3. Transformata Z

Transformata Z a semnalului discret x[n] este:

$$Z\{x[n]\}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = X(z),$$

cu variabila complexă $z = x + jy = re^{j\Omega}$; ea generalizează transformarea Fourier in timp discret. Transformata Z evaluată pe cercul unitar este chiar transformata Fourier in timp discret:

$$Z\{x[n]\}\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \mathcal{F}\{x[n]\}(\Omega)$$

Pentru un SLIT, dacă $x[n] = \sum_k c_k z_k{}^n$ => $y[n] = \sum_k c_k z_k{}^n H(z_k)$

Domeniul de convergență = coroana circulară centrată pe origine care nu conţine poli ai transformatei. **Proprietăți DC**

1. pt semnale cu întindere spre dreapta, DC = coroana circulară delimitată de raza celui mai mare pol |z| > $|z_p|$max (<u>semnal cauzal</u>)
2. pt semnale cu întindere spre stânga, DC = disc delimitat de raza celui mai mic pol |z|<$|z_p|$min (<u>semnal necauzal</u>)
3. pt semnale cu întindere de la $-\infty$ la ∞, DC este o coroana circulară ce nu include poli
4. semnalele cu suport mărginit au transformata Z definita in tot planul, cu excepţia z=0 si z=∞.
5. <u>Sistem stabil</u> : cercul unitar |z|=1 este inclus in domeniul de convergenţă.
6. <u>Sistemul cauzal si stabil:</u> polii sunt în interiorul cercului unitate (au modul subunitar). Poli simpli pe cercul unitar => sistem stabil la limita (oscilator numeric).

<u>Probleme</u>

1. a) Să se demonstreze că pentru o secvenţă pară x[n]=x[-n] este adevarată egalitatea X(z)=X(1/z).

b) să se arate că polii (zerourile) acestei transformate Z sunt în perechi z_0, $1/z_0$.

c) demonstraţi că semnalul în timp discret $x[n] = a^{|n|}$ este o secvenţă pară. Să se reprezinte grafic semnalul pentru a=3/4 si |n|<4.

d) determinaţi transformata Z a semnalului de la pct. c) şi domeniul de convergenţă.

e) găsiti polii şi zerourile acestei transformate.

Soluţie problema 1

a) $x[n] = x[-n]$

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} \underline{\underline{m=-n}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(z^{-1}\right)^{-m} = X\left(z^{-1}\right) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

$x[n] \leftrightarrow X(z)$. Dar $x[n] = x[-n] \Rightarrow X(z) = X\left(\frac{1}{z}\right) c.c.t.d.$

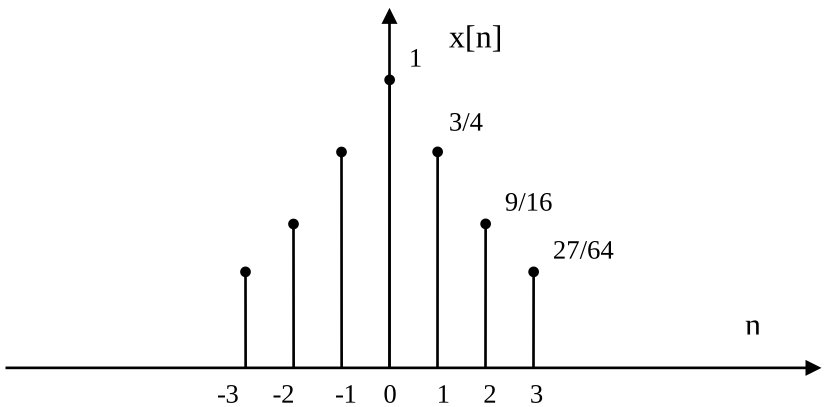
b) Fie z_0 un zero şi z_p un pol pentru $X(z) \Rightarrow$

$$X(z)=\frac{(z-z_0)P(z)}{(z-z_p)Q(z)}$$

$$\Rightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\left(\frac{1}{z}-z_0\right)P\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{1}{z}-z_p\right)Q\left(\frac{1}{z}\right)}==\frac{(1-zz_0)P\left(\frac{1}{z}\right)}{(1-zz_p)Q\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{z_0}{z_p}\frac{\left(z-\frac{1}{z_0}\right)P\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(z-\frac{1}{z_p}\right)Q\left(\frac{1}{z}\right)}$$

=> $\frac{1}{z_0}$ - zero şi $\frac{1}{z_p}$ este pol al lui $X\left(\frac{1}{z}\right)$. Dar $X\left(\frac{1}{z}\right)=X(z)$, deci $\frac{1}{z_0}$ - zero şi $\frac{1}{z_p}$ este pol al lui $X(z)$. Aşadar zerourile lui $X(z)$ se pot grupa în perechi de forma $z_0,\frac{1}{z_0}$ şi polii lui $X(z)$ se pot grupa în perechi de forma $z_p,\frac{1}{z_p}$

c) $x[n]=a^{|n|}; x[-n]=a^{|-n|}=a^{|n|}=x[n] \ \Rightarrow x[n]$ este o funcţie pară



d) $u[n]=\begin{Bmatrix} a^n, n\geq 0 \\ a^{-n}, n<0 \end{Bmatrix}=a^n\sigma[n]+a^{-n}\sigma[-n-1]=a^n\sigma[n]+\left(\frac{1}{a}\right)^n\sigma[-n-1]$

Dar : $a^n\sigma[n]\underset{|z|>|a|}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-az^{-1}}$ şi $-b^n\sigma[-n-1]\underset{|z|<|b|}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-bz^{-1}}$

Pentru $b=\frac{1}{a}\Rightarrow \ -\left(\frac{1}{a}\right)^n\sigma[-n-1]\underset{|z|<\frac{1}{|a|}}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}\right)^n\sigma[-n-1]\underset{|z|<\frac{1}{|a|}}{\leftrightarrow}\frac{-1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}$

Pentru $a=\frac{3}{4}$ regiunea de convergenţă este $\frac{3}{4}<|z|<\frac{4}{3}$ şi :

$$u[n]=\left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}\leftrightarrow\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{4}{3}z^{-1}}=\frac{-\frac{7}{12}z^{-1}}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{4}{3}z^{-1}\right)}=U(z)$$

Polii lui $U(z)$ sunt $z_{p_1}=\frac{3}{4}$ şi $z_{p_2}=\frac{4}{3}$. Se observă că $z_{p_1}=\frac{1}{z_{p_2}}$ (1)

Zerourile lui $U(z)$ sunt $z_{0_1}=0$, si $\lim_{z\to\infty}U(z)=0 \Rightarrow z_{0_2}=\infty$. Se observă că $z_{0_2}=\frac{1}{z_{0_1}}$ (2)

(1) şi (2) $\Rightarrow$ proprietatea de la ***b)*** este satisfăcută.

2. Determinaţi transformatele z ale următoarelor semnale în timp discret. Să se precizeze în fiecare caz regiunea de convergenţă şi să se deseneze constelaţia de poli şi zerouri. Să se precizeze dacă aceste secvenţe admit sau nu transformata Fourier în timp discret.

a) $\delta[n]$, b) $0.5^n\sigma[n]$,

c) $0.5^n\sigma[-n]$, d) $0.5^{|n|}$,

e) $0.5\{\sigma[n]-\sigma[n-2]\}$, f) $\sin(\Omega_0 n)\sigma[n]$, g) $a^n\sin(\Omega_0 n)\sigma[n]$.

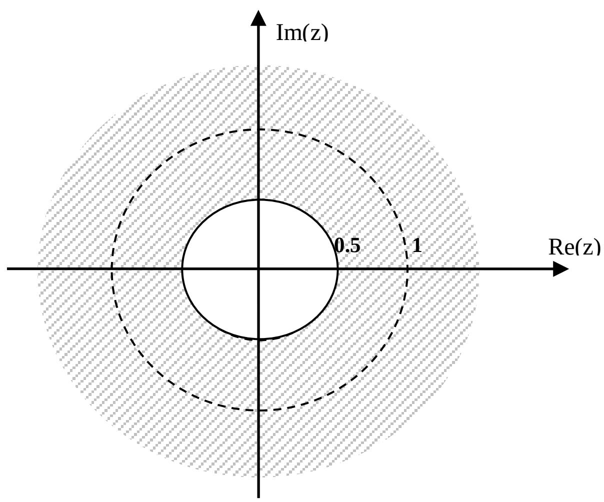
Soluţie problema 2

a) $\delta[n]\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=\delta[0]=1 \quad DC=\{z|z\in\mathbb{C}\}$.

Transformata nu are nici poli nici zerouri. Secvenţa admite transformată Fourier în timp discret.

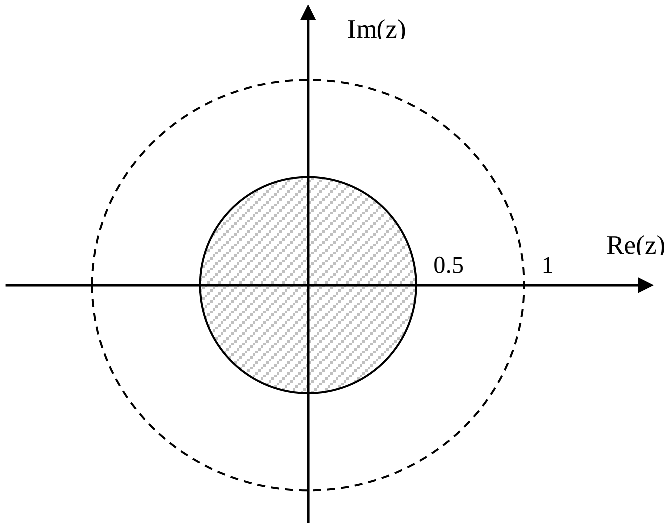
b) $0,5^n\sigma[n]\underset{|z|>0,5}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0,5z^{-1}}=\frac{z}{z-0,5}$.

Secvenţa are transformată Fourier în timp discret.



c) $0,5^n\sigma[-n]\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{0}0,5^nz^n\overset{m=-n}{=}\sum_{m=0}^{\infty}0,5^{-m}z^m=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{0,5}\right)^m$ Această serie de puteri este convergentă dacă $\left|\frac{z}{0,5}\right|<1\Leftrightarrow|z|<0,5\leftarrow D.C.$

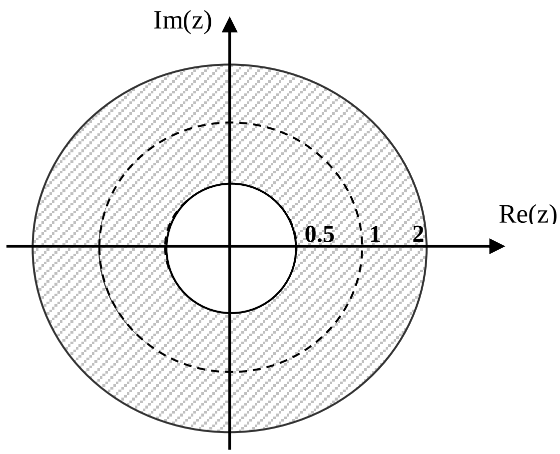
$0,5^n\sigma[-n]\leftrightarrow\frac{1}{1-\frac{z}{0,5}}=\frac{0,5}{0,5-z}$. Secvenţa **nu** are transformată Fourier în timp discret.



d) $0,5^{|n|}=\begin{cases}0,5^n, n\geq 0\\ 0,5^{-n}, n<0\end{cases}=0,5^n\sigma[n]+0,5^{-n}\sigma[-n-1]=0,5^n\sigma[n]+2^n\sigma[-n-1]$

$0,5^n\sigma[n]\underset{|z|>0,5}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-0,5z^{-1}};2^n\sigma[-n-1]\underset{|z|<2}{\leftrightarrow}-\frac{1}{1-2z^{-1}}$ => $D.C.=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0,5<|z|<2\}$

$0,5^{|n|}\leftrightarrow\frac{1}{1-0,5z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{-1,5z^{-1}}{(1-0,5z^{-1})(1-2z^{-1})}=\frac{1,5z}{(z-0,5)(z-2)}$



Secvenţa are transformată Fourier în timp discret.

e) $0,5\{\sigma[n]-\sigma[n-2]\}=0,5\{\delta[n]+\delta[n-1]\}\leftrightarrow 0,5+0,5z^{-1}=\frac{0,5(1+z)}{z}$

$DC=\{z\in\mathbb{C}\}-\{0\}$. Secvenţa are transformată Fourier în timp discret.

f) $\sin\Omega_0 n = \dfrac{e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}}{2j}$

$$\sin\Omega_0 n\sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}\right)z^{-n} = \frac{1}{2j}\left[\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{j\Omega_0}}{z}\right)^n}_{S_1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^{j\Omega_0} z}\right)^n}_{S_2}\right]$$

Seria de puteri S_1 este convergentă dacă $\left|\dfrac{e^{j\Omega_0}}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

Seria de puteri S_2 este convergentă dacă $\left|\dfrac{1}{e^{j\Omega_0} z}\right| < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$

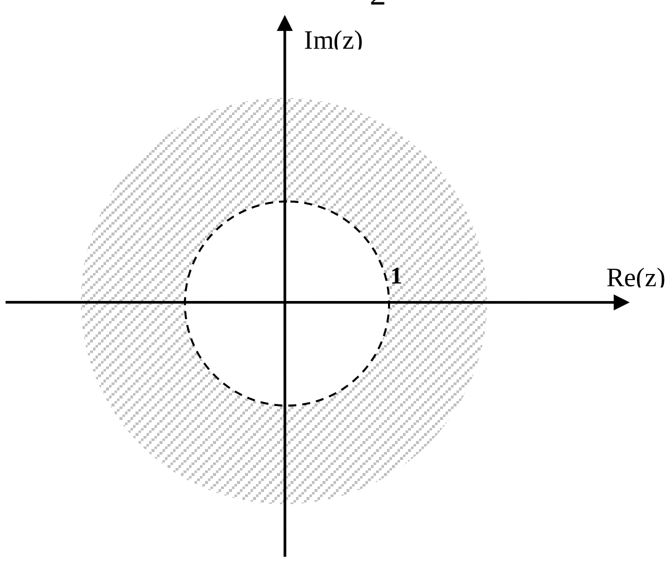
$DC = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| > 1\right\}$. Secvenţa **nu** are transformată Fourier în timp discret.

$$\sin(\Omega_0 n)\sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-\dfrac{e^{j\Omega_0}}{z}} - \frac{1}{1-\dfrac{1}{e^{j\Omega_0} z}}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}}\right]$$

$$= \frac{e^{j\Omega_0} - e^{-j\Omega_0}}{2j}\,\frac{z^{-1}}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1} - e^{-j\Omega_0}z^{-1} + z^{-2}} = \sin\Omega_0\,\frac{z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1} + z^{-2}}$$

Deci : $\sin(\Omega_0 n)\sigma[n] \leftrightarrow \sin\Omega_0\,\dfrac{z^{-1}}{1-2\cos\Omega_0 z^{-1}+z^{-2}} = \sin\Omega_0\,\dfrac{z}{z^2 - 2\cos\Omega_0 z + 1}$

$$z^2 - 2\cos\Omega_0 z + 1 = 0 \Rightarrow z_{p_1,p_2} = \frac{\sqrt{4\cos^2\Omega_0 - 4}}{2} = \cos\Omega_0 \pm j\sin\Omega_0 = e^{\pm j\Omega_0}$$



g) $a^n\sin(\Omega_0 n) = \dfrac{a^n}{2j}\left(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}\right)$

$$a^n \sin(\Omega_0 n)\sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{j\Omega_0 n} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega_0 n} z^{-n}\right) = \frac{1}{2j}\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{j\Omega_0}}{z}\right)^n}_{S_1} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{ae^{-j\Omega_0}}{z}\right)^n}_{S_2}\right)$$

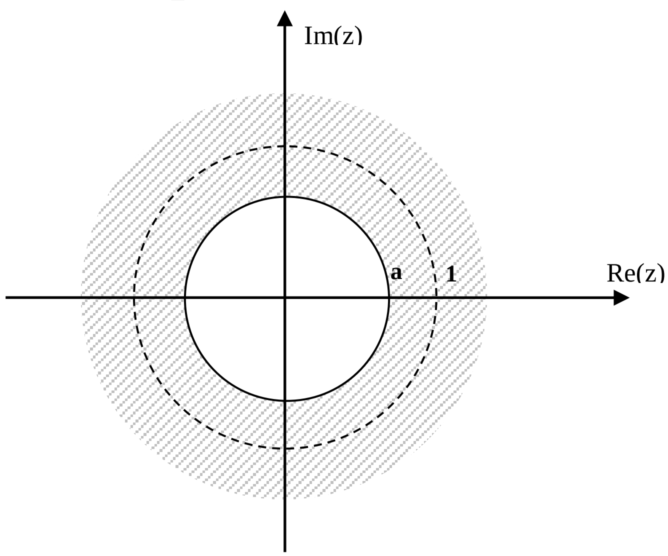
Seria de puteri S_1 este convergentă dacă $\left|\frac{ae^{j\Omega_0}}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$

Seria de puteri S_2 este convergentă dacă $\left|\frac{ae^{-j\Omega_0}}{z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|a|}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$

$$DC = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| > |a|\right\}$$

$$a^n \sin\Omega_0 n\sigma[n] \leftrightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-\frac{ae^{j\Omega_0}}{z}} - \frac{1}{1-\frac{ae^{-j\Omega_0}}{z}}\right) = \frac{az\sin\Omega_0}{z^2 - 2a\cos\Omega_0 z + a^2}$$

$$z_{p_1,p_2} = \frac{2a\cos\Omega_0 \pm \sqrt{4a^2\cos^2\Omega_0 - 4a^2}}{2} = a\cos\Omega_0 \pm ja\sin\Omega_0 = ae^{\pm j\Omega_0}$$



Secvenţa are transformată Fourier în timp discret dacă $|a| < 1$.

3. Ştiind că X(z) reprezintă transformata Z a secvenţei x[n] să se calculeze în funcţie de X(z) transformata Z a următoarelor secvenţe:

a) $\Delta\{x[n]\} = x[n] - x[n-1]$; b) $x_1[n] = (-1)^n x[n]$

c) $x_2[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n-par \\ 0, & n-impar \end{cases}$; d) $x_3[n] = x[2n]$.

Soluţie problema 3.

a) $x[n] \leftrightarrow X(z)$; $x[n-1] \leftrightarrow z^{-1}X(z)$

$\Delta\{x[n]\} = x[n]-x[n-1] \leftrightarrow \left(1-z^{-1}\right)X(z)$

b) $x_1[n] = (-1)^n x[n] \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] z^{-n} = \sum x[n](-z)^n = X(-z)$

c) $x_2[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n-par \\ 0, & n-impar \end{cases}$ (scalare in timp)

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_2[2p]z^{-2p} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_2[2p+1]z^{-(2p+1)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p]z^{-2p} = X(z^2)$$

d) $x_3[n] = x[2n] \leftrightarrow X_3(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n]z^{-n}$

Dar $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p]z^{-2p} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p+1]z^{-(2p+1)}$

şi $X(-z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-z)^{-n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p](-z)^{-2p} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p+1](-z)^{-(2p+1)}$

$$X(-z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p]z^{-2p} - \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p+1]z^{-(2p+1)}$$

$$=> \frac{1}{2}\left(X(z)+X(-z)\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p]z^{-2p} \; => \frac{1}{2}\left(X(u^{\frac{1}{2}}) + X(-u^{\frac{1}{2}}) \right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[2p]u^{-p}$$

$$X_3(z) = \frac{1}{2}\left(X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}}) \right)$$

4. Să se determine semnalele în timp discret care corespund următoarelor transformate Z

a) $5\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-3}\right)$; b) $\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$ pentru cele două domenii de convergenţă posibile.

c) $\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$, pentru $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$;

d) $\frac{z^2}{z^2-0.5z+0.6}$ -tema; e) $\frac{1+3z^{-1}+\frac{11}{6}z^{-2}+\frac{1}{3}z^{-3}}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

Soluţie problema 4.

a) $X(z) = 5\left(1-z^{-1}\right)\left(1+z^{-3}\right) = 5-5z^{-1}+5z^{-3}-5z^{-4}$

$x[n] = 5\delta[n]-5\delta[n-1]+5\delta[n-3]-5\delta[n-4]$

b) $X(z)=\dfrac{1}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$. Din tabele : $X_1(z)=\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}\leftrightarrow\begin{cases} na^n\sigma[n],|z|>|a| \\ -na^n\sigma^n[-n-1],|z|<|a|\end{cases}$

Dar $X(z)=\dfrac{1}{a}zX_1(z)\longrightarrow\dfrac{1}{a}x_1[n+1]$

Cazul I : $|z|>|a|\Rightarrow x[n]=\dfrac{1}{a}(n+1)a^{n+1}\sigma[n+1]\Leftrightarrow x[n]=(n+1)a^n\sigma[n+1]$

Cazul II $|z|<|a|\Rightarrow x[n]=\dfrac{1}{a}(n+1)\left[-a^{n+1}\sigma[-n-2]\right]=-(n+1)a^n\sigma[-n-2]$

c) pentru $\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{2}$, $X(z)=\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}=\dfrac{A_1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\dfrac{A_2}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}+\dfrac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$$B=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z)\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{8}{9}$$

$$A_2=\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2X(z)\Big|_{z^{-1}=-4}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-4}=\frac{2}{3}\,;$$

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2X(z)\right]\Big|_{z^{-1}=-4}=A_1\frac{d}{dz}\left[1+\frac{1}{4}z^{-1}\right]\Big|_{z^{-1}=-4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{d}{dz}\left[\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\right]\Big|_{z^{-1}=-4}=-A_1\frac{1}{4}z^{-2}\Big|_{z^{-1}=-4}\Leftrightarrow-2\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-2}\frac{z^{-2}}{2}\Big|_{z^{-1}=-4}=-4A_1\Leftrightarrow A_1=\frac{4}{9}$$

$$X(z)=\frac{4}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{3}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}+\frac{8}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Pentru $\dfrac{1}{4}<|z|<\dfrac{1}{2}$: $x[n]=\dfrac{4}{9}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\sigma[n]+\dfrac{2}{3}(n+1)\left(-\dfrac{1}{4}\right)^n\sigma[n+1]-\dfrac{8}{9}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\sigma[-n-1]$

e) $X(z)=\dfrac{\frac{1}{3}z^{-3}+\frac{11}{6}z^{-2}+3z^{-1}+1}{\frac{1}{6}z^{-2}+\frac{5}{6}z^{-1}+1}\overset{z^{-1}=u}{=}\dfrac{\frac{1}{3}u^3+\frac{11}{6}u^2+3u^1+1}{\frac{1}{6}u^2+\frac{5}{6}u+1}$

$$=2u+1+\frac{u}{\frac{1}{6}u^2+\frac{5}{6}u+1}\overset{u=z^{-1}}{=}2z^{-1}+1+\underbrace{\frac{z^{-1}}{\frac{1}{6}z^{-2}+\frac{5}{6}z^{-1}+1}}_{X_1(z)}$$

$$X_1(z)=\frac{z^{-1}}{z^{-2}+5z^{-1}+6}=\frac{z^{-1}}{\left(z^{-1}+2\right)\left(z^{-1}+3\right)}=\frac{A}{z^{-1}+2}+\frac{B}{z^{-1}+3};$$

$$A=\left(z^{-1}+2\right)X_1(z)\Big|_{z^{-1}=-2}=\frac{z^{-1}}{z^{-1}+3}\Big|_{z^{-1}=-2}=-2$$

$$B=\left(z^{-1}+3\right)X_1(z)\Big|_{z^{-1}=-3}=\frac{z^{-1}}{z^{-1}+2}\Big|_{z^{-1}=-3}=3$$

$$X_1(z)=-2\frac{1}{z^{-1}+2}+3\frac{1}{z^{-1}+3}=-\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)z^{-1}}$$

$$X(z)=2z^{-1}+1-\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)z^{-1}}+\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)z^{-1}}.$$

Există 2 poli: z_{p1} = -1/2; z_{p2} = -1/3, de modul $|z_{p1}|$ = 1/2; $|z_{p2}|$ = 1/3 deci 3 regiuni de convergenţă.

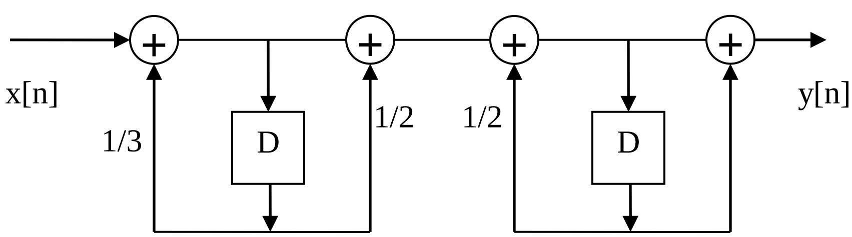
Caz I $|z|>\frac{1}{2}$; soluţia cauzală $x[n]=2\delta[n-1]+\delta[n]-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sigma[n]$

Caz II $\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$; $x[n]=2\delta[n-1]+\delta[n]+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sigma[-n-1]+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sigma[n]$

Caz III $|z|<\frac{1}{3}$; soluţia anticauzală

$$x[n]=2\delta[n-1]+\delta[n]+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sigma[-n-1]-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\sigma[-n-1]$$

5. Pentru sistemul în timp discret din figură, considerat cauzal şi în repaus iniţial



a) să se determine funcţia de transfer H(z)
b) să se scrie ecuaţia cu diferenţe finite
c) să se stabilească răspunsul la impuls h[n]
d) analizati stabilitatea sistemului
e) să se determine răspunsul în frecvenţă al sistemului
f) să se determine răspunsurile sistemului la următoarele semnale de intrare:

1. $\cos 10\pi n$; 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]$; 3. $\sigma[n]$-tema

g) să se deseneze forma canonică II de implementare a sistemului.

Soluţie problema 5

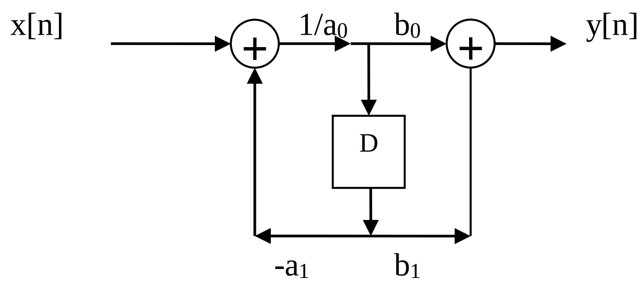
a) să se determine funcţia de transfer H(z). Un sistem de ordinul I este descris de ecuaţia cu diferenţe finite:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$$

şi de funcţia de transfer:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{a_0 + a_1 z^{-1}}$$

Forma canonică II de implementare a acestui sistem este:



Sistemul din enunţul acestei probleme este format prin conectarea în cascadă a două astfel de sisteme de ordinul I. Pentru primul: $\frac{1}{a_0} = 1; b_0 = 1; -a_1 = \frac{1}{3}; b_1 = \frac{1}{2}$. Funcţia de transfer a primului sistem este: $H_1(z) = \frac{1 + \frac{1}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$

Pentru al doilea sistem din enunţ: $\frac{1}{a_0} = 1; b_0 = 1; -a_1 = \frac{1}{2}; b_1 = 1$. Funcţia de transfer a sistemului al doilea este: $H_2(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$

Funcţia de transfer a sistemului global este:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1 + \frac{3}{2} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}} = \frac{1 + \frac{3}{2} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}}$$

b) Coeficienţii acestei funcţii de transfer sunt: $b_0 = 1; b_1 = \frac{3}{2}; b_2 = \frac{1}{2}; a_0 = 1; a_1 = -\frac{5}{6}; a_2 = \frac{1}{6}$

Ecuaţia cu diferenţe finite corespunzătoare este :

$$y[n] - \frac{5}{6} y[n-1] + \frac{1}{6} y[n-2] = x[n] + \frac{3}{2} x[n-1] + \frac{1}{2} x[n-2]$$

c) $1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2} = 0 \Leftrightarrow z^{-2} - 5z^{-1} + 6 = 0; z_{1,2}^{-1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

$$H(z)=\frac{3z^{-2}+9z^{-1}+6}{z^{-2}-5z^{-1}+6}=\frac{A}{z^{-1}-2}+\frac{B}{z^{-1}-3}$$

$$A=\left(z^{-1}-2\right)H(z)\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{3z^{-2}+9z^{-1}+6}{z^{-1}-3}\Big|_{z^{-1}=2}=-36$$

$$B=\left(z^{-1}-3\right)H(z)\Big|_{z^{-1}=3}=\frac{3z^{-2}+9z^{-1}+6}{z^{-1}-2}\Big|_{z^{-1}=3}=60$$

$$H(z)=-36\frac{1}{z^{-1}-2}+60\frac{1}{z^{-1}-3}=18\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-20\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Dar: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\overset{cauzal}{\leftrightarrow}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sigma[n];\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\overset{cauzal}{\leftrightarrow}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sigma[n]$

$=> h[n]=18\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sigma[n]-20\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\sigma[n]$

d) din funcţia de transfer deja determinată: $H(z)=18\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-20\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ rezultă că avem doi poli $|z_{p1}|=1/2$ şi $|z_{p2}|=1/3$, de modul subunitar. Ştiind ca sistemul este cauzal, domeniul de convergenţă este $|z|>1/2$, prin urmare cercul unitar $|z|=1$ este inclus în DC. **Sistemul este deci stabil.**

d) $z=e^{j\Omega}\Rightarrow H(\Omega)=\frac{3e^{-2j\Omega}+9e^{-j\Omega}+6}{e^{-2j\Omega}-5e^{-j\Omega}+6}=\frac{3\left(\cos 2\Omega-j\sin 2\Omega\right)+9\left(\cos\Omega-j\sin\Omega\right)+6}{\cos 2\Omega-j\sin 2\Omega-5\left(\cos\Omega-j\sin\Omega\right)+6}$

$$H(\Omega)=\frac{3\cos 2\Omega+9\cos\Omega+6-j\left(3\sin 2\Omega+9\sin\Omega\right)}{\cos 2\Omega-5\cos\Omega+6-j\left(\sin 2\Omega-5\sin\Omega\right)}$$

f)1°) $x[n]=\cos 10\pi n\Rightarrow y[n]=\left|H(10\pi)\right|\cos\left(10\pi n+\arg\left\{H(10\pi)\right\}\right)$

$\Omega=10\pi\Rightarrow H(10\pi)=\frac{3\cdot 1+9\cdot 1+6-j\left(3\cdot 0+9\cdot 0\right)}{1-5\cdot 1+6-j\left(0-5\cdot 0\right)}=18/2=9$ => $y[n]=9\cos\left(10\pi n\right)$

2°) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sigma[n]\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Rightarrow Y(z)=X(z)H(z)\Rightarrow$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{2}}+\frac{C}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$C=\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)Y(z)\Big|_{z^{-1}=3}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{2}}\Big|_{z^{-1}=3}=40$$

$$B=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 Y(z)\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\Bigg|_{z^{-1}=2}=18$$

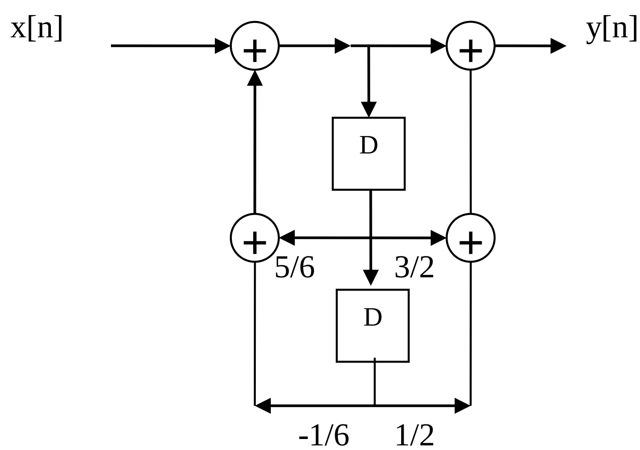
$$A=\frac{d}{dz}\left(\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2 Y(z)\right)\Bigg|_{z^{-1}=2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)\Bigg|_{z^{-1}=2}=\frac{\frac{7}{2}z^2+\frac{1}{6}}{\left(z^2-\frac{1}{3}z\right)^2}\Bigg|_{z^{-1}=2}=150$$

Deci: $Y(z)=\dfrac{150}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{18}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}+\dfrac{40}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$ iar $\dfrac{18}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}=36\dfrac{\frac{1}{2}z\cdot z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$

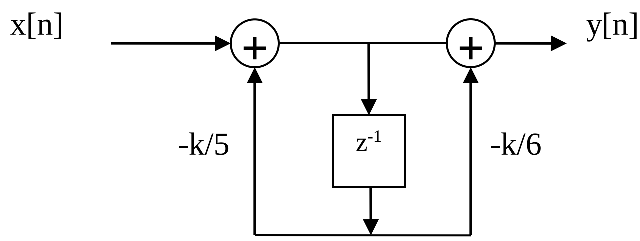
şi $\dfrac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\leftrightarrow n\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]$, adică $36z\dfrac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}\leftrightarrow 36(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\sigma[n+1]$

De aceea : $y[n]=150\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]+36(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\sigma[n+1]+40\left(\frac{1}{3}\right)^n\sigma[n]$

g) $H(z)=\dfrac{1+\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}\Rightarrow a_0=1; a_1=-\frac{5}{6}; a_2=\frac{1}{6};\qquad b_0=1; b_1=\frac{3}{2}; b_2=\frac{1}{2}$



6. Se consideră sistemul în timp discret cauzal din figură:



a) să se determine funcţia sa de transfer H(z). Schiţaţi constelaţia de poli şi zerouri şi regiunea de convergenţă

b) pentru ce valori ale lui k sunt polii sistemului în interiorul cercului unitate? să se analizeze stabilitatea sistemului

c) să se determine y[n] dacă k=1 si $x[n]=(1/2)^{|n|}$

Solutie problema 6

a) $\frac{1}{a_0}=1; b_0=1; -a_1=-\frac{k}{5}; b_1=\frac{-k}{6}$.

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{a_0+a_1z^{-1}}=\frac{1-\frac{k}{6}z^{-1}}{1+\frac{k}{5}z^{-1}}=\frac{z-\frac{k}{6}}{z+\frac{k}{5}}\Rightarrow z_0=\frac{k}{6}; z_p=-\frac{k}{5}$$

b) $-1<-\frac{k}{5}<1\Rightarrow -5<k<5$. Polii unui sistem cauzal şi stabil trebuie să fie situaţi în interiorul cercului unitar, prin urmare pentru |k|<5, sistemul dat este stabil.

c) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sigma[n]+2^n\sigma[-n-1]$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sigma[n]\overset{|z|>\frac{1}{2}}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \text{şi} \quad 2^n\sigma[-n-1]\overset{|z|<2}{\leftrightarrow}\frac{-1}{1-2z^{-1}}$$

Regiunea de convergenţă a transformatei z a semnalului $x[n]$ este $\frac{1}{2}<|z|<2$

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}; Y(z)=X(z)\cdot H(z)\overset{k=1}{\Rightarrow}$$

$$Y(z)=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}\right)=\underbrace{\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}}_{Y_1(z)}-\underbrace{\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}}_{Y_2(z)}$$

$$Y(z)=\underbrace{\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}}_{Y_1(z)}-\underbrace{\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}}_{Y_2(z)}$$

$$Y_1(z)=\frac{A}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}};\ \Rightarrow A=\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)Y_1(z)\Big|_{z^{-1}=-5}=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-5}=\frac{11}{21}$$

$$B=\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)Y_1(z)=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=2}=\frac{10}{21}$$

$$y_1[n]=\frac{11}{21}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\sigma[n]+\frac{10}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]$$

$$Y_2(z)=\frac{C}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}+\frac{D}{1-2z^{-1}}\Rightarrow C=\left(1+\frac{1}{5}z^{-1}\right)Y_2(z)\Big|_{z^{-1}=-5}=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-2z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=-5}=\frac{1}{6}$$

$$D=\left(1-2z^{-1}\right)Y_2(z)\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}$$

$$Y_2(z)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{5}z^{-1}}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{1-2z^{-1}}\leftrightarrow y_2[n]=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\sigma[n]+\frac{5}{6}2^n\sigma[n]$$

$$y[n]=y_1[n]-y_2[n]=\frac{11}{21}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\sigma[n]+\frac{10}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n\sigma[n]-\frac{5}{6}2^n\sigma[n]$$

$$y[n]=\left(\frac{45}{126}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^n\sigma[n]+\frac{10}{21}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sigma[n]-\frac{5}{6}2^n\sigma[n]$$

7. Un sistem liniar şi invariant în timp discret este descris de ecuaţia cu diferenţe finite:

y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=x[n]

a) să se determine funcţia sa de transfer H(z). Schiţaţi constelaţia de poli şi zerouri şi regiunea de convergenţă

b) să se determine răspunsul la impuls h[n]

c) să se analizeze stabilitatea sistemului.

Solutie problema 7

a) $a_0=1; a_1=-2; a_2=1; b_0=1$ => $H(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}\Rightarrow z_{p_1}^{-1}=z_{p_2}^{-1}=1$

Există 2 regiuni de convergenţă : $|z|<1$ sau $|z|>1$.

b) $H_1(z)=\frac{1}{z^{-1}}\overset{|z|>1}{\leftrightarrow}\sigma[n]$.

$$\frac{d}{dz}\left\{H_1(z)\right\}=\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)=\frac{z-1-z}{(z-1)^2}=-\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = -z^2 \frac{d}{dz}\left\{H_1(z)\right\} \leftrightarrow (n+1)\sigma[n+1]$$

c) Sistemul are un pol dublu pe cercul unitate şi în consecință este instabil. Dacă $x[n]$ este cel mai simplu semnal în timp discret nenul, $x[n]=\delta[n]$ atunci $y[n]=h[n]=(n+1)\sigma[n+1]$.