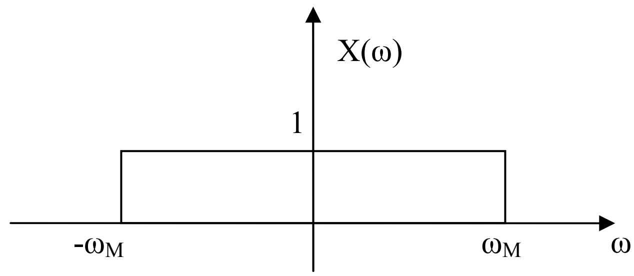
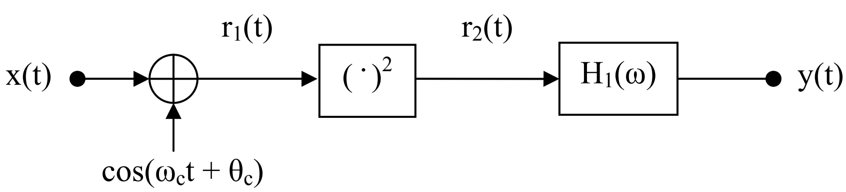
MODULAȚIA CU SEMNAL PURTĂTOR ARMONIC

Problema 1: Fie semnalul x(t) cu spectrul din figura $|X(\omega)| = \begin{cases} 1, \omega \in [-\omega_M, \omega_M] \\ 0, \omega \notin [-\omega_M, \omega_M] \end{cases}$



Acest semnal se aplică sistemului din figura 2:



modularea

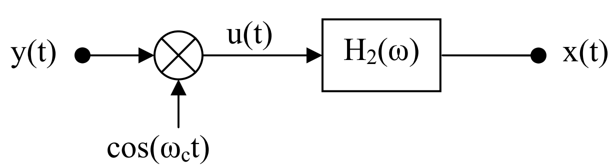
a) Să se reprezinte grafic spectrele semnalelor $r_1(t)$ si $r_2(t)$

b) Sistemul considerat realizează o modulație de amplitudine de produs (modulație de amplitudine cu purtătoare suprimată).
-Ce tip de filtru trebuie să fie sistemul cu răspunsul în frecvență $H_1(\omega)$?
-Ce condiții trebuie să indeplinească parametrii săi ?

c) Să se specifice constrângerile impuse asupra ''frecvențelor'' ω_c si ω_M (pulsații), astfel încât $y(t)$ să reprezinte un semnal modulat în amplitudine prin produs ?

d) Depinde răspunsul sistemului de faza semnalului modulator ?

e) Sistemul din figură demodulează semnalul $y(t)$:



demodularea

Să se determine tipul filtrului cu răspunsul în frecvență $H_2(\omega)$ şi parametrii săi.

Rezolvare :
Punctul a)

$r_1(t) = x(t) + \cos(\omega_c t + \theta_c)$

$$r_2(t) = r_1^2(t) = \left(x(t) + \cos(\omega_c t + \theta_c)\right)^2$$
$$= x^2(t) + \cos^2(\omega_c t + \theta_c) + 2x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)$$

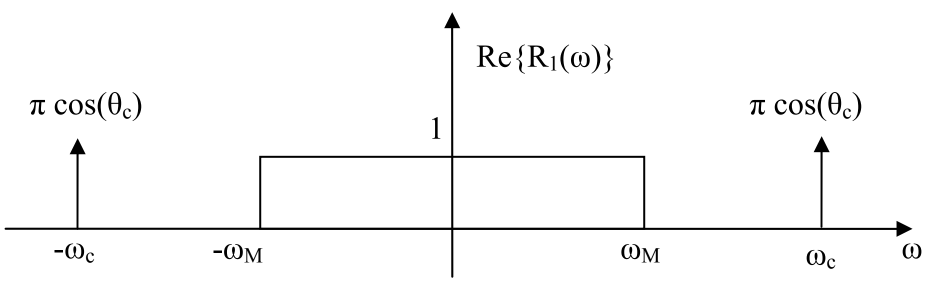
$$r_1(t) = x(t) + \frac{1}{2}\left[e^{j(\omega_c t + \theta_c)} + e^{-j(\omega_c t + \theta_c)}\right] = x(t) + \frac{1}{2}e^{j\theta_c}e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2}e^{-j\theta_c}e^{-j\omega_c t}$$

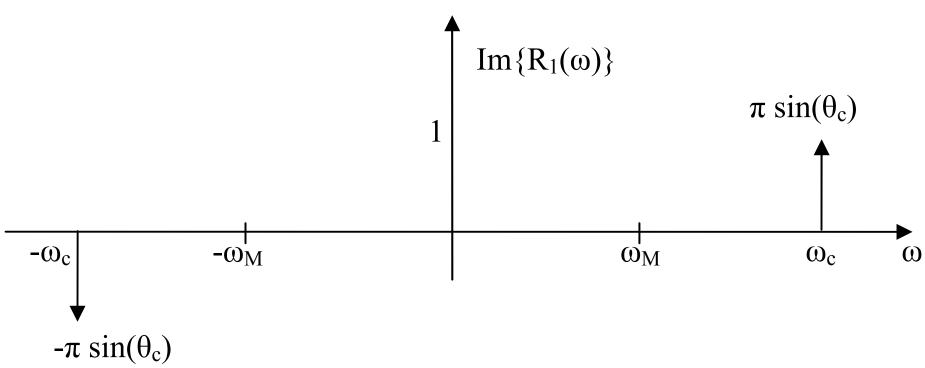
$$R_1(\omega) = X(\omega) + \frac{1}{2}e^{j\theta_c} \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}e^{-j\theta_c} \cdot 2\pi\delta(\omega + \omega_c)$$

Deci :

$$R_1(\omega) = X(\omega) + \pi e^{j\theta_c}\delta(\omega - \omega_c) + \pi e^{-j\theta_c}\delta(\omega + \omega_c)$$
$$= X(\omega) + \pi(\cos\theta_c + j\sin\theta_c)\delta(\omega - \omega_c) + \pi(\cos\theta_c - j\sin\theta_c)\delta(\omega + \omega_c)$$
$$= X(\omega) + \pi\cos\theta_c\delta(\omega - \omega_c) + \pi\cos\theta_c\delta(\omega + \omega_c)$$
$$+ j\left(\pi\sin\theta_c\delta(\omega - \omega_c) - \pi\sin\theta_c\delta(\omega + \omega_c)\right)$$

$$\mathrm{Re}\{R_1(\omega)\} = X(\omega) + \pi\cos\theta_c\left(\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)\right)$$
$$\mathrm{Im}\{R_1(\omega)\} = \pi\sin\theta_c\left(\delta(\omega - \omega_c) - \delta(\omega + \omega_c)\right)$$





Obs : $\pi\sin\theta_c$; $\pi\cos\theta_c$ s-au considerat a fi pozitive.

$$R_2(\omega)=\mathcal{F}\left\{x^2(t)\right\}(\omega)+\mathcal{F}\left\{\cos^2(\omega_c t+\theta_c)\right\}(\omega)+2\mathcal{F}\left\{x(t)\cos(\omega_c t+\theta_c)\right\}(\omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\underbrace{X(\omega)*X(\omega)}_{Y_1(\omega)}+\mathcal{F}\left\{\frac{1+\cos(2\omega_c t+2\theta_c)}{2}\right\}+2\cdot\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*\mathcal{F}\left\{\cos(\omega_c t+\theta_c)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}Y_1(\omega)+\frac{1}{2}2\pi\delta(\omega)+\frac{1}{4}\mathcal{F}\left\{e^{j2\omega_c t}\cdot e^{j2\theta_c}+e^{-j2\omega_c t}\cdot e^{-j2\theta_c}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[X(\omega)*\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{j(\omega_c t+\theta_c)}+e^{-j(\omega_c t+\theta_c)}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}Y_1(\omega)+\pi\delta(\omega)+\frac{1}{4}e^{j2\theta_c}\cdot 2\pi\delta(\omega-2\omega_c)+\frac{1}{4}e^{-j2\theta_c}\cdot 2\pi\delta(\omega+2\omega_c)$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[X(\omega)*\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}e^{j\theta_c}e^{j\omega_c t}+\frac{1}{2}e^{-j\theta_c}e^{-j\omega_c t}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}Y_1(\omega)+\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}e^{j2\theta_c}\delta(\omega-2\omega_c)+\frac{\pi}{2}e^{-j2\theta_c}\delta(\omega+2\omega_c)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*e^{j\theta_c}\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega_c)+X(\omega)*e^{-j\theta_c}\cdot 2\pi\delta(\omega+\omega_c)\right]$$

$$R_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}Y_1(\omega)+\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}\cos 2\theta_c\left(\delta(\omega-2\omega_c)+\delta(\omega+2\omega_c)\right)$$

$$+\cos\theta_c\left(X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right)+j\left[\frac{\pi}{2}\sin 2\theta_c\left(\delta(\omega-2\omega_c)+\delta(\omega+2\omega_c)\right)\right.$$

$$\left.+\sin\theta_c\left(X(\omega-\omega_c)-X(\omega+\omega_c)\right)\right]$$

unde: $Y_1(\omega)=X(\omega)*X(\omega)$

Se cunoaste rezultatul convolutiei a doua dreptunghiuri :

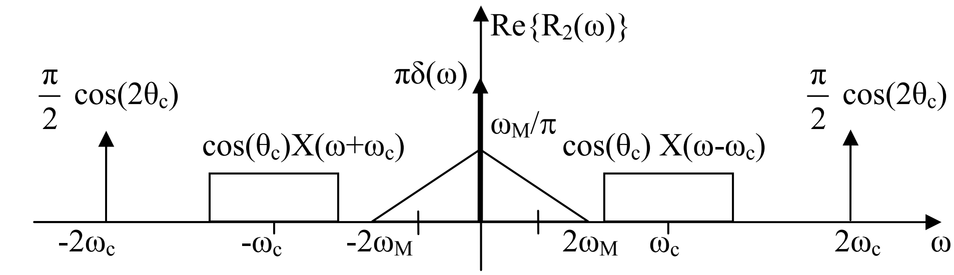
$\mathrm{rect}(\omega)*\mathrm{rect}(\omega)=\mathrm{tri}(\omega)$, unde $\mathrm{rect}(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<0.5\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$ şi $\mathrm{tri}(\omega)=\begin{cases}1-|\omega|, & |\omega|<1\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$

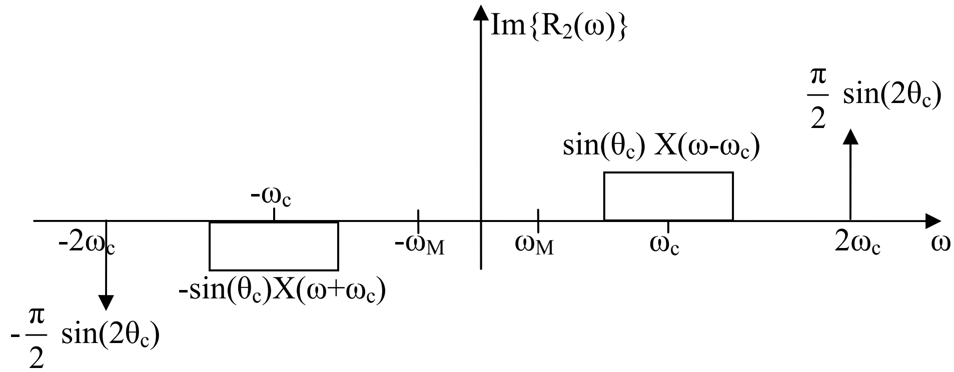
$|X(\omega)|=\mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{2\omega_M}\right)$ deci

$$|X(\omega)|*|X(\omega)|=2\omega_M\,\mathrm{tri}\left(\frac{\omega}{2\omega_M}\right)=\begin{cases}2\omega_M\left(1-\dfrac{|\omega|}{2\omega_M}\right), & |\omega|<2\omega_M\\ 0, & \text{in rest}\end{cases}$$

Observatie: $\displaystyle\int_{-\omega_M}^{\omega_M}X^2(\omega)d\omega=\int_{-\omega_M}^{\omega_M}1\,d\omega=2\omega_M$

Astfel, graficul lui $R_2(\omega)$ este :

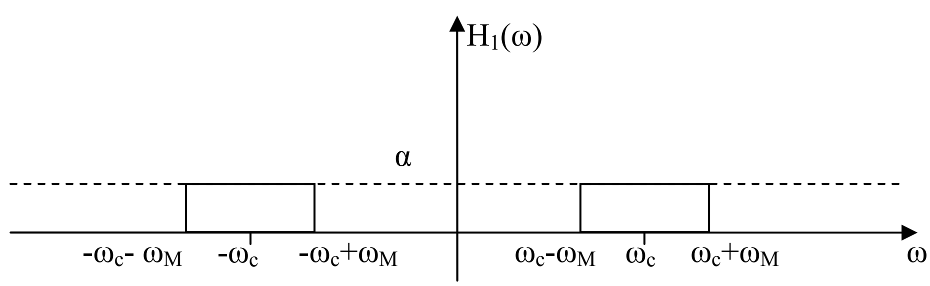




Punctul b) Semnalul modulat în amplitudine cu modulație de produs are expresia :

$$y(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta)$$

De aceea, filtrul cu răspunsul în frecvență $H_1(\omega)$ trebuie să rejecteze din semnalul $r_2(t)$ toate componentele spectrale din exteriorul benzii $[\omega_c - \omega_M, \omega_c + \omega_M]$. În consecință, acesta trebuie să fie un filtru de tip trece-bandă. Răspunsul său în frecvență trebuie să aibă forma din figura de mai jos:



Spectrul semnalului de la ieşirea acestui filtru este:

$$\begin{aligned} R_2(\omega)H_1(\omega) &= \alpha\Big(\cos\theta_c\left(X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right)+j\sin\theta_c\left(X(\omega-\omega_c)+X(\omega+\omega_c)\right)\Big) \\ &= \alpha\Big((\cos\theta_c + j\sin\theta_c)X(\omega-\omega_c)+(\cos\theta_c - j\sin\theta_c)X(\omega+\omega_c)\Big) \\ &= \alpha\Big(e^{j\theta_c}X(\omega-\omega_c)+e^{-j\theta_c}X(\omega+\omega_c)\Big) \end{aligned} \quad (1)$$

Dar :

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\left\{x(t)\cdot\frac{e^{j\omega_c t}}{2}\cdot e^{j\theta} + x(t)\cdot\frac{e^{-j\omega_c t}}{2}\cdot e^{-j\theta}\right\}(\omega)$$
$$= \left[\frac{e^{j\theta}}{2}X(\omega-\omega_c) + \frac{e^{-j\theta}}{2}X(\omega+\omega_c)\right] \qquad (2)$$

Identificând relațiile (1) si (2) se obține: $\alpha e^{j\theta_c} = \frac{1}{2}e^{j\theta}$

Adică: $\theta = \theta_c$ si $\alpha = \frac{1}{2}$

Deci amplificarea filtrului în banda de trecere trebuie să fie $\frac{1}{2}$.

Punctul c) $\omega_c > \omega_M$

Punctul d) Da, $y(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)$

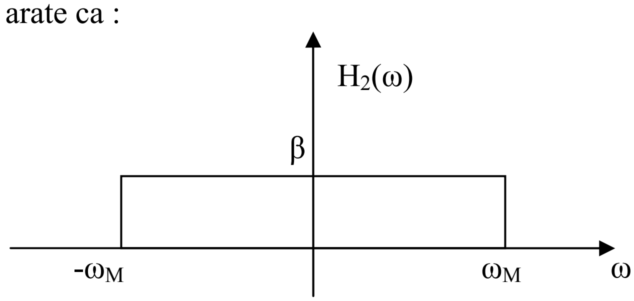
Punctul e)

$$u(t) = y(t)\cdot\cos\omega_c t = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)\cos(\omega_c t)$$

Dar: $\cos(\omega_c t + \theta_c)\cdot\cos\omega_c t = \frac{1}{2}\left[\cos\theta_c + \cos(2\omega_c t + \theta_c)\right]$

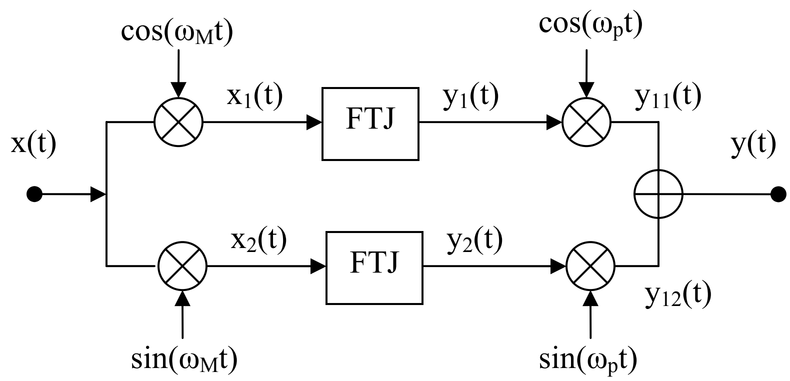
De aceea: $u(t) = \frac{1}{2}x(t)\cos\theta_c + \frac{1}{2}x(t)\cos(2\omega_c t + \theta_c)$

Filtrul cu răspunsul în frecvență $H_2(\omega)$ trebuie să fie de tip trece-jos. Răspunsul său în frecvență trebuie să arate ca :



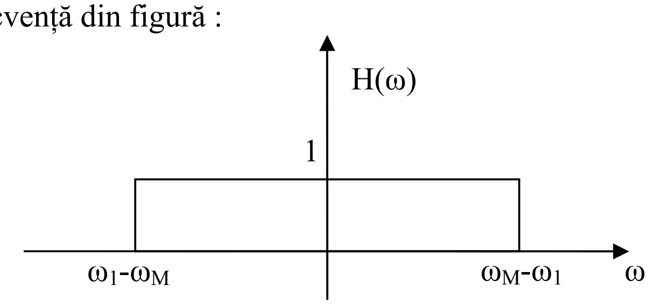
Răspunsul acestui filtru la semnalul $u(t)$ este: $\frac{\beta}{2}x(t)\cos\theta_c$. De aceea amplificarea sa trebuie să fie $\beta = \frac{2}{\cos\theta_c}$.

Problema 3: In figură este prezentată metoda Weaver de generare a semnalului modulat în amplitudine cu bandă laterală unică.

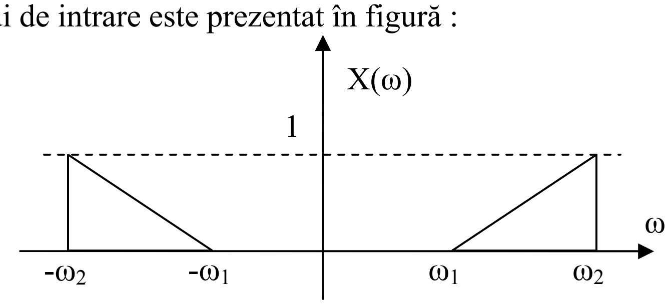


Filtrele trece-jos se consideră ideale cu pulsația de tăiere $\omega_M - \omega_1$, unde $\omega_M = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

şi răspunsul în frecvență din figură :



Spectrul semnalului de intrare este prezentat în figură :



Să se reprezinte grafic spectrul semnalului $y(t)$. Să se impună, dacă sunt necesare, condiții asupra frecventelor ω_M şi ω_p astfel încât $y(t)$ să reprezinte un semnal modulat în amplitudine cu bandă laterală unică.

Rezolvare : Fie :

$$x_1(t) = x(t)\cdot\cos\omega_M t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{X}_1(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_M) + X(\omega+\omega_M)\right]$$

$$x_2(t) = x(t)\cdot\sin\omega_M t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{X}_2(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_M) - X(\omega+\omega_M)\right]$$

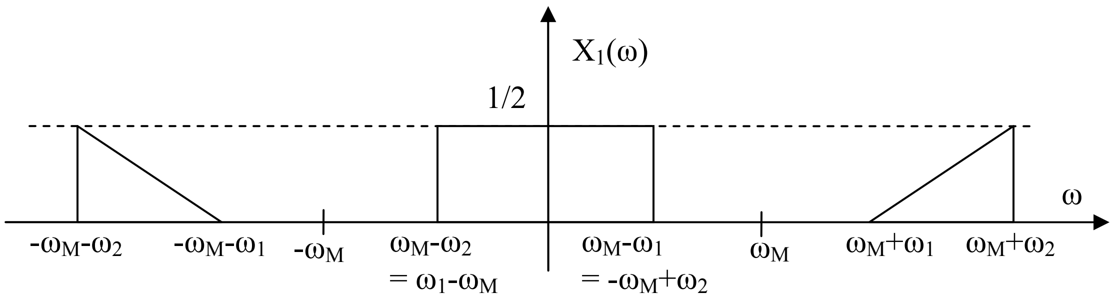
$y_1(t)$ si $y_2(t)$ semnalele de la iesirile filtrelor trece-jos de pe ramurile de sus si de jos.

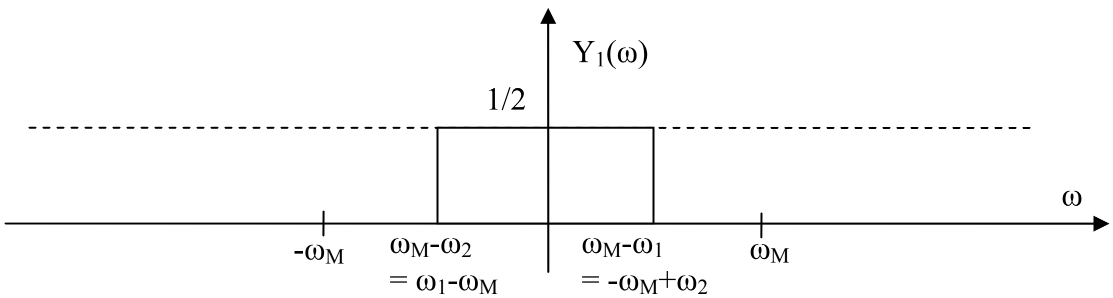
$$y_{11}(t)=y_1(t)\cos\omega_p(t)\ \Rightarrow\ \mathrm{Y}_{11}(\omega)=\frac{1}{2}\left[\mathrm{Y}_1\left(\omega-\omega_p\right)+\mathrm{Y}_1\left(\omega+\omega_p\right)\right]$$

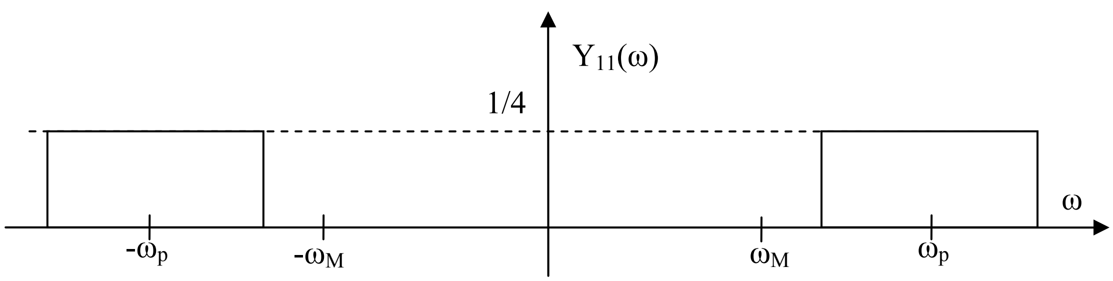
$$y_{12}(t)=y_2(t)\sin\omega_p(t)\ \Rightarrow\ \mathrm{Y}_{12}(\omega)=\frac{1}{2j}\left[\mathrm{Y}_2\left(\omega-\omega_p\right)-\mathrm{Y}_2\left(\omega+\omega_p\right)\right]$$

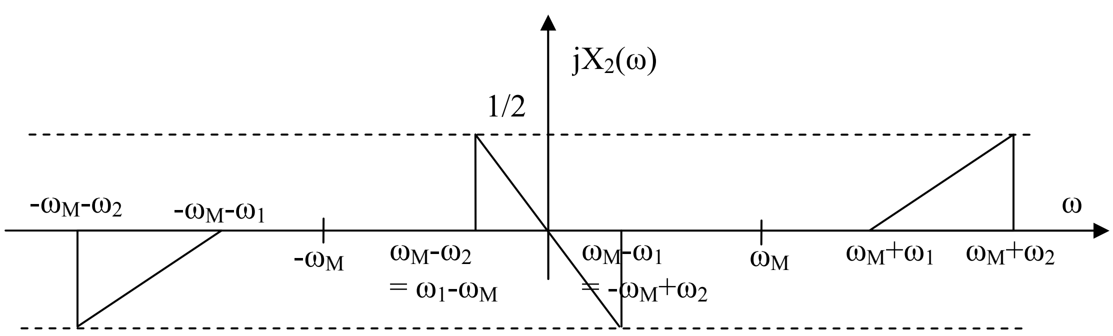
$$\mathrm{Y}_{12}(\omega)=\frac{1}{2}\left[-j\mathrm{Y}_2\left(\omega-\omega_p\right)+j\mathrm{Y}_2\left(\omega+\omega_p\right)\right]$$

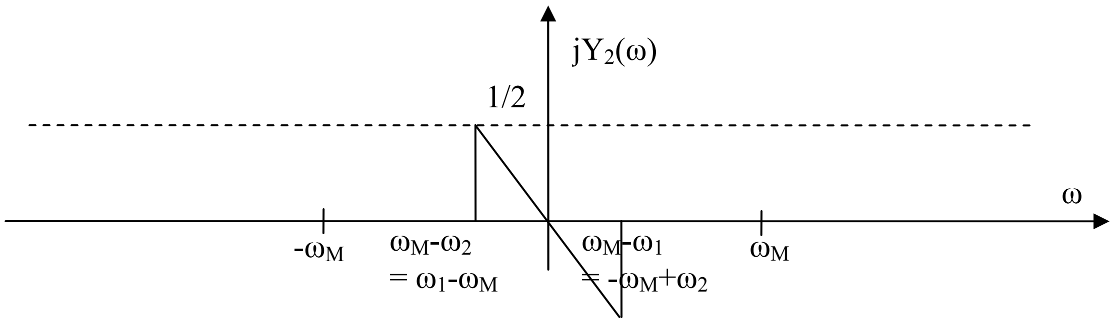
A fost selectată banda laterală superioară, după cum se vede în figură.

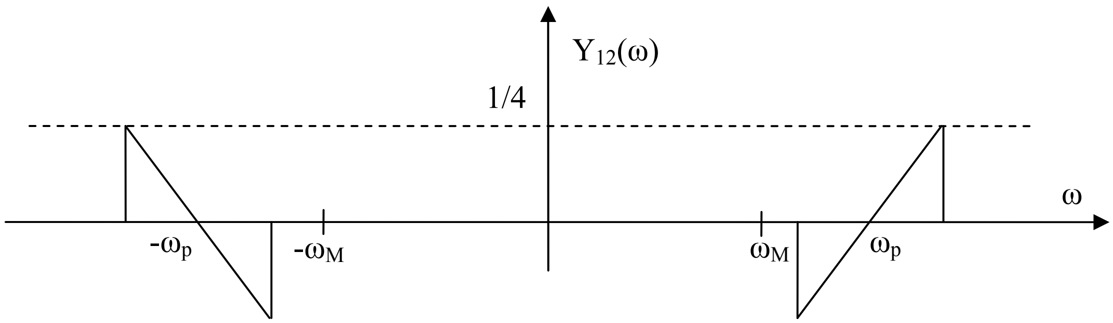


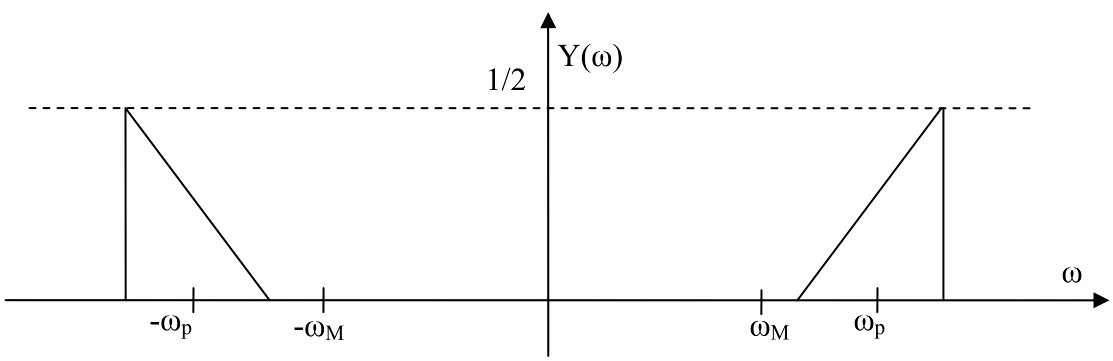




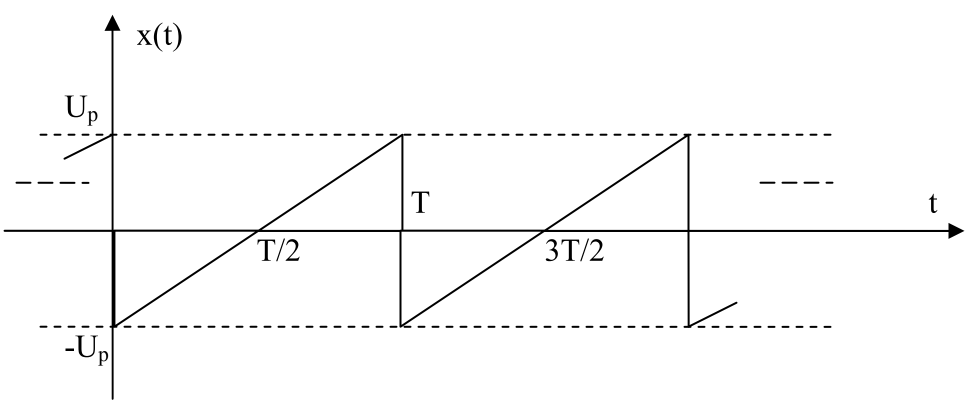








Problema 3 : Fie semnalul modulator cu forma de variatie din figura:



In urma modularii in amplitudine a unui semnal armonic, se obtine semnalul $x_{MA}(t)$ dat de relatia :

$$x_{MA}(t) = \left[U_0 + x(t)\right]\sin 2\pi f_0 t$$

a) Sa se determine banda ocupata de componentele spectrale ale semnalului modulat in amplitudine, a caror energie este mai mare decat 1% din energia purtatoarei,

b) Sa se determine puterea disipata in banda de la punctul a) de semnalul modulat in amplitudine, pe o rezistenta R.

Rezolvare :

Punctul a

$$x_{MA}(t) = U_0 \sin 2\pi f_0 t + x(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$= x_p(t) + x(t)\sin 2\pi f_0 t$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$x(t)\cdot \sin 2\pi f_0 t = \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right)\left(\frac{e^{j2\pi f_0} - e^{-j2\pi f_0}}{2j}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \cdot e^{j\left(k\frac{2\pi}{T}+2\pi f_0\right)t} - \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_k \cdot e^{j\left(k\frac{2\pi}{T}-2\pi f_0\right)t}\right)$$

Energia cuprinsa in banda ceruta va fi :

$$E_X = 2\cdot\frac{1}{4}\sum_{k=-K}^{k=+K}\left|c_k\right|^2$$

Se determina coeficientii Fourier c_k ai semnalului $x(t)$:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\cdot dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}\left(\frac{2U_p}{T}t - U_p\right)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\cdot dt$$

$$= \frac{2U_p}{T^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\cdot dt - \frac{U_p}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\cdot dt$$

$$I_1=\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\cdot dt=-\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} t\cdot d\left(e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\right)$$

$$=-\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}}\left[t\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}-\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\cdot dt\right]$$

$$=-\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}}\left[\frac{T}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}}+\frac{T}{2}e^{-jk\frac{2\pi}{T}\cdot\left(-\frac{T}{2}\right)}-I_2\right]$$

$$=-\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}}\left[\frac{T}{2}e^{-jk\pi}+\frac{T}{2}e^{+jk\pi}-I_2\right]=-\frac{T^2}{4k\pi j}\left(2\cdot(-1)^k-I_2\right)$$

$$I_2=-\frac{1}{jk\frac{2\pi}{T}}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} d\left(e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\right)=-\frac{T}{2k\pi j}\left(e^{-jk\pi}-e^{jk\pi}\right)=-\frac{T}{2k\pi j}\left(\left(-1^k\right)-\left(-1^k\right)\right)=0$$

$$I_1=\frac{jT^2(-1)^k}{2k\pi}\quad\text{pentru } k\neq 0$$

Deci : $c_k=j\dfrac{2U_p}{2k\pi}(-1)^k \quad\Leftrightarrow\quad c_k=j\dfrac{U_p}{k\pi}(-1)^k$ pentru $k\neq 0$.

Deoarece $x(t)$ este impar $\Rightarrow$ $c_0=0$

$$E_x=\frac{1}{2}\sum_{k=-K}^{k=K}\frac{U_p^2}{k^2\pi^2}=\frac{U_p^2}{2\pi^2}\sum_{k=-K}^{k=K}\frac{1}{k^2}$$

Energia purtatoarei este : $\dfrac{U_0^2}{2}$.

Conditia din enunt este : $\left|c_k\right|^2>\dfrac{\frac{U_0^2}{2}}{100} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{U_p^2}{k^2\pi^2}>\dfrac{U_0^2}{200}$

$$\Rightarrow\frac{1}{k^2}>\frac{U_0^2\pi^2}{200U_p^2}\quad\Leftrightarrow k^2<\frac{200U_p^2}{\pi^2U_0^2}\quad\Leftrightarrow\quad |k|<\frac{10\sqrt{2}\cdot U_p}{\pi\cdot U_0}$$

Banda ceruta este : $2\left[\dfrac{10\sqrt{2}\cdot U_p}{\pi\cdot U_0}\right]$

Punctul b. Fie : $K=\left[\dfrac{10\sqrt{2}\cdot U_p}{\pi\cdot U_0}\right]$

$$x(t)=\sum_{k=-K}^{k=K} j\frac{U_p}{k\pi}(-1)^k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$=\sum_{k=-K}^{-1} j\frac{U_p}{k\pi}(-1)^k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}+\sum_{k=1}^{K} j\frac{U_p}{k\pi}(-1)^k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}$$

$$=j\left(-\sum_{k=1}^{k=K}\frac{U_p}{k\pi}(-1)^k\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}+\sum_{k=1}^{K}\frac{U_p}{k\pi}(-1)^k\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}t}\right)$$

$$=j\sum_{k=1}^{K}\frac{U_p}{k\pi}(-1)^k\cdot 2j\cdot\sin k\frac{2\pi}{T}t$$

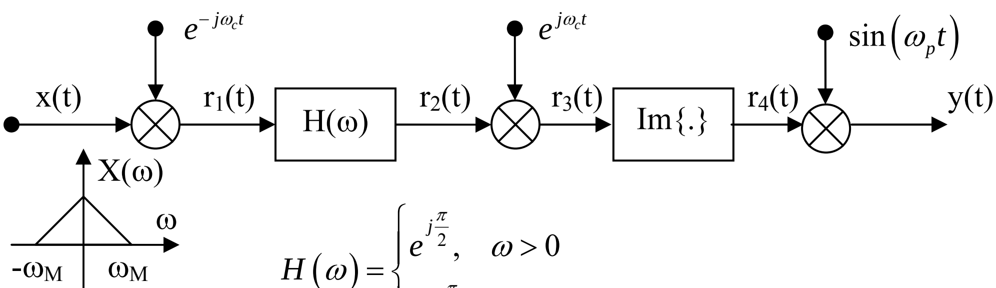
$$=-2\sum_{k=1}^{K}\frac{U_p}{k\pi}\sin k\frac{2\pi}{T}t$$

$$x_{MA}(t)=\left[U_0-2\frac{U_p}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{k}\sin\frac{k2\pi}{T}t\right]\sin\omega_0 t$$

$$=U_0\sin\omega_0 t-2\frac{U_p}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{2k}\left\{\cos\left[\left(\frac{k2\pi}{T}-2\pi f_0\right)t\right]-\cos\left[\left(\frac{k2\pi}{T}-2\pi f_0\right)t\right]\right\}$$

$$P=\frac{U_0^2}{2R}+2\frac{U_p}{\pi}\sum_{k=1}^{K}\frac{\left(\frac{U_p}{\pi k}\right)^2}{2R}=\frac{1}{2R}\left[U_0^2+2\sum_{k=1}^{K}\frac{U_p^2}{\pi^2k^2}\right]$$

Problema 4.
Se consideră sistemul din figură



$$H(\omega)=\begin{cases}e^{j\frac{\pi}{2}}, & \omega>0\\ e^{-j\frac{\pi}{2}}, & \omega<0\end{cases}$$

a. Să se reprezinte grafic spectrele semnalelor $r_1(t)$, $r_2(t)$, $r_3(t)$, $r_4(t)$ şi $y(t)$.
b. La ieşirea sistemului considerat se conectează un filtru trece-bandă. Care sunt parametrii acestui filtru astfel încât semnalul de la ieşirea noului sistem să fie modulat în amplitudine cu rest de bandă laterală ?

Rezolvare.
Punctul a)

$$r_1(t) = x(t)\cdot e^{-j\omega_c t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_1(\omega) = X(\omega+\omega_c)$$

$$\mathrm{R}_2(\omega) = \mathrm{R}_1(\omega) H(\omega) = jX(\omega+\omega_c) \ \text{ daca } \ \omega_c > \omega_M$$

$$r_3(t) = r_2(t)\cdot e^{j\omega_c t} \ \Rightarrow \ \mathrm{R}_3(\omega) = \mathrm{R}_2(\omega-\omega_c) = jX(\omega)$$

$$\Rightarrow \ r_3(t) = jx(t)$$

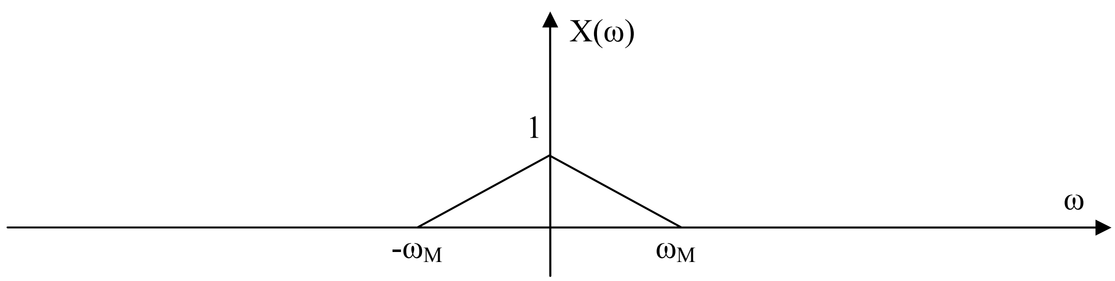
$X(\omega)$ este functie reala para $\Rightarrow$ $x(t)$ este functie reala para

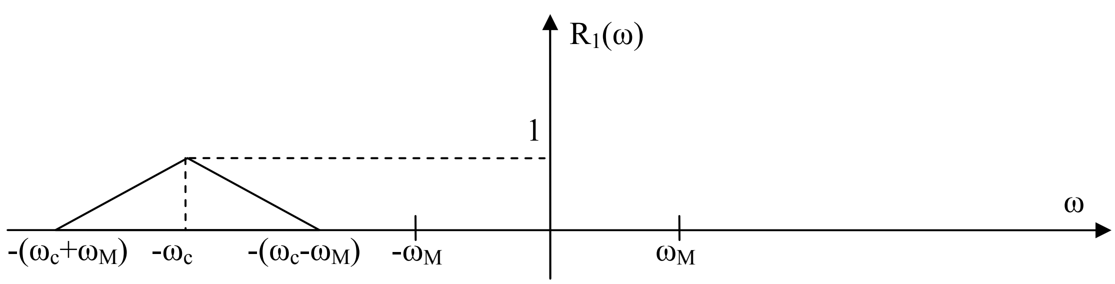
$$\Rightarrow \ r_3(\mathrm{t}) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$$

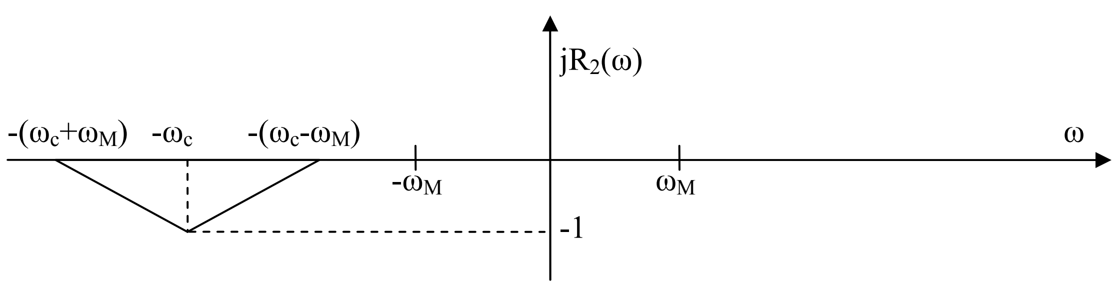
$$\Rightarrow r_4(\mathrm{t}) = x(t) \Rightarrow y(t) = r_4(\mathrm{t})\sin\omega_p t$$

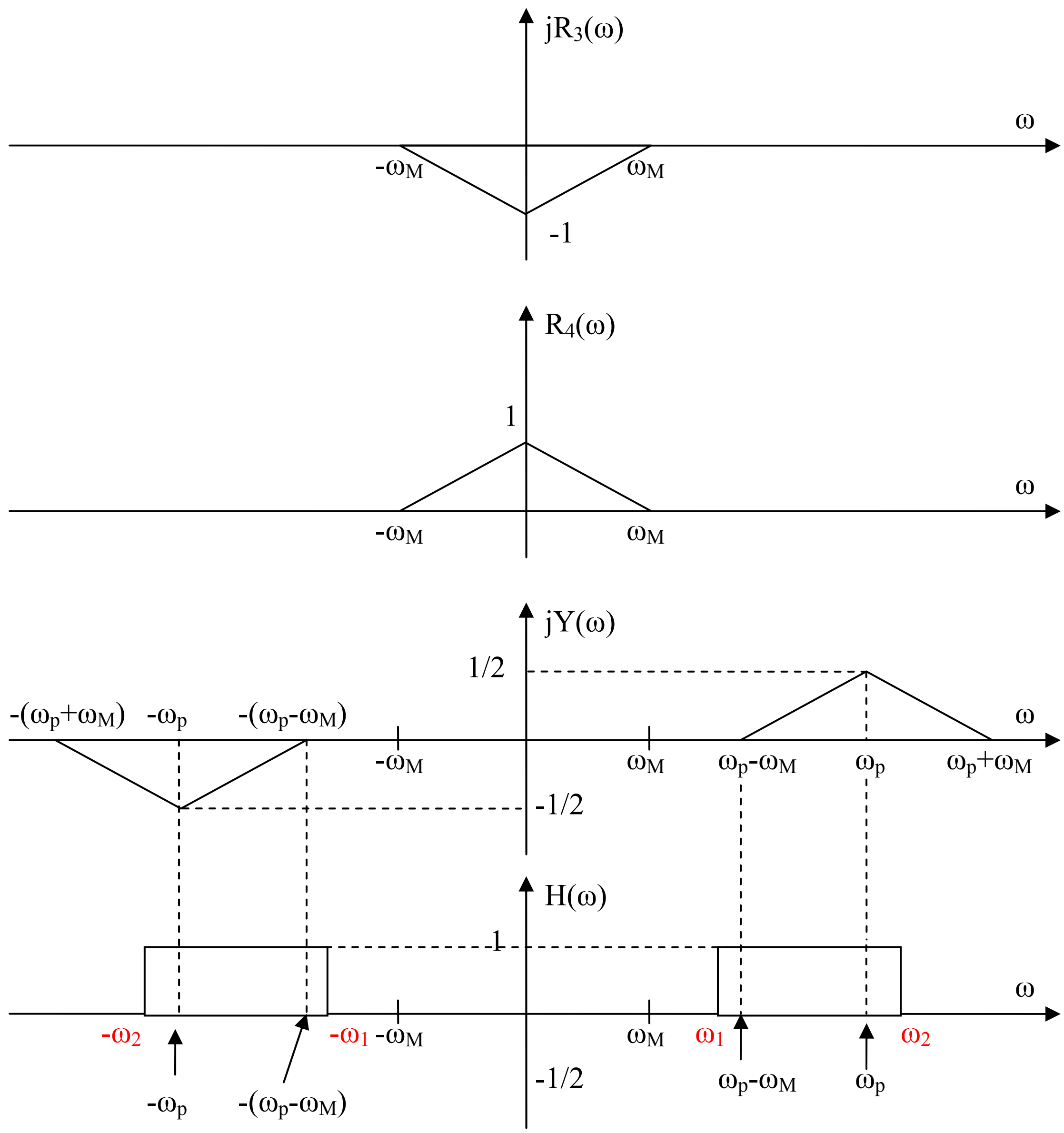
$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2j}\Big[R_4\big(\omega-\omega_p\big) - R_4\big(\omega+\omega_p\big)\Big]$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2j}\Big[X\big(\omega-\omega_p\big) - X\big(\omega+\omega_p\big)\Big]$$









Punctul b) Rezulta: $\omega_1 < \omega_p - \omega_M$ şi $\omega_2 > \omega_p$

Problema 5. Fie semnalul modulat în amplitudine

$$x_{MA}(t) = A_c\left[1 + m\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right]\cos\omega_c t$$

Presupunem îndeplinite condițiile $\omega_0 \ll \omega_c$ şi $m \leq 100\%$. Prin înlăturarea purtătoarei şi a benzii laterale inferioare din spectrul semnalului $x_{MA}(t)$, se obține un semnal MA cu BLU.

a) să se determine anvelopa complexă a semnalului astfel obținut.
b) Să se determine modulul $R(t)$ şi faza $\theta(t)$ ale anvelopei complexe.

Rezolvare
Punctul a)

$$x_{MA}(t)=\underbrace{A_c\cos\omega_c t}_{\text{purtatoare}}+\underbrace{\frac{mA_c}{2}\cos\left(\left(\omega_c-\omega_0\right)t-\varphi_0\right)}_{\text{banda laterala inferioara}}+\underbrace{\frac{mA_c}{2}\cos\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)}_{\text{banda laterala superioara}}$$

$$x_{MA-BLU}(t)=\frac{mA_c}{2}\cos\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)$$

Se determina transformata Hilbert a acestui semnal, $\tilde{x}_{MA-BLU}(t)$:

$$X_{MA-BLU}(\omega)=\frac{mA_c}{4}\mathcal{F}\left\{e^{j\left(\omega_c+\omega_0\right)t}\cdot e^{j\varphi_0}+e^{-j\left(\omega_c+\omega_0\right)t}\cdot e^{-j\varphi_0}\right\}$$

$$=\frac{mA_c}{4}\left[e^{j\varphi_0}\cdot 2\pi\delta\left(\omega-\omega_c-\omega_0\right)+e^{-j\varphi_0}\cdot 2\pi\delta\left(\omega+\omega_c+\omega_0\right)\right]$$

$$\tilde{X}_{MA-BLU}(\omega)=-j\,\mathrm{sgn}\,\omega X_{MA-BLU}(\omega)$$

$$=\frac{mA_c\cdot 2\pi}{4j}\left[e^{j\varphi_0}\cdot\delta\left(\omega-\omega_c-\omega_0\right)+e^{-j\varphi_0}\cdot\delta\left(\omega+\omega_c+\omega_0\right)\right]$$

Dar:

$$\mathcal{F}\left\{\sin\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)\right\}=\frac{1}{2j}\mathcal{F}\left\{e^{j\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)}-e^{-j\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[2\pi\delta\left(\omega-\omega_c-\omega_0\right)\cdot e^{j\varphi_0}-2\pi\delta\left(\omega+\omega_c+\omega_0\right)\cdot e^{-j\varphi_0}\right]$$

De aceea:

$$\tilde{X}_{MA-BLU}(\omega)=\frac{mA_c}{2}\mathcal{F}\left\{\sin\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)\right\}$$

adica:

$$\tilde{x}_{MA-BLU}(t)=\frac{mA_c}{2}\sin\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)$$

Semnalul analitic asociat este:

$$x_{MA-BLU_a}(t)=x_{MA-BLU}(t)+j\tilde{x}_{MA-BLU}(t)=\frac{mA_c}{2}e^{j\left(\left(\omega_c+\omega_0\right)t+\varphi_0\right)}$$

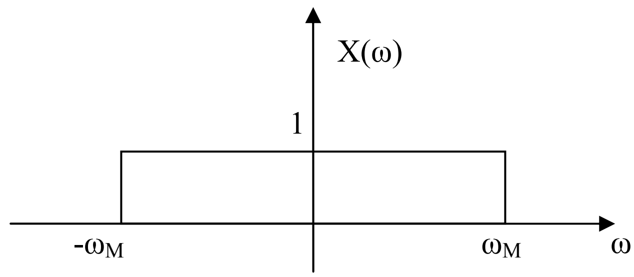
Anvelopa complexa a semnalului $x_{MA-BLU}(t)$ este:

$$\underset{\sim}{x}_{MA-BLU}(t)=x_{MA-BLU_a}(t)\cdot e^{j\omega_0 t}\cdot e^{j\varphi_0}$$

$$R(t)=\left|\underset{\sim}{x}_{MA-BLU}(t)\right|=\frac{mA_c}{2}$$

$$\theta(t)=\arg\left\{\underset{\sim}{x}_{MA-BLU}(t)\right\}=\omega_0 t+\varphi_0$$

Problema 6. Fie x(t) un semnal de bandă limitată, cu spectrul din figură.



Acesta se prelucrează astfel încât să se obțină un semnal $x_1(t)$ care îndeplineşte condițiile $\left|x_1(t)\right| < 1$ si $X_1(\omega)\big|_{\omega=0} = 0$. Semnalul astfel normalizat, modulează în frecvență, cu indicele de modulație $\beta \ll \pi/2$ o purtătoare armonică, obținunându-se

$$y_{MF}(t) = A_0 \cos\left(\omega_c t + \beta \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau\right)$$

a. Să se determine frecvența instantanee ω_i a semnalului $y_{MF}(t)$.
b. Utilizând aproximațiile modulării în frecvență de bandă îngustă, să se reprezinte grafic spectrul semnalului $y_{MF}(t)$, presupunând cunoscut spectrul lui $x_1(t)$.
c. Presupunând semnalul modulator armonic, expresia semnalului modulat în frecvență devine $y'_{MF}(t) = A_0 \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_m t)$, $\beta = \Delta\omega/\omega_m$. Să se reprezinte grafic spectrul semnalului modulat MF de bandă largă pentru $A_0 = 1\text{V}$ şi $\beta = 2$.

Rezolvare
Punctul a)

$$\omega_i(t) = \frac{d}{dt}\left(\omega_c t + \beta \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau\right) = \omega_c t + \beta x_1(t)$$

Punctul b)

$$\int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)\, d\tau = y(t)$$

$$y_{MF}(t) = A_0 \cos(\omega_c t + \beta y(t)) = A_0 \cos\omega_c t \cos(\beta y(t)) - \sin\omega_c t \sin(\beta y(t))$$

Aproximatiile de banda ingusta:

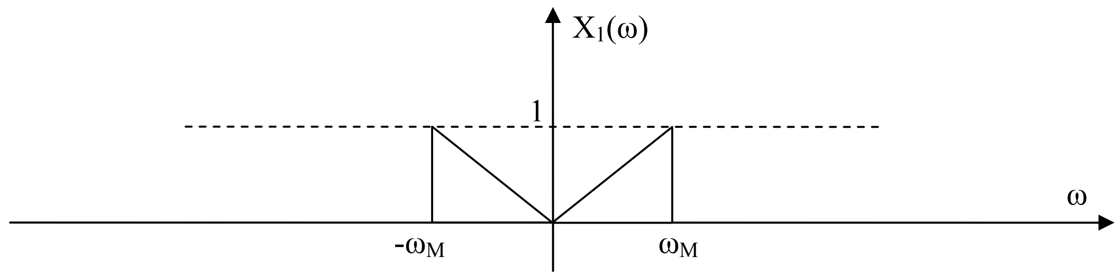
$\cos\beta y(t) \simeq 1$ si $\sin\beta y(t) \simeq \beta y(t)$

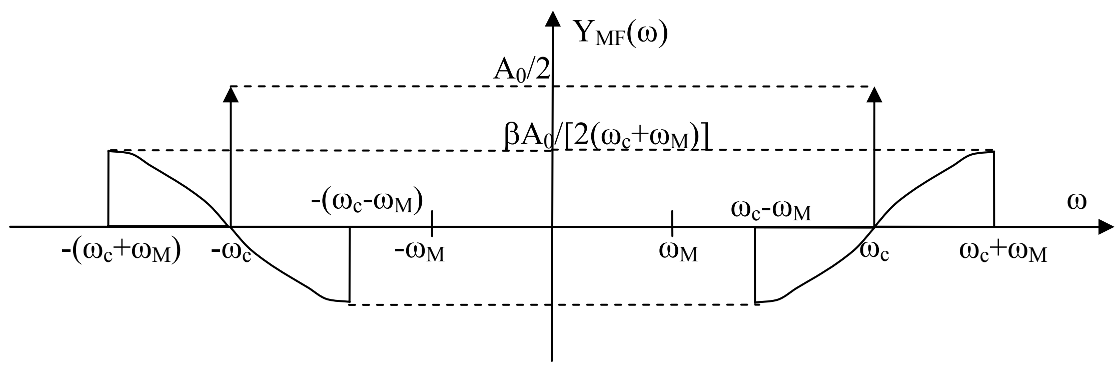
$$y_{MF}(t) = A_0 (\cos\omega_c t - \sin\omega_c t \cdot \beta y(t))$$
$$= A_0 \cos\omega_c t - \beta A_0 y(t) \sin\omega_c t$$

$$Y_{MF}(\omega) = \frac{A_0}{2}\left(\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)\right) - \beta \frac{A_0}{2j}\left(Y(\omega - \omega_c) - Y(\omega + \omega_c)\right)$$

Deoarece: $X_1(0) = 0 \;\Rightarrow\; Y(\omega) = \frac{1}{j\omega} X_1(\omega)$

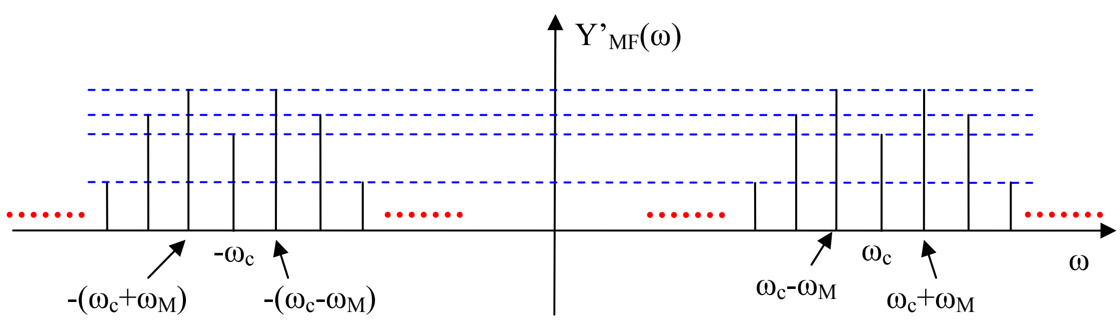
$$Y_{MF}(\omega)=\frac{A_0}{2}\left(\delta(\omega-\omega_c)+\delta(\omega+\omega_c)\right)+\frac{\beta A_0}{2}\left(\frac{X_1(\omega-\omega_c)}{\omega-\omega_c}-\frac{X_1(\omega+\omega_c)}{\omega+\omega_c}\right)$$





Punctul c)

$$Y'_{MF}(t)=A_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(\beta)\cos(\omega_c+k\omega_M)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}J_k(2)\cos(\omega_c+k\omega_M)$$



Problema 7. Un semnal dreptunghiular θ(t) cu factor de umplere 50% modulează în fază un semnal purtător armonic, obținându-se

$$y_{M\phi}(t)=10\cos(\omega_c t+\theta(t))$$

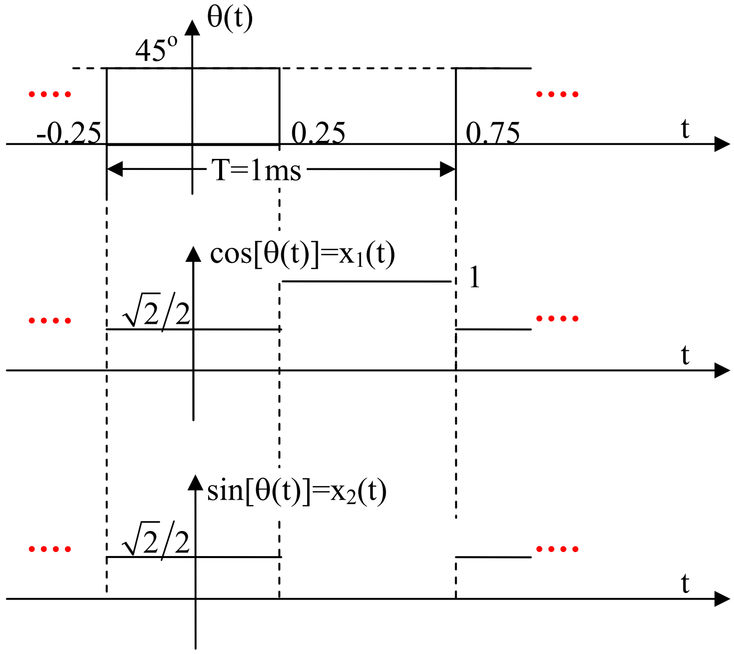
Frecvența semnalului purtător este de 10MHz iar deviația de fază maximă este 45^0. Semnalul modulator este simetric față de momentul t=0 și are perioada 1ms. Să se reprezinte spectrul semnalului modulat în fază în cazul în care semnalul modulator este:

a) unipolar, respectiv

b) bipolar.

$$y_{M\phi}(t)=10\cos\left[\omega_c t+\theta(t)\right]=10\cos\omega_c t\cdot\cos\left(\theta(t)\right)-10\sin\omega_c t\cdot\sin\left(\theta(t)\right)$$

Punctul a)



$$x_{1_r}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & t\in[-0{,}25,\ +0{,}25\ ]\\ 1, & t\in[0{,}25,\ +0{,}75\ ]\end{cases}\qquad x_{2_r}(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & t\in[-0{,}25,\ +0{,}25\ ]\\ 0, & t\in[0{,}25,\ +0{,}75\ ]\end{cases}$$

$$y_{M\phi}(t)=10x_1(t)\cos\omega_c t-10x_2\sin\omega_c t$$

$$Y_{M\phi}(\omega)=10\left(X_1(\omega-\omega_c)-\frac{1}{j}X_2(\omega-\omega_c)+\frac{1}{j}X_2(\omega+\omega_c)\right)\qquad \textbf{(1)}$$

$$c_{k_{x_1}}=\frac{1}{10^{-3}}\int_{-0,25\cdot10^{-3}}^{+0,25\cdot10^{-3}}x_{1r}(t)\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{10^{-3}}t}dt$$

$$=10^3\left[\int_{-0,25\cdot10^{-3}}^{0,25\cdot10^{-3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-jk2000\pi t}dt+\int_{0,25\cdot10^{-3}}^{0,75\cdot10^{-3}}1\cdot e^{-jk2000\pi t}dt\right]$$

$$=10^3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{1}{2000\pi\, jk}\int_{-0,25\cdot10^{-3}}^{0,25\cdot10^{-3}}d\left(e^{-jk2000\pi t}\right)\right)-\frac{1}{2000\pi\, jk}\int_{0,25\cdot10^{-3}}^{0,75\cdot10^{-3}}d\left(e^{-jk2000\pi t}\right)\right]$$

$$c_{k_{x_1}}=-\frac{10^3}{2000\pi\, jk}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-jk2000\pi t\cdot0,25\cdot10^{-3}}-e^{jk2000\pi t\cdot0,25\cdot10^{-3}}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(e^{-jk2000\pi t\cdot0,75\cdot10^{-3}}-e^{-jk2000\pi t\cdot0,25\cdot10^{-3}}\right)\right]$$

$$c_{k_{x_1}} = \frac{10^3 j}{2000\pi k}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-2j\sin\frac{k\pi}{2}\right) - e^{-jk\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{2}} - e^{jk\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$c_{k_{x_1}} = \frac{j}{2k\pi}\left[-\sqrt{2}j\sin\frac{k\pi}{2} - (-1)^k\left(-2j\sin\frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

$$c_{k_{x_1}} = \frac{j}{2k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\left(-\sqrt{2}j - 2(-1)^k j\right) = -\frac{1}{2k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\left(-\sqrt{2} - 2(-1)^k\right)$$

$$= \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{2k\pi}\left(\sqrt{2} + 2(-1)^k\right) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} + 2(-1)^k\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$X_1(\omega) = 2\pi\sum_k c_{k_{x_1}}\delta\left(\omega - k\cdot 2\pi\cdot 10^3\right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$c_{k_{x_2}} = \frac{1}{10^{-3}}\left[\int_{-0,25\cdot 10^{-3}}^{0,25\cdot 10^{-3}} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-jk2000\pi t}dt\right] = 500\sqrt{2}\int_{-0,25\cdot 10^{-3}}^{0,25\cdot 10^{-3}} e^{-jk2000\pi t}dt$$

$$= 500\sqrt{2}\left(-\frac{1}{jk2000\pi}\right)e^{-jk2000\pi t}\Big|_{-0,25\cdot 10^{-3}}^{0,25\cdot 10^{-3}\ -0,25\cdot 10^{-3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4k\pi j}\left(-2j\sin k\cdot 2000\pi\cdot 0,25\cdot 10^{-3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$X_2(\omega) = 2\pi\sum_k c_{k_{x_2}}\delta\left(\omega - k\cdot 2\pi\cdot 10^3\right) \qquad \textbf{(3)}$$

Inlocuind (2) si (3) in (1) se obtine spectrul semnalului modulat in frecventa.

Punctul b). tema