Stabilitatea sistemelor cu reactie

Sistem <u>strict</u> stabil daca
- gradul numaratorului lui H(s) (H(z)) ≤ gradul numitorului lui H(s) (H(z)) si/sau
- toti polii lui H(s) ∈ semiplanul stang (interiorul cercului unitate pt. timp discret).

Stabil in <u>sens larg</u> daca

polii H(s), s_p ∈ axa jω (imaginara) /

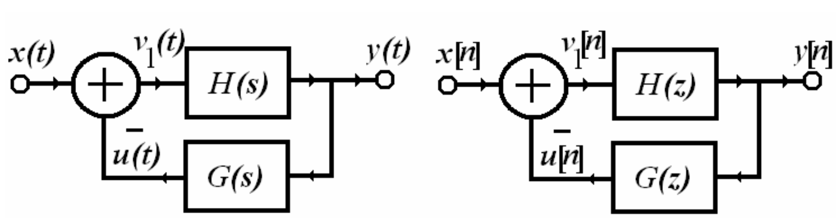
polii H(z) z_p ∈ cercul unitate r=1 pt timp discret.

Sistemul e stabil <=> numitorul lui H(s) este polinom Hurwitz.

Q(s) **strict/sens larg Hurwitz** daca
- are coeficienti reali, (strict/nu) pozitivi +
- radacini in semiplanul stang (adica au Re{r} < 0)

Un polinom Hurwitz are toti determinantii de ordin n, $\Delta_n > 0$. In sens larg daca $\Delta_k = 0$.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & . & \dots & a_n \end{vmatrix}$$



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1+H(s)G(s)} \text{ (t.continuu)} \qquad \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1+H(z)G(z)} \text{ (t.discret)}$$

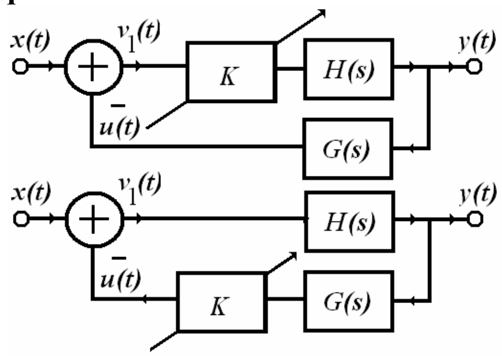
$W(s) = H(s)G(s)$ respectiv $W(z) = H(z)G(z)$ functia de transfer in <u>bucla deschisa</u>.

Sistemul in bucla deschisa – strict stabil daca

radacinile 1+W(s)=0 ∈ semiplanul stang fara axa jω. (partea reala <0) sau

radacinile 1+W(z)=0 ∈ interiorul cercului unitate r=1

Criteriul de stabilitate Nyquist



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{kH(s)}{1+H(s)G(s)} \qquad \text{respectiv} \qquad \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1+kH(s)G(s)}$$

$$R(s) = \frac{1}{k} + H(s)G(s) \qquad\qquad R(z) = \frac{1}{k} + H(z)G(z)$$

$R(s) = \frac{1}{k} + H(s)G(s)$ sa <u>nu aiba zerouri in semiplanul drept sau pe axa jω</u>

=> $\underset{\omega\in(-\infty,\infty)}{H(j\omega)G(j\omega)}$ = hodograf Nyquist al sistemului in bucla deschisa trebuie sa inconjoare punctul (-1/k, 0) in sens anti-orar de n ori unde $n = n_i + n_c/2$,

n_i = nr poli semiplanul drept, n_c = nr poli de pe axa imaginara (t. continuu)

$R(z) = \frac{1}{k} + H(z)G(z)$ <u>nici un zero sa nu fie in afara cercului unitate r=1 (z=$e^{j\Omega}$)</u>

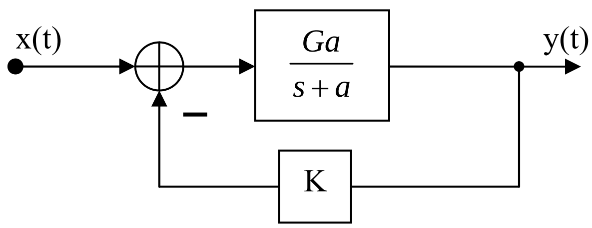
n_i = nr zerouri din afara cercului r=1, n_c = nr poli de pe cercul r=1 (t. discret)

Stabilitatea sistemelor cu reactie. Probleme

Problema 1. Se consideră amplificatorul cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{Ga}{s+a}$$

a) care este câştigul în curent continuu al amplificatorului?
b) care este constanta de timp a sistemului?
c) se defineşte banda amplificatorului ca şi frecvența la care modulul răspunsului în frecvență al acestui sistem este de $\sqrt{2}$ ori mai mic decât câştigul în curent continuu. Care este banda amplificatorului considerat?
d) Amplificator considerat se plasează într-o buclă de reacție ca şi în figură:



Care este câştigul în curent continuu, constanta de timp, banda amplificatorului cu reacție?
e) Determinați valoarea lui k pentru care banda sistemului în buclă închisă este dublul benzii sistemului în buclă deschisă.

Rezolvare.

a) $H(j\omega) = \frac{Ga}{j\omega + a}$. Câştigul în c.c. $H(0) = G$

b) $\frac{1}{s+a} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\leftrightarrow} e^{-at}\sigma(t)$.

Dacă $h(t) \sim e^{-\frac{t}{\tau}}\sigma(t)$ atunci τ este constanta de timp a sistemului

$$h(t) = Ga \cdot e^{-at}\sigma(t) \Rightarrow \tau = \frac{1}{a}$$

c) Banda este $B = \left|H(j\omega_M)\right| = \frac{G}{\sqrt{2}}$. Dar $\left|H(j\omega)\right| = \frac{Ga}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$

$$\frac{Ga}{\sqrt{\omega_M^2 + a^2}} = \frac{G}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_T = a$$

d)

$$Y(s) = \left[X(s) - kY(s)\right]H(s)$$

$$Y(s) = X(s)H(s) - kY(s)H(s)$$

$$Y(s)\left[1 + kH(s)\right] = X(s)H(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{H(s)}{1+kH(s)}=\frac{\frac{Ga}{s+a}}{1+k\frac{Ga}{s+a}}=H_{b\hat{\imath}}(s)$$

Câştigul în c.c. al sistemului cu reacție este $H_{b\hat{\imath}}(0)=\frac{G}{1+kG}$

$$H_{b\hat{\imath}}(s)=\frac{Ga}{s+a+kGa}=\frac{Ga}{s+a(1+kG)}$$

Constanta de timp $\tau=\frac{1}{a(1+kG)}$

$$H_{b\hat{\imath}}(\omega)=\frac{Ga}{j\omega+a(1+kG)}$$

$$\Rightarrow\left|\frac{Ga}{j\omega_{T\ b\hat{\imath}}+a(1+kG)}\right|=\frac{G}{\sqrt{2}(1+kG)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{Ga}{\sqrt{(\omega_{T\ b\hat{\imath}})^2+a^2(1+kG)^2}}=\frac{G}{\sqrt{2}(1+kG)}$$

$$\frac{a^2}{(\omega_{T\ b\hat{\imath}})^2+a^2(1+kG)^2}=\frac{1}{2(1+kG)^2}$$

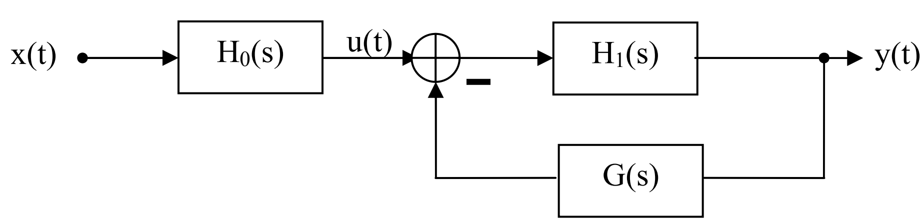
$$2a^2(1+kG)^2=(\omega_{T\ b\hat{\imath}})^2+a^2(1+kG)^2$$

$$\Rightarrow\omega_{T\ b\hat{\imath}}=a(1+kG)$$

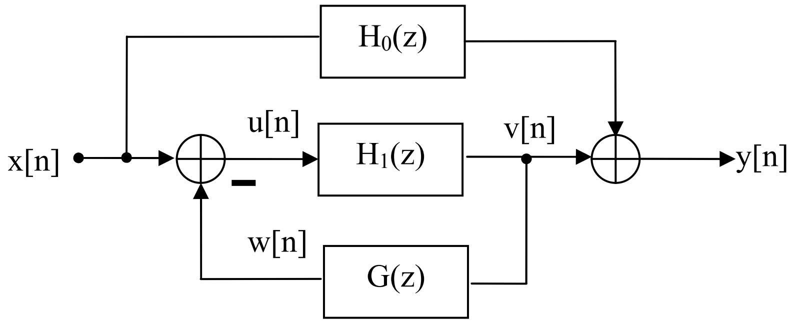
e) $\omega_{T\ b\hat{\imath}}=2\omega_T\Leftrightarrow a(1+kG)=2a\Leftrightarrow k=\frac{1}{G}$.

Problema 2.
Determinați funcțiile de transfer ale sistemelor din figură

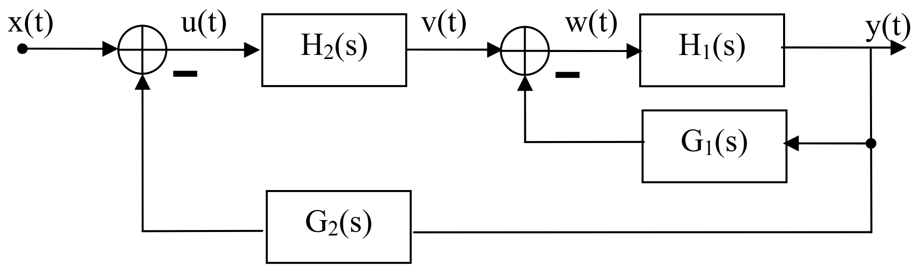
a)



b)



c)



Rezolvare

a) $U(s) = X(s)H_0(s)$

$Y(s) = \left[U(s) - Y(s)\cdot G(s)\right]H_1(s)$

$Y(s)\left[1 + G(s)H_1(s)\right] = U(s)H_1(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + G(s)H_1(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)H_0(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + G(s)H_1(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)\cdot H_0(s)}{1 + G(s)\cdot H_1(s)}$$

b) $u[n] = x[n] - w[n]$ şi $V(z) = U(z)\cdot H_1(z)$

$\Rightarrow U(z) = X(z) - W(z) = X(z) - G(z)V(z) = X(z) - G(z)H_1(z)U(z)$

$U(z)\left[1 + G(z)H_1(z)\right] = X(z)$

$U(z) = \dfrac{X(z)}{1 + G(z)H_1(z)}$, dar $U(z) = \dfrac{V(z)}{H_1(z)}$

$$\Rightarrow V(z) = \frac{H_1(z)X(z)}{1 + G(z)H_1(z)}$$

$$Y(z) = X(z)H_0(z) + V(z)$$
$$= X(z)H_0(z) + \frac{H_1(z)X(z)}{1+G(z)H_1(z)}$$
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H_0(z) + \frac{H_1(z)}{1+G(z)H_1(z)}$$

c) $U(s) = X(s) - G_2(s)Y(s)$

$$V(s) = U(s)H_2(s)$$
$$W(s) = V(s) - Y(s)G_1(s)$$
$$Y(s) = W(s)H_1(s)$$
$$\Rightarrow Y(s) = H_1(s)\left[V(s) - Y(s)G_1(s)\right]$$
$$Y(s) = H_1(s)\left[H_2(s)U(s) - Y(s)G_1(s)\right]$$
$$= H_1(s)\left\{H_2(s)\left[X(s) - G_2(s)Y(s)\right] - Y(s)G_1(s)\right\}$$
$$Y(s)\left[1 + H_1(s)H_2(s)G_2(s) + H_1(s)G_1(s)\right] = H_1(s)H_2(s)X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)G_2(s) + H_1(s)G_1(s)}.$$

Problema 3. Se dă sistemul descris de ecuația diferențială
$$y''' + 6y'' + 9y' + y = x''' + 6x'' + 8x'$$
cu condiții inițiale nule.
Studiați stabilitatea acestui system pe baza criteriului Hurwitz.

Rezolvare.

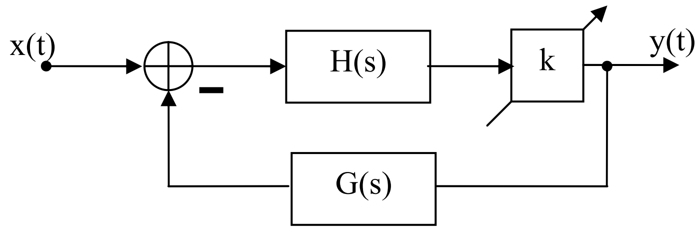
$$s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 9sY(s) + Y(s) = s^3X(s) + 6s^2X(s) + 8sX(s)$$
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^3 + 6s^2 + 8s}{s^3 + 6s^2 + 9s + 1}$$

Polinomul de la numitor are toți coeficienții pozitivi, deci se poate aplica criteriul Hurwitz.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 6, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 1$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$
$$\Delta_1 = 6 > 0$$
$$\Delta_2 = 54 - 1 = 53 > 0$$
$$\Delta_3 = 6\cdot 9\cdot 1 + 1\cdot 6\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 9\cdot 0 - 0\cdot 6\cdot 6 - 1\cdot 1\cdot 1 = 53 = \Delta_2$$

Sistemul considerat este deci stabil.

Problema 4. Se dă sistemul în buclă închisă din figură



Determinați valorile lui k pentru care acesta este stabil, dacă

a. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s+1}$

b. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s-1}$

c. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{(s+1)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}$

d. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s^2-1}$

e. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^2}$

f. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}$

g. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^4}$ (temă).

h. $H(s)G(s)=\dfrac{s+1}{s^2-4}$

i. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}$

Rezolvare

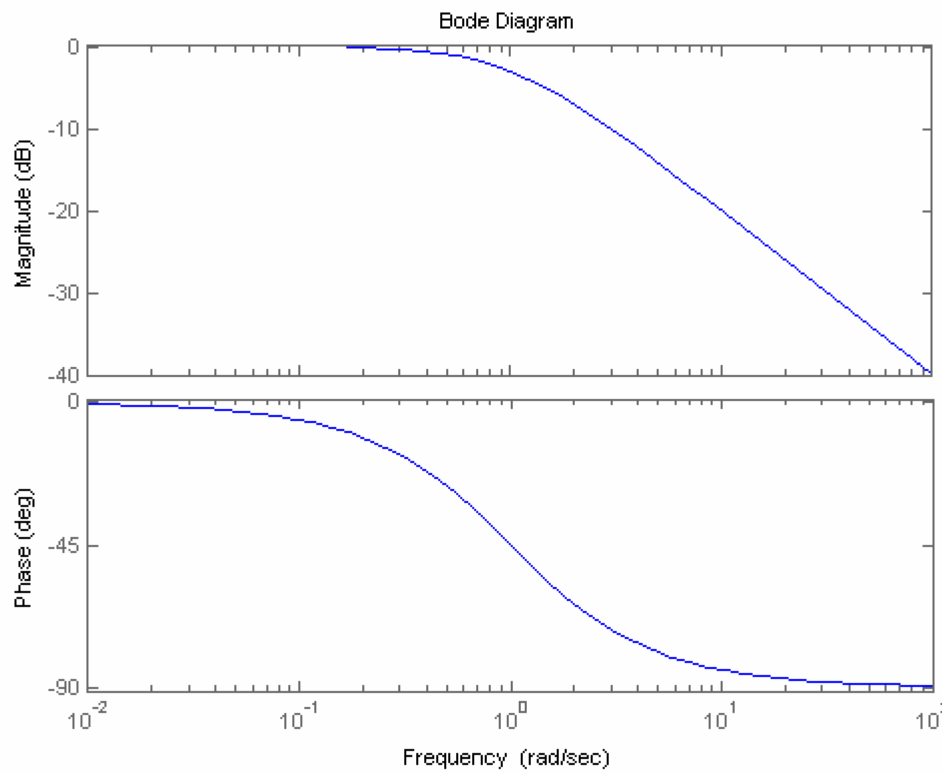
Punctul a. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s+1} \Rightarrow H(j\omega)G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega+1}$, $s_p = -1$

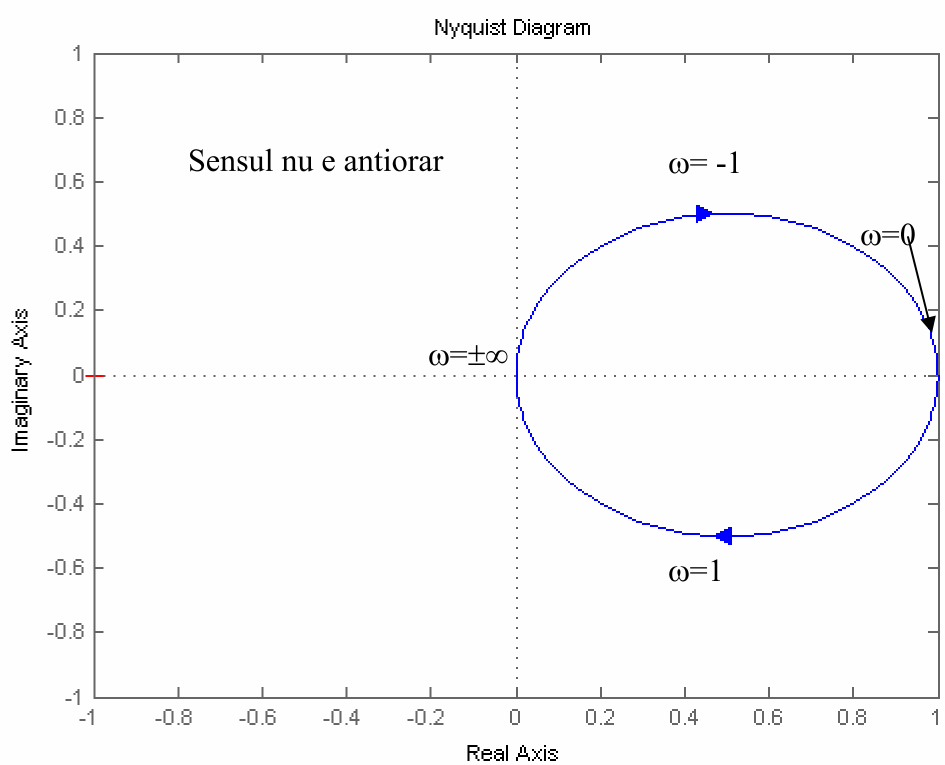
Pentru a desena hodograful se folosesc diagramele Bode.

$$\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\Rightarrow\ 20\log\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=-10\log\left(\omega^2+1\right)=-10\log\left(\left(\frac{\omega}{1}\right)^2+1\right)$$

$$\arg\left\{H(j\omega)G(j\omega)\right\}=-\arg(1+j\omega)=-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{1}\right)=-\operatorname{arctg}\omega$$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)


Nyquist Diagram
Sensul nu e antiorar
ω= -1
ω=0
ω=±∞
ω=1
Imaginary Axis
Real Axis

Sistemul în buclă deschisă este stabil => hodograful nu trebuie să încercuiască punctul $\left(-\frac{1}{k},0\right)$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{k}<0 \Rightarrow k>0 \text{ sau } -\frac{1}{k}>1 \Rightarrow k\in(-1,0)$$

Deci pentru stabilitate este necesar k>-1!

Punctul b. $H(s)G(s)=\frac{1}{s-1}$

Sistemul în buclă deschisă este instabil cu un pol în semiplanul drept $s_p=1$

$$|H(j\omega)G(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\arg\{H(j\omega)G(j\omega)\}=-\arg(-1+j\omega)=-\left[\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{-1}\right)\right]=-\pi+\operatorname{arctg}\omega$$

$$H(j\omega)G(j\omega)=\frac{1}{j\omega-1}=\frac{j\omega+1}{-\omega^2-1}=-\frac{j\omega+1}{\omega^2+1}$$

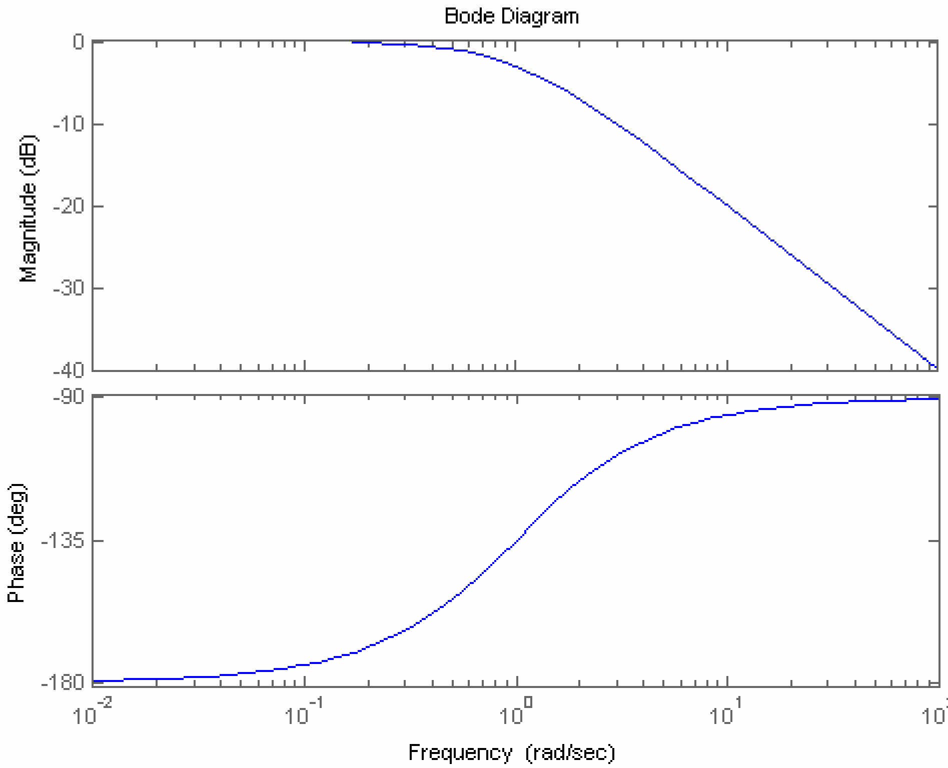
$$=\underbrace{-\frac{1}{\omega^2+1}}_{\text{Re}}+j\underbrace{\frac{-\omega}{\omega^2+1}}_{\text{Im}}$$

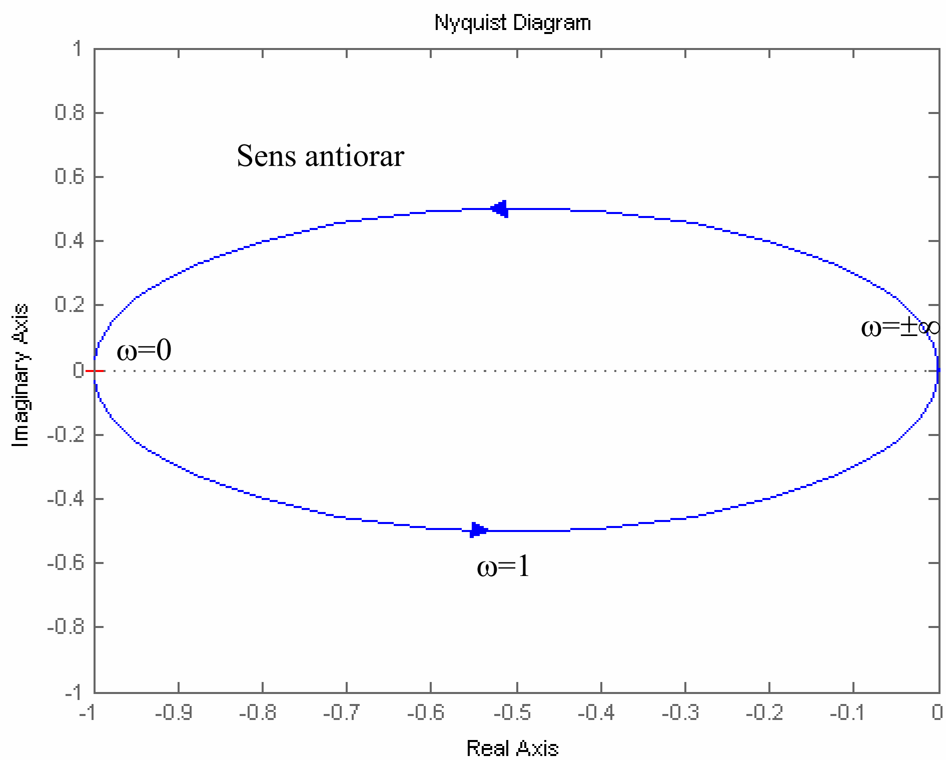
Pentru $\omega>0$ $\text{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}<0$, $\text{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}<0$

ω	$\text{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$	$\text{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$
0	-1	0
1	-1/2	-1/2
∞	0	0

Conturul Nyquist e străbătut în sens antiorar. Deci sistemul considerat va fi stabil dacă punctul $\left(-\frac{1}{k},0\right)$ va fi încercuit <u>o dată</u> în sens antiorar

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{k}>-1 \Rightarrow k>1 \\ -\frac{1}{k}<0 \Rightarrow k>0 \end{cases} \Rightarrow k>1$$. Deci sistemul este stabil pentru k>1.


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)


Nyquist Diagram
Sens antiorar
ω=0
ω=±∞
ω=1
Imaginary Axis
Real Axis

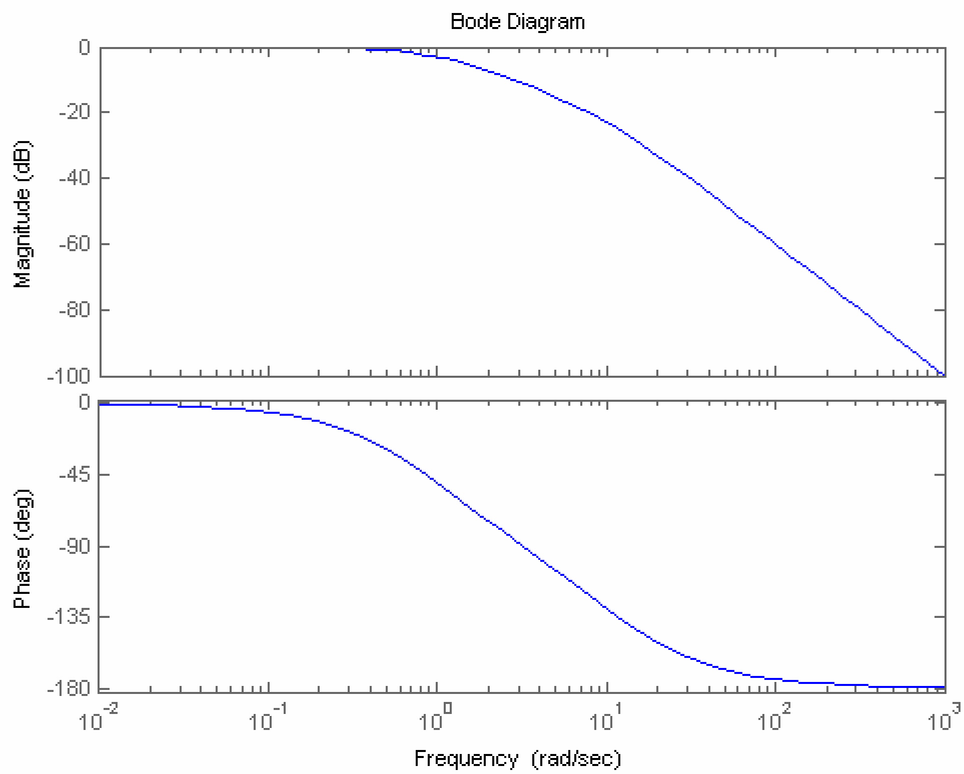
Punctul c. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{(s+1)\left(\dfrac{s}{10}+1\right)}$. Sistemul în buclă deschisă este stabil.

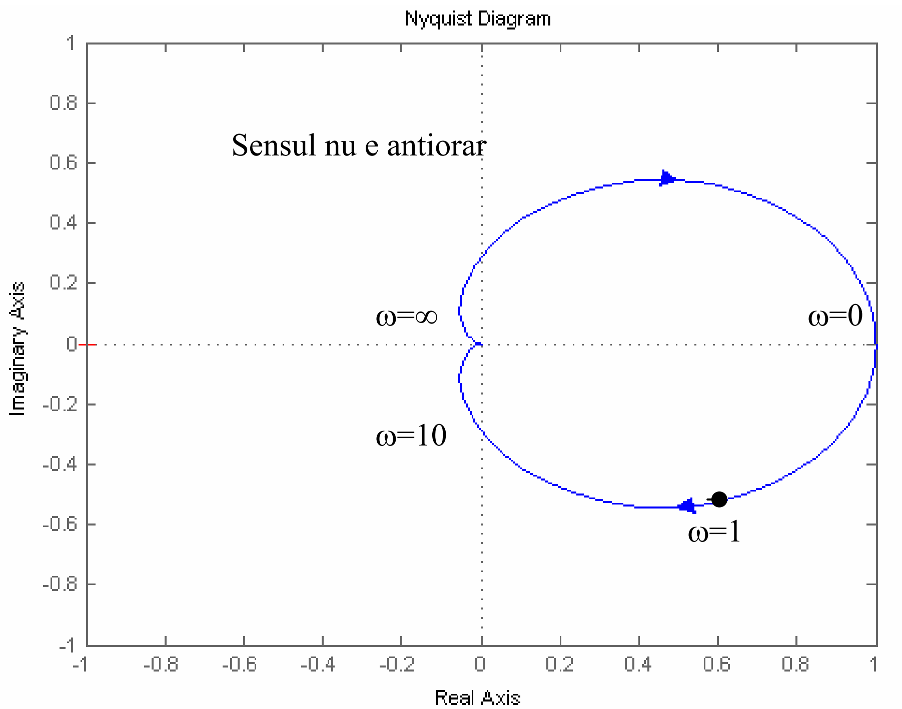
$$H(j\omega)G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)\left(\dfrac{j\omega}{10}+1\right)} \Rightarrow \left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}\cdot\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega}{10}\right)^2}}$$

$$20\log\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=-10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{1}\right)^2\right)-10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{10}\right)^2\right)$$

$$\arg\left\{H(j\omega)G(j\omega)\right\}=-\operatorname{arctg}(\omega)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$\begin{cases}-\dfrac{1}{k}<0\\ -\dfrac{1}{k}>1\end{cases} \Rightarrow k>-1$. **Sensul nu este antiorar=>punctul** $\left(-\dfrac{1}{k},0\right)$ **nu trebuie sa fie incercuit.**



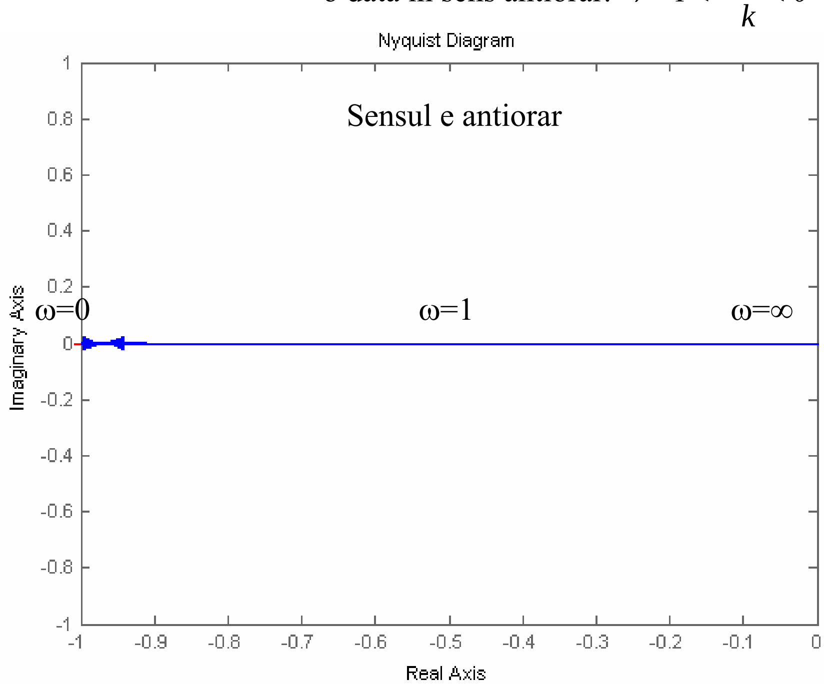


Punctul d. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s^2-1} \Rightarrow s_{p1,2}=\pm 1$. Sistemul în buclă deschisă este **instabil**.

$$H(j\omega)G(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2-1}=-\frac{1}{\omega^2+1}=\mathrm{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\};\ \mathrm{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}=0$$

ω	0	1	∞
$\mathrm{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$	-1	-1/2	0

Sistemul în buclă deschisă are un pol în semiplanul drept, pentru ca sistemul în buclă închisă să fie stabil este necesar ca punctul critic să fie încercuit o dată în sens antiorar. $\Rightarrow -1<-\dfrac{1}{k}<0 \Rightarrow k>1$

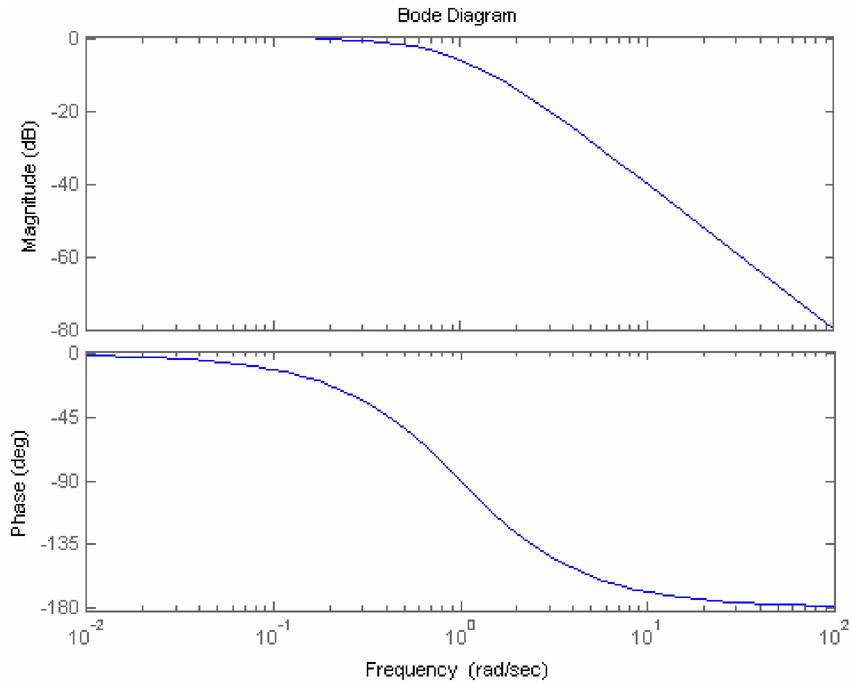


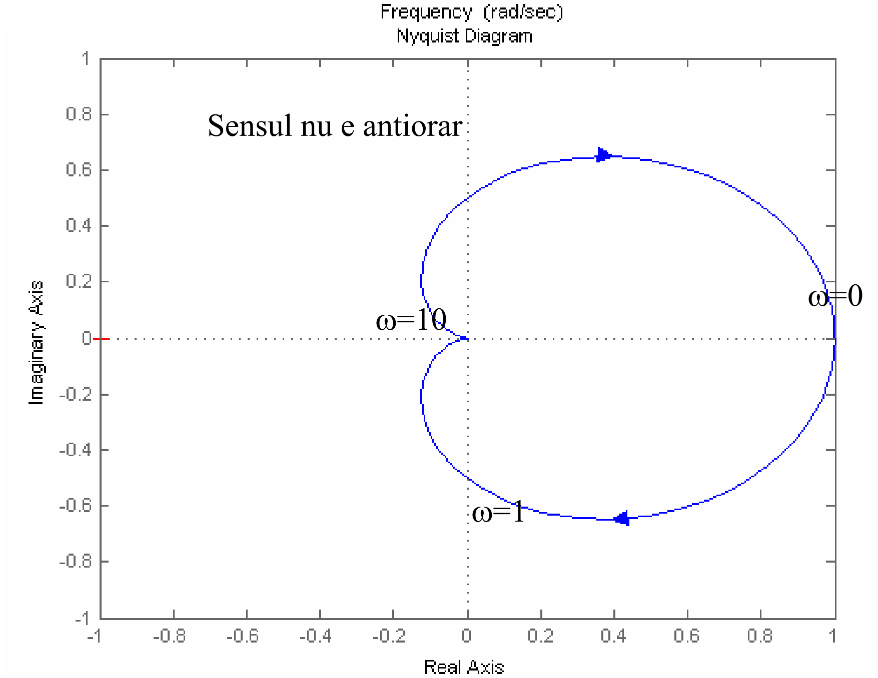
Punctul e. $H(s)G(s)=\frac{1}{(s+1)^2}\Rightarrow H(j\omega)G(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)^2}$

$\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=\frac{1}{1+\omega^2}\Rightarrow 20\log\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=-20\log\left(1+\left(\frac{\omega}{1}\right)^2\right)$

$\arg\left\{H(j\omega)G(j\omega)\right\}=-2\,\mathrm{arctg}(\omega)$

Deoarece sistemul în buclă deschisă este stabil e necesar ca punctul critic să nu fie încercuit $\Rightarrow -\frac{1}{k}<0$ sau $-\frac{1}{k}>1\Rightarrow k>0$ sau $-1<k<0\Rightarrow k>-1$



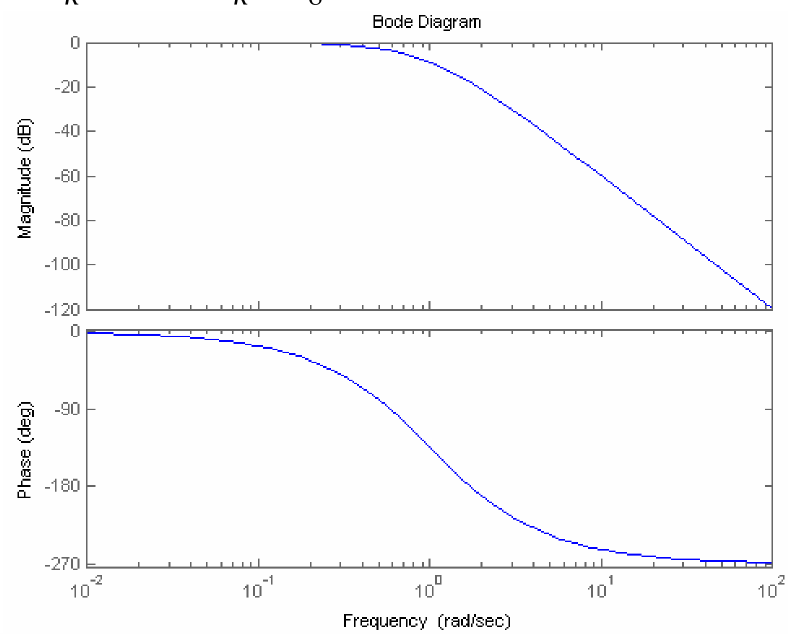


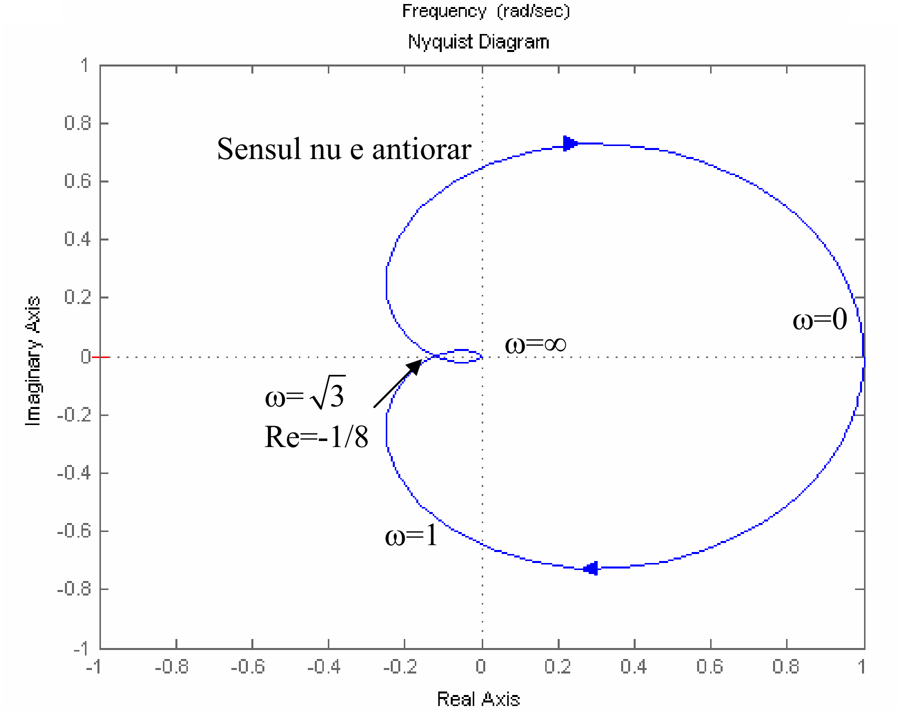
Punctul f. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{(s+1)^3}\Rightarrow H(j\omega)G(j\omega)=\dfrac{1}{(j\omega+1)^3}$

$$\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=\frac{1}{\left(\sqrt{1+\omega^2}\right)^3}\Rightarrow 20\log\left|H(j\omega)G(j\omega)\right|=-10\log\left[\left(1+\left(\frac{\omega}{1}\right)^2\right)^3\right]$$

$\arg\{H(j\omega)G(j\omega)\}=-3\operatorname{arctg}(\omega)$.

Sens antiorar $\Rightarrow -\dfrac{1}{k}>1$ sau $-\dfrac{1}{k}<-\dfrac{1}{8}\Rightarrow -1<k<0$ sau $k<8\Rightarrow k\in(-\infty,8)\cup(-1,0)$





Punctul g. temă.

Punctul h. $H(s)G(s)=\dfrac{s+1}{s^2-4}\Rightarrow s_{p1,2}=\pm 2\Rightarrow \operatorname{Re}\{s_{p1}\}>0$

Rezultă că sistemul în buclă deschisă este **instabil.**

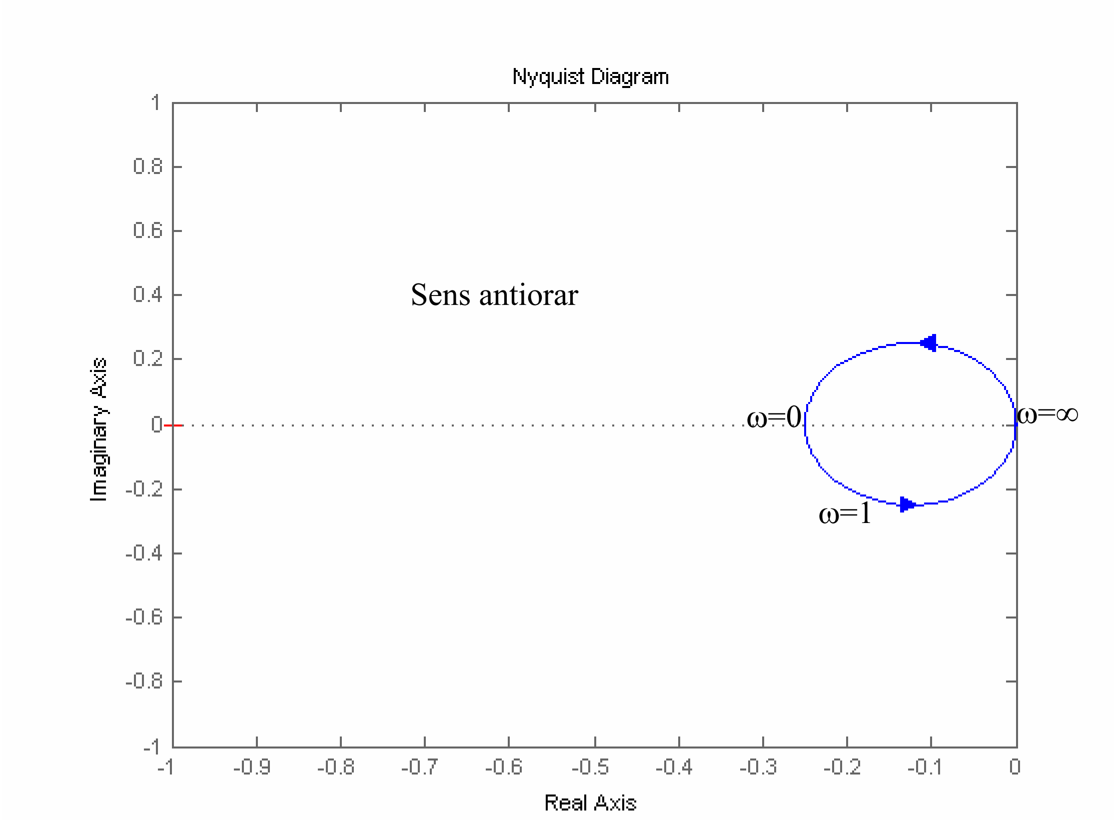
$$H(j\omega)G(j\omega)=\frac{j\omega+1}{-\omega^2-4}\Rightarrow \operatorname{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}=-\frac{1}{\omega^2+4},$$

$$\operatorname{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}=-\frac{\omega}{\omega^2+4}$$

ω	$\operatorname{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$	$\operatorname{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$
0	-1-4	0
1	-1/5	-1/5
∞	0	0

Sistemul este stabil pentru

$$-\frac{1}{4}<-\frac{1}{k}<0\Rightarrow k>4 \text{ si } k>0\Rightarrow k>4 \ .$$



i. $H(s)G(s)=\dfrac{1}{s^2+2s+2}\Rightarrow s_{p1,2}=-1\pm j\Rightarrow \operatorname{Re}\{s_{p1,2}\}<0$

Rezultă că sistemul în buclă deschisă este stabil.

$$H(j\omega)G(j\omega)=\frac{1}{-\omega^2+2j\omega+2}=\frac{2-\omega^2-2j\omega}{\left(2-\omega^2\right)^2+4\omega^2}=\frac{2-\omega^2-2j\omega}{4+\omega^4}$$

$$\mathrm{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}=\frac{2-\omega^2}{4+\omega^4};\quad \mathrm{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}=\frac{-2\omega}{4+\omega^4}$$

ω	0	$\sqrt{2}$	∞
$\mathrm{Re}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$	1/2	0	0
$\mathrm{Im}\{H(j\omega)G(j\omega)\}$	0	$-2\sqrt{2}/6$	0

$\Rightarrow -\frac{1}{k}<0$ sau $-\frac{1}{k}>\frac{1}{2}$

$\Rightarrow k>0$ sau $k>-2$

$\Rightarrow k\in(-2,\infty)$