} = -\frac{2z-1}{2z^m(z-1)(z+0{,}5)}\quad ;\quad m \ge 1\quad ,$$

are în origine un pol multiplu de ordin m:

$$\mathrm{Rez}\{Y(z)z^{n-1}\} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{z^m\frac{2z-1}{z^m 2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=0} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(-2)^m = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}(-0{,}5)^n\quad ,$$

deoarece:

$$\frac{2z-1}{2(z-1)(z+0{,}5)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{z-1} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{z+0{,}5}\quad ,$$

şi deci:

$$\left(\frac{2z-1}{2(z-1)(z+0{,}5)}\right)^{(m-1)} = \frac{1}{3}\,\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z-1)^m} + \frac{2}{3}\,\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(z+0{,}5)^m}\ .$$

Se calculează reziduurile în 1:

$$\mathrm{Rez}\left\{\frac{2z-1}{z^m 2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=1} = \frac{2z-1}{z^m 2(z+0{,}5)}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{3}\quad ,$$

şi în -0,5:

$$\mathrm{Rez}\left\{\frac{2z-1}{z^m 2(z-1)(z+0{,}5)}\right\}\Bigg|_{z=-0{,}5}=\frac{2z-1}{z^m 2(z-1)}\Bigg|_{z=-0{,}5}=\frac{2}{3}(-2)^m=\frac{2}{3}(-0{,}5)^n .$$

Conform relației(10.45):

$$y[n] = -\frac{1}{3}-\frac{2}{3}(-0{,}5)^n+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-0{,}5)^n \equiv 0 \quad ; \quad n \le -1 \quad . \qquad (10.46'')$$

Transformata inversă este deci un ***semnal cauzal***, *după cum rezultă și din domeniul de convergență. Din (10.46') și (10.46") obținem:*

$$y[n] = \left[\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-0{,}5)^n\right]\sigma[n] \quad . \qquad (10.46)$$

2. Transformarea funcției Y(z) într-o sumă de fracții simple

Metoda se aplică în cazurile în care Y(z) este o funcție rațională. Funcția Y(z) poate fi un raport de polinoame în z^{-1} sau z. Recomandăm să se lucreze în z^{-1}, notând pentru comoditate $z^{-1} = x$, deoarece în majoritatea cazurilor tabelele sunt date în funcție de puterile lui z^{-1}. Fie $Y(x) = Y(z^{-1})$ o funcție rațională:

$$Y(x) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{N(x)}{D(x)} \quad .$$

Efectuând împărțirea rezultă:

$$Y(x) = I(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \quad . \qquad (10.47)$$

Pentru partea întreagă: $I(x) = \sum_k c_k x^k = \sum_k c_k z^{-k}$ și deci:

$$Z^{-1}\left\{\sum_k c_k z^{-k}\right\} = \sum_k c_k \delta[n-k] \quad . \qquad (10.48)$$

Partea fracțională se pune sub forma:

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum_m \frac{a_m}{x-x_m} + \sum_k \sum_{i=1}^{s_k} \frac{b_{ki}}{(x-x_k)^i} \quad , \qquad (10.49)$$

unde suma după m se extinde la toate rădăcinile simple iar suma după k la toate rădăcinile multiple, de ordine de multiplicitate s_k. Coeficienţii a_m şi b_{ki} pot fi determinaţi prin identificare sau prin aplicarea relaţiilor de calcul:

$$a_m = \left[(x-x_m)\frac{R(x)}{D(x)} \right]_{x=x_m} ; \qquad (10.50)$$

$$b_{ki} = \frac{1}{(s_k-i)!}\left\{ \frac{d^{s_k-i}}{dx^{s_k-i}}\left[(x-x_k)^{s_k}\frac{R(x)}{D(x)} \right] \right\} \Bigg|_{x=x_k} . \qquad (10.51)$$

Se aplică transformarea inversă fiecărui termen din suma(10.49), după ce se revine mai întâi la $z^{-1} = x$, utilizând tabelele de transformate şi tabelele de proprietăţi ale transformării.

Exemple

1. *Se dă* $Y(z) = \dfrac{z}{(z-0{,}5)(z-0{,}25)}$ *; se cere y[n] ştiind că el este un semnal cauzal. Vom remarca imediat că* $Y_u(z) = Y(z)$ *şi că DC este definit de raza celui mai îndepărtat pol de origine, 0,5:* $|z| > 0{,}5$ *. Înainte de a descompune în fracţii simple, se exprimă Y(z) prin puterile lui* z^{-1} *, împărţind numărătorul şi numitorul cu* z^2 *:*

$$Y(z) = \frac{8z^{-1}}{(2-z^{-1})(4-z^{-1})} = \frac{8x}{(2-x)(4-x)} = \frac{Q_1}{2-x} + \frac{Q_2}{4-x} = \frac{8}{2-x} - \frac{16}{4-x} ;$$

$$Y(z) = \frac{8}{2-z^{-1}} - \frac{16}{4-z^{-1}} = \frac{4}{1-0{,}5z^{-1}} - \frac{4}{1-0{,}25z^{-1}} . \qquad (10.52)$$

Din tabele rezultă:

$$y[n] = 4\left[(0{,}5)^n - (0{,}25)^n\right]\sigma[n] .$$

2. *Pentru aceeaşi transformată Y(z), cu DC definit de* $|z| < 0{,}25$ *se inversează (10.52) ţinând seama că ambii termeni sunt definiţi în discurile* $|z| < 0{,}5$ *respectiv* $|z| < 0{,}25$ *:*

$$y[n] = -4\left[(0{,}5)^n - (0{,}25)^n\right]\sigma[-n-1] .$$

3. *Tot pentru aceeaşi transformată dar cu DC:* $0{,}25 < |z| < 0{,}5$ *, primul termen este definit pentru* $|z| < 0{,}5$ *iar al doilea pentru* $|z| > 0{,}25$ *. În consecinţă:*

$$y[n] = -4(0{,}5)^n\sigma[-n-1] - 4(0{,}25)^n\sigma[n] .$$

Şi din aceste 3 exemple se poate deduce însemnătatea definirii corecte a domeniului în care se face transformarea inversă.

3. **Metoda dezvoltării funcţiei Y(z) în serie de puteri**

Dacă se dezvoltă Y(z) în serie de puteri în jurul originii, se obţine forma explicită a lui x[n] :

a) Astfel, pentru $Y(z) = e^{z^{-1}}$ originea este un punct singular esenţial. Pentru $|z|>0$ avem:

$$e^{z^{-1}} = 1+\frac{1}{1!}z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\ldots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n} \quad .$$

şi deci $y[n] = \dfrac{1}{n!}$.

b) Dacă se consideră $Y(z) = e^{z}$, ea are la infinit un punct singular şi deci y[n] nu poate fi cauzal. Avem pentru $|z| \geq 0$, cu excepţia punctului de la infinit:

$$e^{z} = 1+\frac{1}{1!}z+\frac{1}{2!}z^{2}+\ldots+\frac{1}{m!}z^{m}+\ldots = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z^{m} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{-n} = 1+\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-n)!}z^{-n} \quad .$$

Rezultă din tabele:

$$y[n] = \delta[n] - \frac{1}{(-n)!}\sigma[-n-1] = \frac{1}{(-1)^{n}n!}\sigma[-n] \quad .$$

c) Fie $Y(z) = \ln(1+az^{-1})$ şi DC definit de $|z| > |a|$. Semnalul y[n] este cauzal. Dezvoltarea în serie a funcţiei Y(z) în domeniul de convergenţă este:

$$Y(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}}{n}z^{-n} \longrightarrow y[n] = \frac{(-1)^{n+1}a^{n}}{n} \quad ; \quad n \geq 1 \quad .$$

Semnalul fiind cauzal, teorema valorii iniţiale dă

$$y[0] = \lim_{z\to\infty}\ln\left(1+az^{-1}\right) = 0 \quad \text{şi în consecinţă} \quad y[n] = \frac{(-1)^{n}}{n}a^{n}\sigma[n-1]$$

Un caz aparte al dezvoltării în serie de puteri apare atunci când Y(z) este o fracţie raţională.

Fie $Y(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$, $|z| > |a|$. Se efectuează împărțirea urmărind forma câtului în z^{-1} deoarece transformata semnalului cauzal nu conține decât puterile negative ale lui z:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1 - az^{-1} \\
\hline
-1 + az^{-1} & 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots \\
\cline{1-1}
/ \quad az^{-1} & \\
\quad -az^{-1} + a^2z^{-2} & \\
\cline{1-1}
\quad / \quad a^2z^{-2} & \\
\qquad -a^2z^{-2} + a^3z^{-3} & \\
\cline{1-1}
\qquad / \quad a^3z^{-3} & \\
\qquad\qquad \ddots &
\end{array}
$$

Se obține deci $y[n] = a^n\sigma[n]$.

Dacă $Y(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$ este definită pentru $|z| < |a|$, semnalul corespunzător este anticauzal. Transformata sa conține numai puterile pozitive ale lui z. De aceea se scrie $Y(z) = \dfrac{z}{z-a}$ și se efectuează împărțirea sub forma:

$$
\begin{array}{l|l}
z & -a + z \\
\hline
-z + a^{-1}z^2 & -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - a^{-4}z^4 - \dots \\
\cline{1-1}
/ \quad a^{-1}z^2 & \\
\quad -a^{-1}z^2 + a^{-2}z^3 & \\
\cline{1-1}
\quad / \quad a^{-2}z^3 & \\
\qquad -a^{-2}z^3 + a^{-3}z^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad / \quad a^{-3}z^4 & \\
\qquad\qquad \ddots &
\end{array}
$$

Rezultă că: $Y(z) = -\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(a^{-1}z\right)^m = -\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$ și în consecință forma semnalului este $y[n] = -a^n \sigma[-n-1]$.

10.6.3 Sisteme discrete liniare și invariante în timp, caracterizate prin ecuații cu diferențe finite liniare și cu coeficienți constanți

Fie SLIT discret caracterizat de ecuația cu diferențe finite:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad , \qquad (10.53)$$

cu condiții inițiale nule.

Aplicând egalității transformarea Z bilaterală rezultă:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \quad ,$$

din care se poate determina funcția H(z) = Y(z)/X(z) ca fiind:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \quad . \qquad (10.54)$$

Dacă este dată ecuația cu diferențe finite (10.53), forma (10.54) a lui H(z) se determină imediat, identificând coeficienții din cele 2 relații și reciproc. Se mai observă că H(z) este în acest caz o fracție rațională în z^{-1} sau în z.

Dacă sistemul nu este cauzal, este necesară specificarea domeniului de convergență DC. Pentru sistemele cauzale, $H_u(z) = H(z)$, și domeniul de convergență este implicit. El este exteriorul unui disc cu raza egală cu cel mai mare modul al polilor lui H(z). Rădăcinile ecuației N(z) = 0 sunt zerourile sistemului, iar rădăcinile ecuației D(z) = 0 sunt polii sistemului.

Dacă sistemul este stabil și cauzal, toți polii săi au modulul subunitar deci sunt plasați în interiorul discului unitar: $|z_{pk}| < 1$.

Fie sistemul discret cauzal. Teorema valorii inițiale pentru h[n] cauzal este:

$$h[0] = \lim_{z \to \infty} H_u(z) = \lim_{z \to \infty} H(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{N(z)}{D(z)} \quad . \qquad (10.55)$$

Din ea rezultă că, dacă $H_u(z) = H(z)$ este o fracție rațională, atunci gradul numărătorului, M, nu poate depăși gradul numitorului, N: $M \leq N$. Condiția este mai puțin severă decât în cazul sistemelor în timp continuu (analogice), unde M < N (inegalitatea trebuie să fie strictă).

Funcţiile $H_u(z)$ care au atât poli cât şi zerouri plasate în interiorul discului unitar se numesc funcţii de rază minimă.

<u>Contribuţia polilor unui sistem discret cauzal în răspunsul la impuls al acestuia</u>

Vom considera numai cazul polilor simpli şi dubli, celelalte cazuri tratându-se în mod identic.

Deoarece $H_u(z)$ are coeficienţi reali, dacă $N(z) = 0$ admite $z_k \in \mathbb{C}$ ca rădăcină atunci ea admite şi pe z_k^* ca rădăcină. Polii apar în perechi complex conjugate.

Fie $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ şi $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ o pereche de poli. Termenii corespunzători în descompunerea lui $H_u(z) = H(z)$ în fracţii simple sunt:

$$\ldots + \frac{a}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \ldots ,$$

iar contribuţia lor în $h[n]$ este de forma $A r_p^n \sin(\Omega_p n + \Phi_p)$. Dacă $r_p < 1$, răspunsul, având un caracter oscilant, se amortizează. Perechea de poli nu conferă instabilitate sistemului. Dacă însă $r_p > 1$, răspunsul creşte exponenţial, sistemul fiind instabil. Un caz aparte îl reprezintă polii simplii situaţi pe cercul unitar. Contribuţia lor în răspunsul la impuls este un semnal oscilant $A\sin(\Omega_p n + \Phi_p)$, a cărui amplitudine rămâne mărginită. Oscilaţia continuă să se menţină deşi excitaţia a dispărut, fără ca amplitudinea ei să se modifice. Este un caz de stabilitate la limită, sistemul respectiv fiind un oscilator.

Dacă polii $z_p = r_p e^{j\Omega_p}$ şi $z_p^* = r_p e^{-j\Omega_p}$ sunt dublii, apar în $H_u(z) = H(z)$ termeni de forma:

$$\ldots + \frac{a_1}{1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_1^*}{1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}} + \frac{a_2}{\left(1 - r_p e^{j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \frac{a_2^*}{\left(1 - r_p e^{-j\Omega_p} z^{-1}\right)^2} + \ldots$$

Contribuţia lor în răspunsul la impuls este de forma:

$$\left[A_1 r_p^n \sin\left(\Omega_p n + \Phi_p\right) + A_2 n r_p^n \sin\left(\Omega_p n + \Psi_p\right)\right]\sigma[n] \quad .$$

Dacă $r_p < 1$, răspunsul este amortizat şi polii dublii din interiorul discului unitar nu conduc la instabilitate. Dacă însă $r_p < 1$, răspunsul creşte în timp şi nu este satisfăcută condiţia de BIBO stabilitate.

Concluzia ce se desprinde este aceea că un sistem discret şi cauzal este întotdeauna BIBO stabil dacă polii săi sunt în interiorul discului unitar. Dacă polii sunt plasaţi pe cercul unitar, sistemul cauzal este stabil la limită, doar dacă ei sunt simpli. Pentru cazul unei singure perechi de poli simpli plasaţi pe cercul unitar se obține un oscilator numeric ce generează un semnal discret sinusoidal.

Plasarea unui pol în afara discului unitar cauzează instabilitatea sistemului, chiar dacă el este simplu.

Calculul răspunsului unui SLIT discret caracterizat printr-o ecuație cu diferențe finite

În loc de a determina răspunsul y[n] al unui SLIT discret rezolvând ecuația cu diferențe finite pentru un semnal de intrare x[n] dat, se poate proceda în modul descris în paragraful 10.6.2. Calculul se efectuează prin intermediul transformatei Z bilaterale sau unilaterale, după caz. Dacă de exemplu se consideră că ecuația (10.53) cu condiții inițiale nenule, caracterizează un sistem cauzal (dar semnalul de la ieșire y[n] este necauzal), atunci prin aplicarea în cei doi membrii ai ralației (10.53) a transformării Z unilaterale rezultă:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y_u(z)+\sum_{n=1}^{k} y[-n]z^{n}\right]=\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}\left[X_u(z)+\sum_{n=1}^{k} x[-n]z^{n}\right]. \qquad (10.56)$$

Dacă semnalul de intrare este cauzal atunci x[-n] ≡ 0 , n > 0 și ecuația devine:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y_u(z)+\sum_{n=1}^{k} y[-n]z^{n}\right] = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} X_u(z) \quad . \qquad (10.57)$$

Din ambele ecuații, cunoscând $X_u(z)$ și condițiile inițiale se determină $Y_u(z)$ și apoi semnalul y[n].

Spre exemplu, fie ecuația $y[n]-a\,y[n-1] = x[n]$, iar semnalul de intrare $x[n] = k e^{j\Omega_o n}\sigma[n]$. Se presupune că y[-1] ≠ 0. Este aplicabilă forma (10.57):

$$Y_u(z)-a z^{-1}\left(Y_u(z)+y[-1]z\right) = \frac{k}{1-e^{j\Omega_o}z^{-1}} \quad ; \quad |z| > 1 \quad .$$

Se determină $Y_u(z)$:

$$Y_u(z)=\frac{k}{\left(1-e^{j\Omega_o}z^{-1}\right)\left(1-a z^{-1}\right)}+\frac{a\,y[-1]}{1-a z^{-1}}=\frac{-k e^{j\Omega_o}}{a-e^{j\Omega_o}}\,\frac{1}{1-e^{j\Omega_o}z^{-1}}+$$

$$+\frac{k a}{a-e^{j\Omega_o}}\,\frac{1}{1-a z^{-1}}+\frac{a\,y[-1]}{1-a z^{-1}} \quad .$$

și apoi:

$$y[n]=\left(a^{n+1}y[-1]+\frac{k a^{n+1}}{a-e^{j\Omega_o}}+\frac{k e^{j\Omega_o(n+1)}}{a-e^{j\Omega_o}}\right)\sigma[n] \quad ; \quad |a| < 1 \quad , \quad |z| > 1 \quad .$$

10.6.4 Sisteme de ordinul întâi

Un sistem de ordinul întâi este descris de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$y[n] - a\,y[n-1] = k\,x[n] \quad . \qquad (10.58)$$

Aplicând transformata Z bilaterală se deduce funcţia de sistem:

$$H(z) = \frac{k}{1 - a z^{-1}} = \frac{k z}{z - a} \quad ; \quad z \in DC \quad . \qquad (10.59)$$

Răspunsul la impuls se poate determina în funcţie de natura sistemului. În figura 10.5 se ilustrează constelaţia de poli şi zerouri (CPZ) a unui sistem de ordinul întâi. El are un pol în z = a şi un zero în origine.

Dacă sistemul este cauzal atunci $H_u(z) = H(z)$ iar DC este definit de $|z| > |a|$. Considerând că polul este în interiorul discului unitar, $|a| < 1$, sistemul este stabil. Această condiţie este şi necesară şi suficientă pentru stabilitatea unui sistem cauzal de ordinul întâi. Răspunsul la impuls în aceste condiţii este:

$$h[n] = k\,a^{n}\,\sigma[n] \quad . \qquad (10.60)$$

Dacă sistemul este anticauzal, DC este definit prin $|z| < |a|$ şi atunci:

$$h[n] = -k\,a^{n}\,\sigma[-n-1] \quad . \qquad (10.61)$$

Vom considera în cele ce urmează sistemul stabil şi cauzal. Răspunsul său în frecvenţă se obţine - vezi figura 10.5 - prin:

$$H(\Omega) = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{PA}|}\, e^{j(\psi - \varphi)} = \frac{1}{|\overline{PA}|}\, e^{j(\Omega - \varphi)} \quad . \qquad (10.62)$$

Dacă 0 < a < 1 maximul modulului răspunsului în frecvenţă rezultă pentru $|\overline{PA}|$ minim adică pentru $\Omega = 0$. Dacă însă $-1 > a > 0$, maximul rezultă pentru $\Omega = \pi$. În concluzie, valori a pozitive definesc sisteme trece jos, iar valori a negative definesc sisteme trece sus.

Este uşor de sesizat că $|H(\Omega)|$ este o caracteristică pară, deoarece $|\overline{PA}|_{\Omega} = |\overline{PA'}|_{-\Omega}$. Caracteristica de fază este însă, aşa cum rezultă şi din figură, o caracteristică impară.

10.6.5 Sisteme de ordinul doi

Vom considera o formă particulară a ecuației cu diferențe finite de ordinul doi, obținută prin normarea cu a_0 :

$$y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = kx[n] \tag{10.63}$$

În urma aplicării transformării bilaterale rezultă funcția de sistem:

$$H(z) = \frac{k}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{kz^2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad . \tag{10.63'}$$

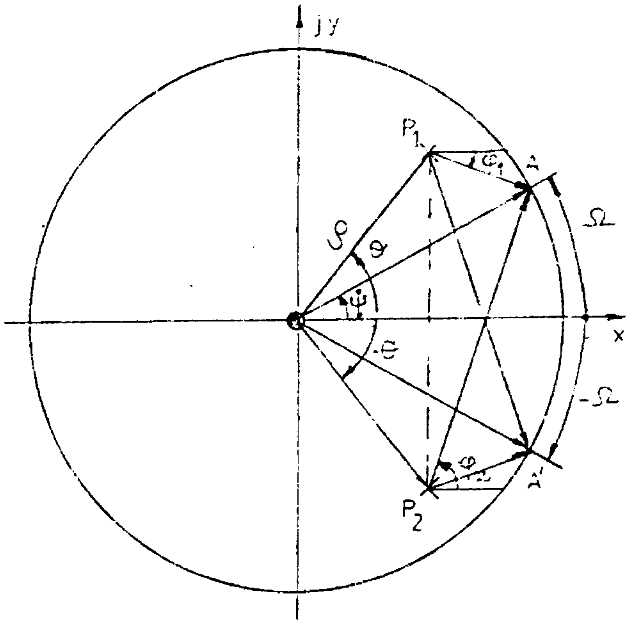

Fig.10.8. CPZ pentru un sistem de ordinul doi.

Ea are un zero de ordinul doi în origine și doi poli. Expresiile polilor sunt:

$$z_{p1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad . \tag{10.63''}$$

Dacă $a_1^2 < 4a_2$ cei doi poli sunt complex conjugați:

$$z_{p1,2} = \rho e^{\pm j\theta} \quad , \tag{10.64}$$

rezultând constelația din figura 10.8.

Daca $a_1^2 \geq 4a_2$ polii sunt reali. În ambele cazuri vom considera că sistemul este cauzal și vom căuta condițiile pe care trebuie să le îndeplinească coeficienții a_1 și a_2 pentru a obține stabilitatea. Dar condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem cauzal să fie stabil este aceea ca toți polii săi să aibă modulul subunitar. Aceasta conduce la:

$$\rho = \frac{\sqrt{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}}{2} = \sqrt{a_2} < 1 \quad ; \quad a_1^2 < 4a_2 \quad .$$

ceea ce implică:

$$|a_2| < 1 \quad , \quad a_2 > \frac{a_1^2}{4} \quad , \tag{10.65}$$

sau, dacă polii sunt reali:

$$-2 < -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 \quad ; \quad a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \ .$$

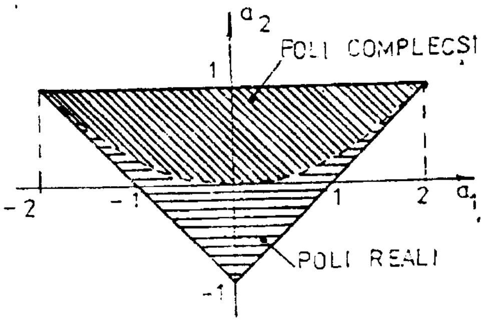

Fig.10.9 **Domeniul posibil al coeficienţilor a_1 şi a_2 care asigură stabilitatea unui sistem de ordinul doi.**

Rezolvând cele 4 inegalităţi ce trebuie să fie simultan îndeplinite, rezultă că este necesar să avem:

$$a_2 > -a_1 - 1 \ \text{ şi } \ a_2 > a_1 - 1 \ ;$$
$$a_1^2 - 4a_2 \geq 0 \ . \tag{10.65''}$$

Condiţiile (10.65') şi (10.65") delimitează în axele a_1 , a_2 un domeniu triunghiular aşa cum se vede în figura 10.9. Domeniul este separat în două părţi de parabola $a_2 = a_1^2/4$, una corespunzând polilor complecşi, cealaltă polilor reali. Parabola corespunde cazului existenţei unui singur pol real, dublu.

Răspunsul în frecvenţă al sistemului se determină aplicând relaţia de calcul generală (10.20) :

$$H(\Omega) = k \frac{1}{|\overline{P_1A}|\,|\overline{P_2A}|} e^{j(2\Omega - \varphi_1 - \varphi_2)} \ . \tag{10.66}$$

unde s-a considerat $k \in \mathbb{R}^*$. Pentru valori k negative, faza se modifică cu π. Se observă paritatea în raport cu Ω a caracteristicii de modul şi imparitatea caracteristicii de fază.

10.6.6 Functia de sistem echivalentă unor sisteme discrete conectate în serie şi în paralel

Vom considera două sisteme discrete $h_1[n]$ şi $h_2[n]$ conectate în serie - figura 10.10a . Sistemul echivalent este caracterizat de $h_e[n] = h_1[n] * h_2[n]$ (dacă operaţia are sens). Transformata Z a răspunsului la impuls a sistemului echivalent celor 2 sisteme conectate în serie este conform teoremei de convoluţie a semnalelor:

$$H_e(z) = H_1(z)\, H_2(z) \ . \tag{10.67}$$

Dacă sistemele sunt cauzale, transformatele bilaterale se înlocuiesc cu transformatele unilaterale. În relaţia (10.67) se adaugă indicele "u".

Pentru cazul a două sisteme discrete conectate în paralel ca în figura 10.10 b , $h_e[n] = h_1[n]+h_2[n]$ şi deci: