Eşantionarea semnalelor

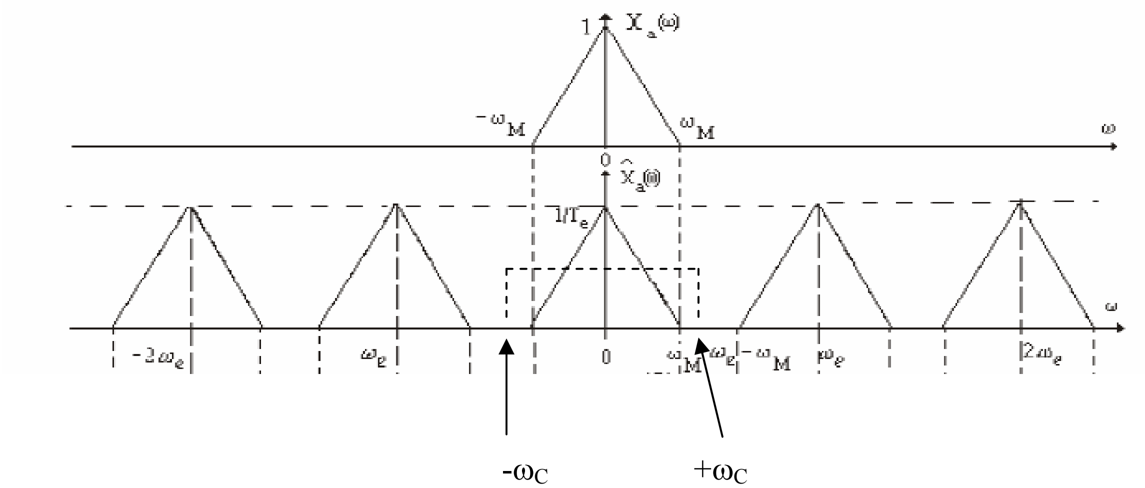
Eşantionarea = prelevarea de probe dintr-un semnal la momente de timp decalate intre ele cu T_e – cu frecventa de eşantionare, $f_e=1/T_e$.

Semnalul eşantionat ideal: $\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e)\delta(t-kT_e)$.

Spectrul $\hat{X}(\omega)=\frac{1}{T_e}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega-k\omega_e)$

<u>**Teorema eşantionării:**</u> Un semnal x(t) de energie finita si banda limitata $B=\omega_M$ este unic determinat de mulţimea eşantioanelor sale $\{x(nT_e)|n\in Z\}$ daca $\omega_e \geq 2\omega_M$.

Prin eşantionare cu perioada T_e => $\hat{x}(t) \leftrightarrow \hat{X}(\omega)$. Semnalul original se poate reconstitui din spectrul semnalului eşantionat cu un FTJ cu frecventa de taiere ω_C, astfel încât, $\omega_M \leq \omega_C \leq \omega_e-\omega_M$ => $2\omega_M \leq \omega_e$ sau $f_e \geq 2f_M$.



<u>Caz limita</u>: $\omega_e=2\omega_M$, $\omega_C=\omega_M$

<u>Caz defavorabil</u>: $\omega_e<2\omega_M$ => fenomenul de aliere, semnalul original nu poate fi reconstituit.

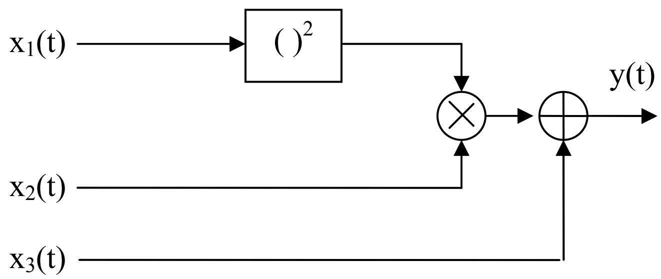
FTJ ideal: $H_r(\omega)=T_e p_{\omega_C}(\omega) \leftrightarrow h_r(t)=T_e\frac{\sin(\omega_C t)}{\pi t}$

Semnalul reconstituit: $x_r(t)=\hat{x}(t)*h_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2\omega_C}{\omega_e}x(kT_e)\frac{\sin(\omega_C(t-kT_e))}{\omega_C(t-kT_e)}$

$\omega_C=\omega_M=\frac{\omega_e}{2}$ => Semnalul reconstituit: $x_r(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_e)\frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{T_e}-k\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{T_e}-k\right)}$

Probleme

1. Se considera sistemul din figura



Suporturile transformatei Fourier ale semnalelor $x_i(t)$ i=1,3, sunt [$-\omega_i$, ω_i]. Determinați perioada maxima de eşantionare T pentru care semnalul y(t) poate fi recuperat din eşantioanele sale prin filtrare trece-jos ideala.

Rezolvare.

$$y(t)=x_1^2(t)x_2(t)+x_3(t)\leftrightarrow Y(\omega)=\frac{1}{4\pi^2}X_1(\omega)*X_1(\omega)*X_2(\omega)+X_3(\omega)$$

$$\sup\{X_1(\omega)\}=[-\omega_1,\omega_1]\Rightarrow\sup\{X_1(\omega)*X_1(\omega)\}=[-2\omega_1,2\omega_1]$$

$$\sup\{X_1(\omega)*X_1(\omega)*X_2(\omega)\}=[-2\omega_1-\omega_2,2\omega_1+\omega_2]$$

=> $\sup\{Y(\omega)\}=[-\omega_y,\omega_y],\quad \omega_y=\max(2\omega_1+\omega_2,\omega_3)$

Se aplica teorema eşantionării:

$\omega_e\ge 2\omega_y$, cu perioada de eşantionare $T_e=\dfrac{2\pi}{\omega_e}\le\dfrac{\pi}{\omega_y}$

Valoarea maxima pentru perioada de eşantionare este: $T_e=\dfrac{\pi}{\max(2\omega_1+\omega_2,\omega_3)}$

2. Se considera un sistem cu intrarea x(t) si ieşirea y(t) legate printr-o relație polinomiala:

$$y=P(x)=\sum_{k=0}^{N}a_kx^k\ .$$

Daca semnalul x(t) este de banda limitata la intervalul [$-\omega_M$, ω_M], determinați perioada maxima de eşantionare pentru care semnalul y(t) poate fi recuperat din eşantioanele sale prin filtrare trece-jos ideala.

Rezolvare.

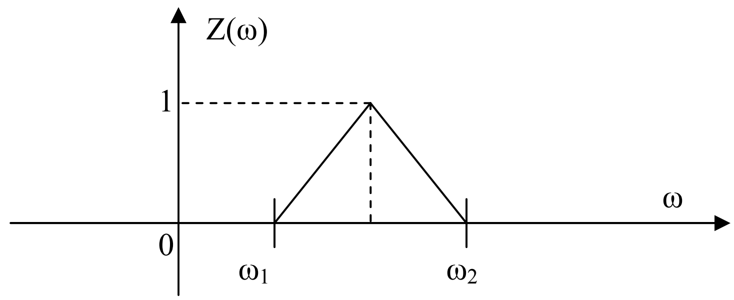
Transformata Fourier a semnalului y(t) este:

$$Y(\omega)=a_0+a_1X(\omega)+\frac{a_2}{2\pi}X(\omega)*X(\omega)+...+\frac{a_N}{(2\pi)^N}\underbrace{X(\omega)*X(\omega)*...*X(\omega)}_{\text{de } N \text{ ori}}$$

=> $\sup(Y(\omega))=[-N\omega_M,N\omega_M]$

Teorema eşantionării: $\omega_e \geq 2N\omega_M$ => $\frac{2\pi}{T} \geq 2N\omega_M$ => $T \geq \frac{\pi}{N\omega_M}$.

3. Se considera semnalul z(t) de banda limitata, la intervalul $[\omega_1, \omega_2]$ cu spectrul din figura:



Se notează $\omega_C = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$; $\omega_M = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

a) arătaţi ca este valabila relaţia $z(t) = x_1(t)e^{j\omega_C t}$, unde $x_1(t)$ este un semnal de banda limitata la intervalul $[-\omega_M, \omega_M]$.
b) utilizând formula de recuperare a semnalului $x_1(t)$ din eşantioanele sale, determinaţi cea mai mare valoare T pentru care este valabila relaţia:

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nT)e^{j\omega_e(t-nT)} \frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T} - n\right)}$$

Rezolvare.

a) $z(t) = x_1(t)e^{j\omega_C t} \leftrightarrow Z(\omega) = X_1(\omega - \omega_C)$

<=> $X_1(\omega) = Z(\omega + \omega_C)$ spectrul X_1 deplasat la stânga cu ω_C fata de Z

<=> $\sup\{Z(\omega)\} = \sup\{X_1(\omega - \omega_C)\} = [\omega_1, \omega_2]$

$\sup\{Z(\omega)\} = [\omega_1, \omega_2]$ si

$\sup\{X_1(\omega - \omega_C)\} = [-\omega_M + \omega_C, \omega_M + \omega_C]$

<=> $-\omega_M + \omega_C = \omega_1$ si $\omega_M + \omega_C = \omega_2$ (adevărat)

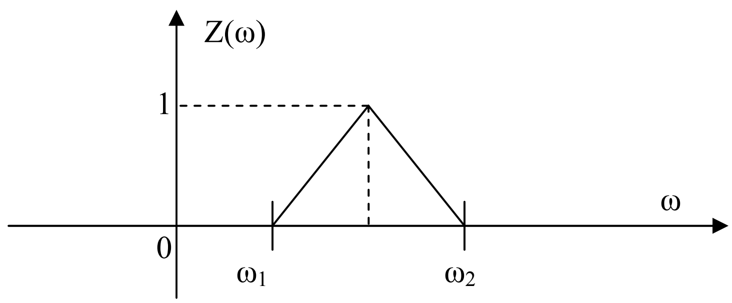
b) Semnalul $x_1(t) = z(t)e^{-j\omega_C t}$ - banda limitata $[-\omega_M, \omega_M]$ => eşantionare cu $\omega_e \geq 2\omega_M$

=> Semnalul recuperat $x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(kT_e) \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t}{T_e} - k\right)\right)}{\pi\left(\frac{t}{T_e} - k\right)}$ daca $\omega_C = \omega_M = \frac{\omega_e}{2}$

$$\Rightarrow\ z(t)=x_1(t)\exp(j\omega_C t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp(j\omega_C t)\,x_1(kT_e)\operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_e}-k\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\exp\left(j\omega_C\left(t-kT_e\right)\right)z(kT_e)\operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{T_e}-k\right)\right)\ \text{pt}\ \omega_C=\omega_M=\frac{\omega_e}{2},\ T_e=\frac{\pi}{\omega_M}$$

4. Semnalul z(t) al cărui spectru este reprezentat in figura, poate fi considerat ca semnalul analitic asociat unui semnal real, x(t).



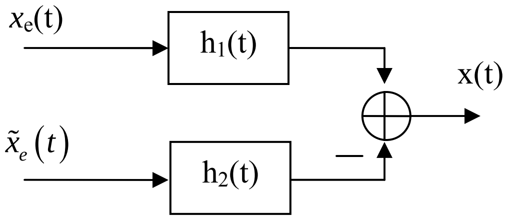
a) Reprezentați spectrul semnalului x(t).

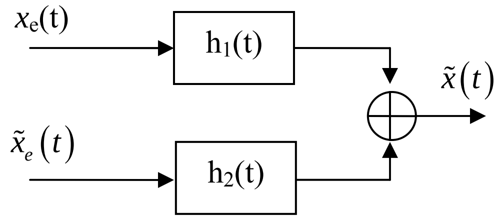
b) Utilizând relația de legătura intre semnalele x(t), $\tilde{x}(t)$ si z(t), unde $\tilde{x}(t)$ este transformata Hilbert a semnalului x(t), determinați cea mai mare valoare T pentru care sunt adevărate relațiile:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{x(nT)\cos\left[\omega_C\left(t-nT\right)\right]-\tilde{x}(nT)\sin\left[\omega_C\left(t-nT\right)\right]\right\}\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

$$\tilde{x}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{x(nT)\cos\left[\omega_C\left(t-nT\right)\right]+\tilde{x}(nT)\sin\left[\omega_C\left(t-nT\right)\right]\right\}\frac{\sin\left[\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)\right]}{\pi\left(\frac{t}{T}-n\right)}$$

c) Pe baza relațiilor anterioare, in figura următoare sunt reprezentate schemele unor sisteme care permit ca din semnalele eşantionate $x_e(t)=x(t)\delta_T(t)$ si $\tilde{x}_e(t)=\tilde{x}(t)\delta_T(t)$ sa se recupereze semnalele $x(t)$ si $\tilde{x}(t)$. Determinați răspunsul la impuls $h_1(t)$ si $h_2(t)$ si răspunsurile in frecventa $H_1(\omega)$ si $H_2(\omega)$ ale sistemelor corespunzătoare.





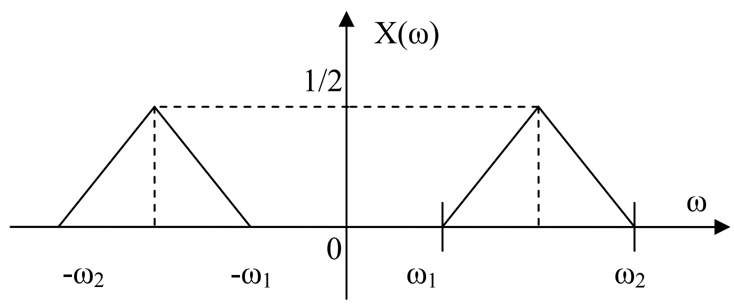
Rezolvare.

a) x(t) = Re(z(t)), $\tilde{x}(t) = H\left(x(t)\right) = \frac{1}{\pi t} * x(t) \leftrightarrow \tilde{X}(\omega) = -j\,\text{sgn}\,\omega X(\omega)$

$z(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$

$Z(\omega) = X(\omega) + j\tilde{X}(\omega) = X(\omega) + j(-j\,\text{sgn}\,\omega)X(\omega) = X(\omega) + \text{sgn}\,\omega X(\omega)$

$$Z(\omega) = \begin{cases} 2X(\omega), \omega > 0 \\ 0, \text{ in rest} \end{cases} \Rightarrow \omega < 0 : X(-\omega) = \frac{Z(-\omega)}{2}\ ,\ \omega > 0 : X(\omega) = \frac{Z(\omega)}{2}$$



b) Trebuie demonstrata relația:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_1(t-nT) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(nT)h_2(t-nT)$$

$$h_1(t) = \cos\omega_C t\,\text{sinc}\frac{\pi}{T}t \leftrightarrow H_1$$

$$h_2(t) = \sin\omega_C t\,\text{sinc}\frac{\pi}{T}t \leftrightarrow H_2$$

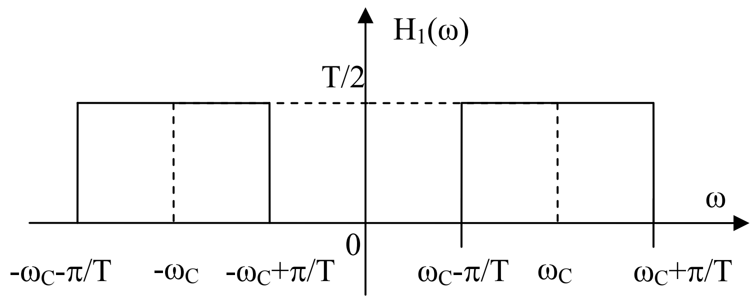
$$\text{sinc}\,\omega_0 t \leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} p_{\omega_0}(\omega) \Rightarrow \text{pt. } \omega_0 = \frac{\pi}{T},\ \text{sinc}\frac{\pi}{T}t \leftrightarrow T p_{\pi/T}(\omega)$$

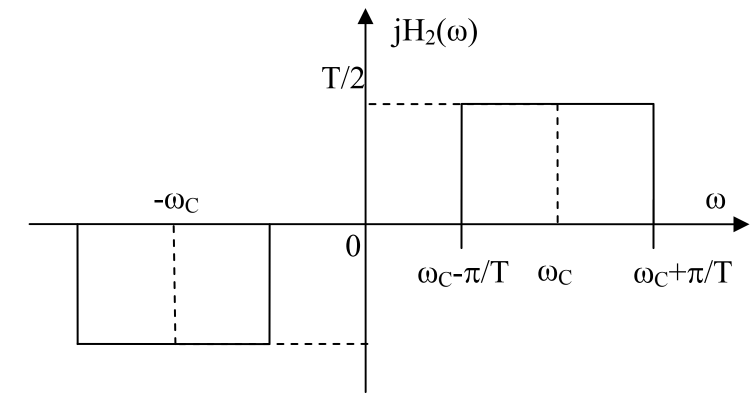
$$H_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} T p_{\pi/T}(\omega) * \pi\left[\delta(\omega-\omega_C) + \delta(\omega+\omega_C)\right]$$

$$H_1(\omega) = \frac{1}{2} T\left[p_{\pi/T}(\omega-\omega_C) + p_{\pi/T}(\omega+\omega_C)\right]$$

$$H_2(\omega)=\frac{1}{2\pi}Tp_{\pi/T}(\omega)*\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_C)-\delta(\omega+\omega_C)\right]$$

$$H_2(\omega)=\frac{1}{2j}T\left[p_{\pi/T}(\omega-\omega_C)-p_{\pi/T}(\omega+\omega_C)\right]$$





=> $X(\omega)H_1(\omega)=\frac{T}{2}X(\omega)$ si $j\tilde{X}(\omega)\,jH_2(\omega)=\operatorname{sgn}\omega X(\omega)\,jH_2(\omega)=\frac{T}{2}X(\omega)$

=> $\tilde{X}(\omega)H_2(\omega)=-\frac{T}{2}X(\omega)$

$$X(\omega)H_1(\omega)-\tilde{X}(\omega)H_2(\omega)=TX(\omega)$$

Eşantionarea semnalelor x si $\tilde{x}$:

$$x_e(t)=\sum x(nT)\delta(t-nT)\ \leftrightarrow\ X_e(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$\tilde{x}_e(t)=\sum \tilde{x}(nT)\delta(t-nT)\ \leftrightarrow\ \tilde{X}_e(\omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$\tilde{X}_e(\omega) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega X_e(\omega)$

Pentru refacerea semnalului x(t) din $x_e(t)$: $\omega_C - \frac{\pi}{T} < \omega_1 < \omega_2 < \omega_C + \frac{\pi}{T}$ => $\frac{\pi}{T} > \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$

$$X_e(\omega) H_1(\omega) = \frac{1}{T} X(\omega) \frac{T}{2} = \frac{1}{2} X(\omega)$$

$$\tilde{X}_e(\omega) H_2(\omega) = -\frac{1}{2} X(\omega)$$

De aceea, $X_e(\omega) H_1(\omega) - \tilde{X}_e(\omega) H_2(\omega) = X(\omega)$

In domeniul timp:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[x(nT)\cos\left[\omega_C (t - nT)\right] - \tilde{x}(nT)\sin\left[\omega_C (t - nT)\right]\right] \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

Pentru a doua relație:

$$-j\,\mathrm{sgn}\,\omega X_e(\omega) H_1(\omega) = -\frac{1}{2} j\,\mathrm{sgn}\,\omega X(\omega) \;=>\; \tilde{X}_e(\omega) H_1(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{X}(\omega)$$

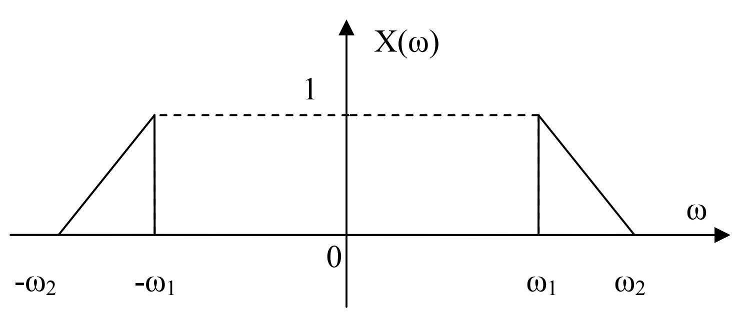
$$j\,\mathrm{sgn}\,\omega \tilde{X}_e(\omega) H_2(\omega) = -\frac{1}{2} j\,\mathrm{sgn}\,\omega X(\omega) \;=>\; X_e(\omega) H_2(\omega) = \frac{1}{2} \tilde{X}(\omega)$$

De aceea, $X_e(\omega) H_2(\omega) + \tilde{X}_e(\omega) H_1(\omega) = \tilde{X}(\omega)$

In domeniul timp:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[x(nT)\cos\left[\omega_C (t - nT)\right] + \tilde{x}(nT)\sin\left[\omega_C (t - nT)\right]\right] \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right)$$

5. Se considera semnalul x(t) având spectrul concentrat ca in figura:



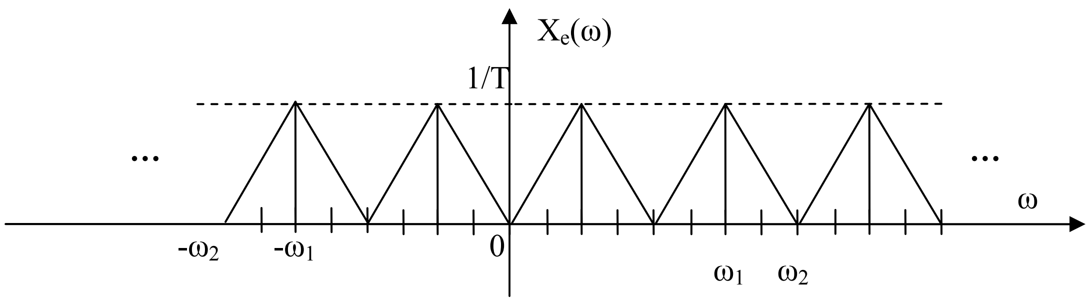
Se păstrează relațiile ca in problema 3. Se eşantionează ideal semnalul cu frecventa $2\omega_M / \pi$.

a) reprezentați spectrul semnalului eşantionat in ipoteza $(4k+3)\omega_M = \omega_C$
b) $(4k+1)\omega_M=\omega_C$
c) reprezentați schemele unor sisteme care sa permită recuperarea semnalului x(t) din semnalele eşantionate obținute la punctele anterioare.

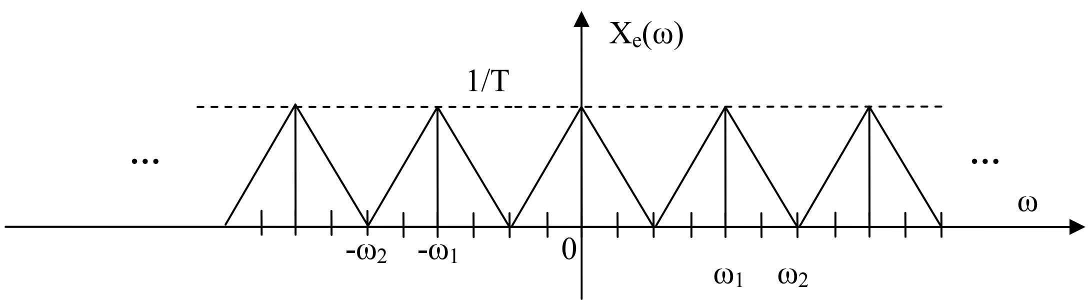
Rezolvare.
a) Pulsația de eşantionare: $\omega_e = 2\pi 2\omega_M / \pi = 4\omega_M$

$$X_e(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$$

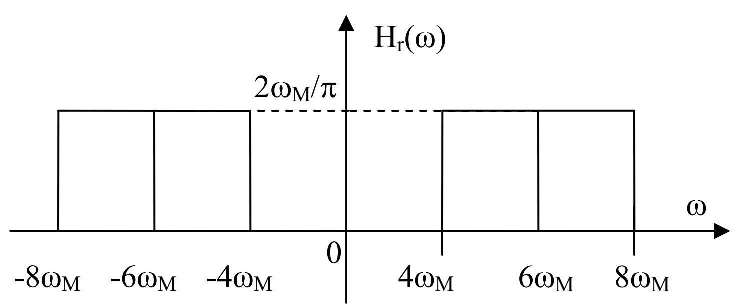
$(4k+3)\omega_M = \omega_C \Rightarrow k=1,\ \omega_C = 7\omega_M,\ \omega_1 = 6\omega_M,\ \omega_2 = 8\omega_M$



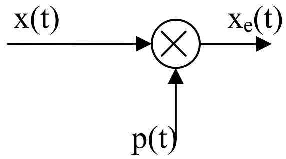
b) $(4k+1)\omega_M = \omega_C \Rightarrow k=1,\ \omega_C = 5\omega_M,\ \omega_1 = 4\omega_M,\ \omega_2 = 6\omega_M$



c) Reconstrucția: filtre trece-banda



6. Se considera sistemul din figura. x(t) este un semnal de banda limitata la intervalul [$-\omega_M$, ω_M], iar p(t) este un semnal periodic de perioada $T = \pi/\omega_M$.



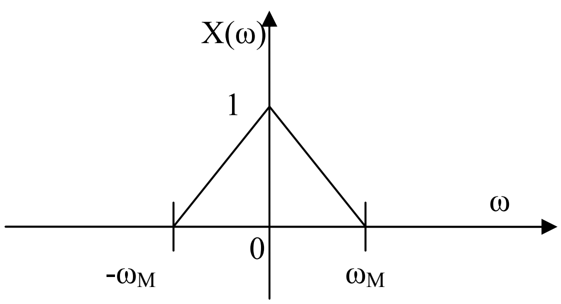
a) notând cu X(ω) spectrul semnalului x(t) si cu a_n coeficienții dezvoltării Fourier a semnalului p(t), aratati ca spectrul semnalului eşantionat se poate scrie:

$X_e(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n X(\omega - n\omega_e)$, ω_e=?

b) presupunând ca x(t) are o componenta continua nenula $a_0 \neq 0$, aratati ca x(t) se poate recupera din $x_e(t)$ prin filtrare trece-jos ideala si determinați parametrii filtrului trece-jos.

c) imaginați un sistem nu neapărat liniar si invariant in timp, care sa permită recuperarea semnalului x(t) din $x_e(t)$ in cazul a_0=0.

d) daca x(t) are spectrul din figura reprezentați modulul spectrului semnalului $x_e(t)$ in următoarele cazuri $p(t)=\delta_T(t)$; $p(t)=\delta_T(t-\Delta)$.



a) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$

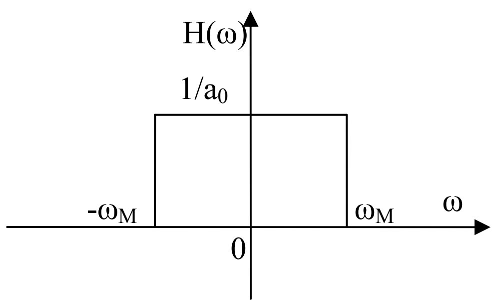
$$P(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$X_e(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega)$$

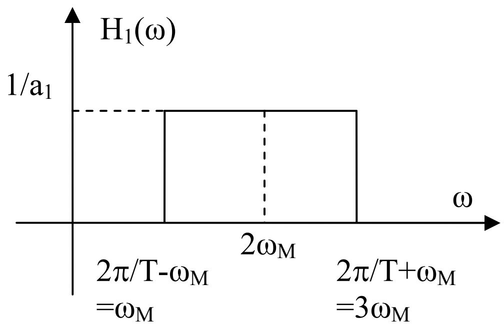
$$X_e(\omega) = \sum_n a_n X\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right),$$

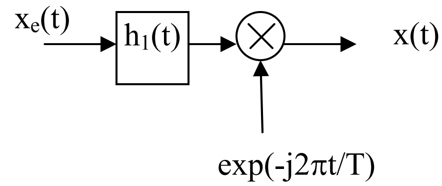
$$\omega_e = \frac{2\pi}{T} = 2\omega_M$$

b) $a_0 \neq 0$ => $X_e(\omega) = a_0 X(\omega) + \sum_{n\neq 0} a_n X\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$



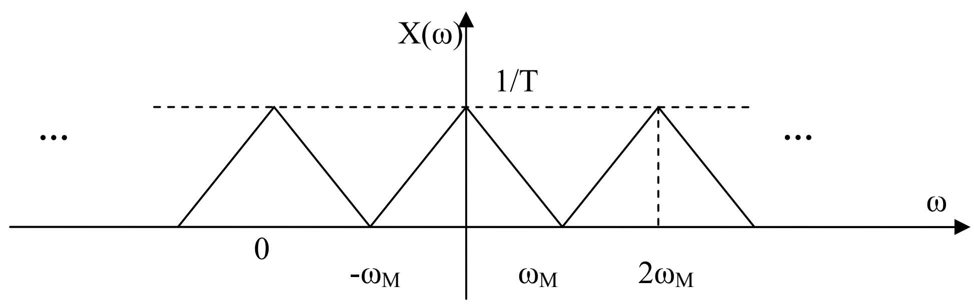
c) $a_0 = 0, a_1 \neq 0$ => $X_e(\omega) = a_1 X(\omega) + \sum_{n\neq 0,1} a_n X\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$





d) p(t)=δ_T(t); $P(\omega)=\frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$

$$X_e(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{T}\sum X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$



p(t)=δ_T(t-Δ); $P(\omega)=e^{-j\omega\Delta}\frac{2\pi}{T}\delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$

$$X_e(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*P(\omega)=\frac{1}{2\pi}X(\omega)*e^{-j\omega\Delta}\frac{2\pi}{T}\sum_k\delta_{\frac{2\pi}{T}}\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$X_e(\omega)=\frac{1}{T}X(\omega)*\sum_k\delta\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)e^{-jk\frac{2\pi}{T}\Delta}=\frac{1}{T}\sum_k X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)e^{-jk\frac{2\pi}{T}\Delta}$$

$$\left|X_e(\omega)\right|=\frac{1}{T}\sum_k\left|X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)\right|$$